Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dalla Prof.ssa R. Toader

Università di Trieste, CdL Ingegneria Industriale e CdL Ingegneria Navale

a.a. 2024/2025

1 Lo spazio $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^N$, costituito dalle N-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, dove x_1, x_2, $\ldots$, x_N sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'', \ldots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in $\mathbb{R}^N$: dati due elementi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_N')$, si definisce $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', \ldots, x_N + x_N')\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'')$;
b) esiste un "elemento neutro" $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$: si ha $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x}$;
c) ogni elemento $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ha un "opposto" $(-\boldsymbol{x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_N)$: si ha $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}$;
d) (commutativa) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}$.

Pertanto, $(\mathbb{R}^N, +)$ è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ per indicare $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}')$.

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di $\mathbb{R}^N$ per un numero reale: considerati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ e un numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce $\alpha\boldsymbol{x}$ in questo modo:

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_N)\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;
b) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\beta\boldsymbol{x})$;
c) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = (\alpha\boldsymbol{x}) + (\alpha\boldsymbol{x}')$;
d) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Pertanto, con le operazioni introdotte, $\mathbb{R}^N$ è uno "spazio vettoriale". Chiameremo i suoi elementi "vettori"; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati "scalari".

È utile introdurre il "prodotto scalare" tra due vettori: dati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)$, si definisce il numero reale $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = \sum_{k=1}^{N} x_k x'_k \,.$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}'\rangle\,, \quad \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle\,, \quad (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}')\,, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$;
b) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
c) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}'' = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'') + (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}'')$;
d) $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}' = \alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')$;
e) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{x}$;

Se $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' = 0$, si dice che i due vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ sono "ortogonali".

Definiamo infine, solo nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, il "prodotto vettoriale" tra due vettori: dati $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, si definisce il vettore $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'$ in questo modo:

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}' = (x_2x'_3 - x_3x'_2\,,\; x_3x'_1 - x_1x'_3\,,\; x_1x'_2 - x_2x'_1)\,.$$

Si può verificare che $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'$ è ortogonale sia a $\boldsymbol{x}$ che a $\boldsymbol{x}'$:

$$(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x} = 0\,, \qquad (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{x}' = 0\,.$$

Inoltre, se $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{0}$, siccome

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x_2x'_3 - x_3x'_2 & x_3x'_1 - x_1x'_3 & x_1x'_2 - x_2x'_1 \end{pmatrix} > 0\,,$$

la direzione di $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'$ è individuata dalla cosiddetta "regola della mano destra". Ciò significa che la terna $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')$ ha la stessa orientazione di $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, la base canonica

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)\,, \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)\,, \quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)\,.$$

Elenchiamo alcune proprietà del prodotto vettoriale:

a) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{x}''=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'')+(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')$;

b) $(\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{x}'=\alpha(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')$;

c) $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}$.

Si può anche dimostrare l'**Identità di Jacobi**

$$\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{x}'')+\boldsymbol{x}'\times(\boldsymbol{x}''\times\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}''\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}')=0\,.$$

Si noti infine che

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\,,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\,,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\,.$$

1.1 Norma e distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la "norma" di un vettore $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$:

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum_{k=1}^{N}x_k^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $\|\boldsymbol{x}\|\geq 0$;

b) $\|\boldsymbol{x}\|=0\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$;

c) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

d) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}'\|$.

Per dimostrare la d), detta "disuguaglianza triangolare" per la norma, abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

Teorema 1 *Presi due vettori* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'$, *si ha*

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'|\leq\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\|\,.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$, essendo in tal caso $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'=0$ e $\|\boldsymbol{x}'\|=0$. Supponiamo quindi $\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{0}$. Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, si ha

$$0\leq\|\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}'\|^2=(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x}')=\|\boldsymbol{x}\|^2-2\alpha\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'+\alpha^2\|\boldsymbol{x}'\|^2\,.$$

Prendendo $\alpha=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'$, si ottiene

$$0\leq\|\boldsymbol{x}\|^2-2\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2+\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^4}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2\|\boldsymbol{x}'\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-\frac{1}{\|\boldsymbol{x}'\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')^2\,,$$

da cui la tesi.[1] ∎

[1] Lo stesso risultato si ottiene osservando che, se $a\alpha^2+b\alpha+c\geq 0$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, con $a>0$, allora $\Delta=b^2-4ac\leq 0$.

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}' + \|\boldsymbol{x}'\|^2\\ &\le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\|^2\\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}'\|)^2\,,\end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{x}'\|^2)\,.$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la "distanza euclidea" tra due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)$:

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(x_k - x'_k)^2}\,.$$

Valgono le seguenti proprietà:

a) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') \ge 0$;
b) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$;
c) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})$;
d) $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'') \le d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')$.

Quest'ultima viene spesso chiamata "disuguaglianza triangolare"; la dimostriamo:

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'') &= \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''\|\\ &= \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') + (\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')\|\\ &\le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|\\ &= d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + d(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\,.\end{aligned}$$

2 Spazi metrici

Definizione 1 *Dato un insieme non vuoto E, una funzione $d : E \times E \to \mathbb{R}$ si chiama "distanza" (su E) se soddisfa alle seguenti proprietà:*

a) $d(x,x') \ge 0$;
b) $d(x,x') = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = x'$;
c) $d(x,x') = d(x',x)$;
d) $d(x,x'') \le d(x,x') + d(x',x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L'insieme E, dotato della distanza d, si dice "spazio metrico". I suoi elementi verranno spesso chiamati "punti".

Abbiamo visto che $\mathbb{R}^N$, dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico $\mathbb{R}^N$, se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso $N = 1$, abbiamo la distanza usuale su $\mathbb{R}$: $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_N)$, la funzione

$$d_*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{N} |x_k - x'_k|$$

rappresenta anch'essa una distanza in $\mathbb{R}^N$. Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_{**}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \max\{|x_k - x'_k| : k = 1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\,, \\ 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'\,. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati $x_0 \in E$ e un numero $\rho > 0$, definiamo la palla aperta di centro x_0 e raggio ρ:

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\}\,;$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\}\,,$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\}\,.$$

In $\mathbb{R}$, ogni intervallo $]a, b[$ è una palla aperta e ogni intervallo $[a, b]$ è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}\,,\, \frac{b-a}{2}\right)\,, \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}\,,\, \frac{b-a}{2}\right)\,.$$

Una sfera in $\mathbb{R}$ è quindi costituita da due soli punti.

In $\mathbb{R}^2$, con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa sì. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in $\mathbb{R}^2$ consideriamo la distanza d_* definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente x_0 come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza d_{**}, la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza $\hat{d}$, su un qualsiasi insieme E, allora

$$B(x_0,\rho)=\begin{cases}\{x_0\} & \text{se } \rho\le 1\,,\\ E & \text{se } \rho>1\,,\end{cases}\qquad \overline{B}(x_0,\rho)=\begin{cases}\{x_0\} & \text{se } \rho< 1\,,\\ E & \text{se } \rho\ge 1\,,\end{cases}$$

per cui

$$S(x_0,\rho)=\begin{cases}E\setminus\{x_0\} & \text{se } \rho=1\,,\\ \emptyset & \text{se } \rho\neq 1\,.\end{cases}$$

Definizione 2 *Un insieme $U\subseteq E$ si dice "intorno" di un punto x_0 se esiste un $\rho>0$ tale che $B(x_0,\rho)\subseteq U$; in tal caso, il punto x_0 si dice "interno" ad U. L'insieme dei punti interni ad U si chiama "l'interno" di U e si denota con $\mathring{U}$. Chiaramente, si ha sempre $\mathring{U}\subseteq U$. Si dice che U è un "insieme aperto" se coincide con il suo interno, ossia se $\mathring{U}=U$.*

Teorema 2 *Una palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Sia $B(x_0,\rho)$ la palla in questione; prendiamo un $x_1\in B(x_0,\rho)$. Scelto $r>0$ tale che $r\le\rho-d(x_0,x_1)$, si ha che $B(x_1,r)\subseteq B(x_0,\rho)$; infatti, se $x\in B(x_1,r)$, allora

$$d(x,x_0)\le d(x,x_1)+d(x_1,x_0)<r+d(x_1,x_0)\le\rho\,,$$

per cui $x\in B(x_0,\rho)$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto x_1 di $B(x_0,\rho)$ è interno a $B(x_0,\rho)$. ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l'insieme U coincide con E; nel secondo, U è l'insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di E è interno all'insieme E stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in E. Quindi, l'interno di E coincide con tutto E, ossia $\mathring{E}=E$. Questo significa che E è un insieme aperto.

L'insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l'interno di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuoto. In altri termini, $\mathring{\emptyset}=\emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è anch'esso un insieme aperto.

L'insieme $U=\{x_0\}$, costituito da un unico punto, in generale non è un insieme aperto (ad esempio in $\mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari, quando x_0 è un "punto isolato" di E. Ad esempio, se si considera la distanza $\hat{d}$, oppure in $\mathbb{N}$, tutti i punti solo isolati.

Teorema 3 *L'interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se $\mathring{U}$ è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che $\mathring{U}$ sia non vuoto. Sia $x_1\in\mathring{U}$. Allora esiste un $\rho>0$ tale che $B(x_1,\rho)\subseteq U$. Se proviamo che $B(x_1,\rho)\subseteq\mathring{U}$ la dimostrazione sarà completa, in quanto avremo dimostrato che ogni punto x_1 di $\mathring{U}$ è interno a $\mathring{U}$.

Per dimostrare che $B(x_1,\rho)\subseteq\mathring{U}$, sia x un elemento di $B(x_1,\rho)$. Siccome $B(x_1,\rho)$ è un insieme aperto, esiste un $r>0$ tale che $B(x,r)\subseteq B(x_1,\rho)$. Allora $B(x,r)\subseteq U$, per cui x appartiene a $\mathring{U}$. La dimostrazione è completa. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2 \, .$$

Da essa segue che $\mathring{U}$ è il più grande insieme aperto contenuto in U: se A è un aperto e $A \subseteq U$, allora $A \subseteq \mathring{U}$.

Definizione 3 *Diremo che il punto x_0 è "aderente" all'insieme U se per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$. L'insieme dei punti aderenti ad U si chiama "la chiusura" di U e si denota con $\overline{U}$. Chiaramente, si ha sempre $U \subseteq \overline{U}$. Si dice che U è un "insieme chiuso" se coincide con la sua chiusura, ossia se $U = \overline{U}$.*

Teorema 4 *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $U = \overline{B}(x_0, \rho)$ la palla in questione; voglio dimostrare che $\overline{U} \subseteq U$. A tal fine vedremo che $\mathcal{C}U \subseteq \mathcal{C}\overline{U}$. [2] Prendiamo un $x_1 \in \mathcal{C}U$, ossia $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$. Scelto $r > 0$ tale che $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$, si ha che $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$; infatti, se per assurdo esistesse un $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$, allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < \rho + r \, ,$$

in contrasto con la scelta fatta per r. Quindi, $x_1 \notin \overline{U}$, ossia $x_1 \in \mathcal{C}\overline{U}$. ■

Essendo E il l'insieme universo, ogni punto aderente ad E deve comunque appartenere ad E stesso. Quindi, la chiusura di E coincide con E, ossia $\overline{E} = E$. Questo significa che E è un insieme chiuso.

Notiamo che non esiste alcun punto aderente all'insieme $\emptyset$. Infatti, qualsiasi sia il punto x_0, per ogni $\rho > 0$ si ha che $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$. Quindi, la chiusura di $\emptyset$, non avendo elementi, è vuota. In altri termini, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, il che significa che $\emptyset$ è un insieme chiuso.

L'insieme $U = \{x_0\}$, costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un $x_1 \notin U$, scegliendo $\rho > 0$ tale che $\rho < d(x_0, x_1)$ si ha che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$, per cui x_1 non è aderente ad U.

Teorema 5 *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Poniamo $V = \overline{U}$. Se $V = E$, la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia $V \neq E$. Sia $x_1 \notin V$. Allora esiste un $\rho > 0$ tale che $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$. Vediamo che anche $B(x_1, \rho) \cap V = \emptyset$. Infatti, se per assurdo ci fosse un $x \in B(x_1, \rho) \cap V$, essendo $B(x_1, \rho)$ un insieme aperto, esisterebbe un $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$. Siccome $x \in V = \overline{U}$, dovrebbe essere $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$ e quindi anche $B(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$, in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto x_1 al di fuori di V può essere aderente a V. In altri termini, V contiene tutti i punti ad esso aderenti, pertanto è chiuso. ■

[2] Denotiamo con $\mathcal{C}U$ il complementare di U in E, ossia l'insieme $E \setminus U$.

Si può dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2 \,.$$

Da questa implicazione segue che $\overline{U}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene U: se C è un chiuso e $C \supseteq U$, allora $C \supseteq \overline{U}$.

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi aperti [chiusi] sono insiemi aperti [chiusi]. Lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti [chiusi]: lo si dimostra per induzione. Se invece si considera un numero infinito di insiemi, la cosa cambia. L'unione di un numero infinito di insiemi aperti è un insieme aperto, l'intersezione in generale non lo è. Ad esempio, in $\mathbb{R}$, prendendo gli aperti

$$A_n = \left]-\frac{1}{n+1}\,,\,\frac{1}{n+1}\right[\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro intersezione è $\{0\}$, che non è un aperto. Analogamente, l'intersezione di un numero infinito di insiemi chiusi è un insieme chiuso, mentre l'unione in generale non lo è. Ad esempio, considerando i chiusi

$$C_n = \left[-1+\frac{1}{n+1}\,,\,1-\frac{1}{n+1}\right]\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$, la loro unione è l'intervallo $]-1,1[$, che non è un chiuso.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

Teorema 6 *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U}\,, \qquad (\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}\overline{U}\,.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se $U = E$, allora $\mathcal{C}U = \emptyset$, per cui $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$; d'altra parte, $\mathring{U} = E$, per cui $\mathcal{C}\mathring{U} = \emptyset$. L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia $U \neq E$, per cui $\mathcal{C}U \neq \emptyset$. Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x,\rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \rho > 0 \quad B(x,\rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow \quad x \notin \mathring{U} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{C}\mathring{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurne la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}U)} = \overline{U}\,.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ∎

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathring{U})\,, \qquad \mathring{U} = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{C}U})\,.$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

Teorema 7 *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Dimostrazione. Se U è aperto, $U = \mathring{U}$ e quindi

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U} = \mathcal{C}U\,,$$

per cui $\mathcal{C}U$ è chiuso.

Se U è chiuso, $U = \overline{U}$ e quindi

$$(\mathcal{C}\mathring{U}) = \mathcal{C}\overline{U} = \mathcal{C}U\,,$$

per cui $\mathcal{C}U$ è aperto. ■

Nota. Nel seguito, qualora non specificato altrimenti, quando parleremo di $\mathbb{R}^N$ come spazio metrico sarà sempre sottinteso che la distanza e la norma su di esso considerate siano quelle euclidee.

3 Funzioni continue

Siano E ed F due spazi metrici, con le loro distanze d_E e d_F, rispettivamente. Sia x_0 un punto di E e $f : E \to F$ una funzione.

Definizione 4 *Diremo che f è "continua" in x_0 se, comunque preso un numero positivo ε, è possibile trovare un numero positivo δ tale che, se x è un qualsiasi elemento del dominio E che disti da x_0 per meno di δ, allora $f(x)$ dista da $f(x_0)$ per meno di ε. In simboli:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura "$\forall x \in E$" verrà sottintesa.

Osserviamo che una o entrambe le disuguaglianze

$$d_E(x, x_0) < \delta\,, \qquad d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

possono essere sostituite rispettivamente da

$$d_E(x, x_0) \leq \delta\,, \qquad d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$$

ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che ε è un *qualunque* numero positivo e, dall'altro lato, che se l'implicazione della definizione vale per un certo numero positivo δ, essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel δ un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che f è continua in x_0 se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \, .$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui f è continua in x_0 se e solo se:

per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

Nel caso in cui la funzione f sia continua in ogni punto x_0 del dominio E, diremo che "f è continua su E", o semplicemente "f è continua".

Vediamo ora alcuni esempi.

Esempio 1. La funzione costante: per un certo $\bar{c} \in F$, si ha che $f(x) = \bar{c}$, per ogni $x \in E$. Essendo $d_F(f(x), f(x_0)) = d_F(\bar{c}, \bar{c}) = 0$ per ogni $x \in E$, tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di $\delta > 0$ va bene).

Esempio 2. Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}^N$. Fissato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x}$. Vediamo che è continua. Infatti, se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costante con valore $\mathbf{0}$, e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora $\alpha \neq 0$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, essendo

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|\alpha \boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{x}_0\| = \|\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \, ,$$

basta prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ per avere l'implicazione

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon \, .$$

Esempio 3. Siano $E = \mathbb{R}^N$ e $F = \mathbb{R}$. Vediamo che la funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ è continua su $\mathbb{R}^N$. Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\Big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\| \Big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \, ,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &= \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') + \boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| + \|\boldsymbol{x}'\| \, , \\ \|\boldsymbol{x}'\| &= \|(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{x}\| \, . \end{aligned}$$

Essendo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| = \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|$, si ha che

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}'\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \qquad \text{e} \qquad \|\boldsymbol{x}'\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| \, ,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e fissato un $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon$ per avere che

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \ \Rightarrow \ \Big| \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{x}_0\| \Big| < \varepsilon \, .$$

I tre teoremi seguenti hanno dimostrazione analoga a quella vista nel corso di Analisi 1, in cui si supponeva che E fosse un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Teorema 8 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $\alpha \in \mathbb{R}$, anche αf, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0.*

Teorema 9 (della permanenza del segno) *Sia $g : E \to \mathbb{R}$ continua in x_0. Se $g(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 per cui $g(x) > 0$ per ogni $x \in U$. Se invece $g(x_0) < 0$, allora esiste un intorno U di x_0 per cui $g(x) < 0$ per ogni $x \in U$.*

Teorema 10 *Se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

Teorema 11 *Siano E, F, G tre spazi metrici, $f : E \to F$ continua in x_0 e $g : F \to G$ continua in $f(x_0)$; allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Fissato un intorno W di $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$, per la continuità di g in $f(x_0)$ esiste un intorno V di $f(x_0)$ tale che $g(V) \subseteq W$. Allora, per la continuità di f in x_0, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$. Ne segue che $[g \circ f](U) \subseteq W$. ∎

Consideriamo ora, per ogni $k = 1, 2, \ldots, D$, la funzione "k-esima proiezione" $p_k : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ definita da

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_D) = x_k \,.$$

Teorema 12 *Le funzioni p_k sono continue.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_D^0) \in \mathbb{R}^D$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Notiamo che, per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_D) \in \mathbb{R}^D$, si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{D} (x_j - x_j^0)^2} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \,,$$

per cui, prendendo $\delta = \varepsilon$, si ha:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; |p_k(\boldsymbol{x}) - p_k(\boldsymbol{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon \,,$$

il che dimostra che p_k è continua in $\boldsymbol{x}_0$. ∎

Supponiamo ora $f : E \to \mathbb{R}^M$. Consideriamo le "componenti" della funzione f definite da $f_k = p_k \circ f : E \to \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, \ldots, M$, per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x)) \,.$$

Teorema 13 *La funzione f è continua in x_0 se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Dimostrazione. Se f è continua in x_0, lo sono anche le f_k in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di f siano tutte continue in x_0. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \ldots, M$ esiste un $\delta_k > 0$ tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \;\Rightarrow\; |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M\}$, si ha

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon\,,$$

il che, per l'arbitrarietà di ε, completa la dimostrazione. ■

Teorema 14 *Ogni applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è continua.*

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo le proiezioni p_k lineari, le componenti $\ell_k = p_k \circ \ell$ dell'applicazione lineare ℓ sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_N]$ di $\mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)\,,\\
\boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\\
&\vdots\\
\boldsymbol{e}_N &= (0, 0, 0, \ldots, 1)\,.
\end{aligned}$$

Ogni vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_N\boldsymbol{e}_N = p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + p_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \cdots + p_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_N\,.$$

Quindi, per ogni $k \in \{1, 2, \ldots, M\}$,

$$\ell_k(\boldsymbol{x}) = p_1(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_1) + p_2(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + p_N(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_N)\,,$$

per cui ℓ_k risulta essere combinazione lineare delle proiezioni $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Essendo queste ultime continue, anche ℓ_k è continua. Avendo tutte le componenti continue, ℓ è pertanto continua. ■

4 La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici E, F, un punto x_0 di E e una funzione

$$f : E \to F\,, \qquad \text{oppure} \qquad f : E \setminus \{x_0\} \to F\,,$$

non necessariamente definita in x_0. Supporremo inoltre che x_0 sia un "punto di accumulazione" di E: ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di E.

Definizione 5 *Si dice che $l \in F$ è il "limite di f in x_0", o anche "limite di $f(x)$ per x che tende a x_0" e si scrive*

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon\,,$$

o equivalentemente,

$$\forall V, \text{ intorno di } l \quad \exists U, \text{ intorno di } x_0 : \quad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche $f(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Per cominciare, verifichiamo l'unicità del limite.

Teorema 15 *Se esiste, il limite di f in x_0 è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi, l e l'. Prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(l, l')$. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon\,,$$

ed esiste un $\delta' > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \ \Rightarrow \ d(f(x), l') < \varepsilon\,.$$

Sia $x \neq x_0$ tale che $d(x, x_0) < \delta$ e $d(x, x_0) < \delta'$ (tale x esiste perché x_0 è di accumulazione). Allora

$$d(l', l) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), l') < 2\varepsilon = d(l', l)\,,$$

una contraddizione. ∎

I seguenti due teoremi evidenziano il legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

Teorema 16 *Si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se e solo se la funzione $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0\,, \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0

Teorema 17 *Considerata la funzione $f : E \to F$, definita anche in x_0, si ha che*

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni f e g sono definite su E o su $E \setminus \{x_0\}$, indifferentemente.

Teorema 18 (della permanenza del segno) *Sia $g : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) > 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) > 0\,.$$

Analogamente, se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) < 0\,,$$

allora esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; g(x) < 0\,.$$

Corollario 1 *Se $g(x) \leq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \leq 0\,.$$

Analogamente, se $g(x) \geq 0$ per ogni x in un intorno di x_0, allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \geq 0\,.$$

Vediamo ora come si comporta il limite nei confronti delle operazioni in $\mathbb{R}$.

Teorema 19 *Siano $f, g : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ tali che*

$$l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)\,, \quad l_2 = \lim_{x \to x_0} g(x)\,.$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2\,;$$

inoltre, se $l_2 \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\,.$$

Consideriamo ora una funzione composta $g \circ f$. Abbiamo due possibili situazioni.

Teorema 20 *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,.$$

Se $g : F \to G$ è continua in l, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)\,.$$

In altri termini,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))\,.$$

Dimostrazione. Ricordo che la funzione $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0\,, \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0 e g è continua in $l = \tilde{f}(x_0)$. Pertanto, $g \circ \tilde{f}$ è continua in x_0, da cui

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{x\to x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l)\,.$$

■

Teorema 21 *Sia $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, tale che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,.$$

Supponiamo che l sia un punto di accumulazione di F e che la funzione

$$g : F \to G\,, \qquad \textit{oppure} \qquad g : F \setminus \{l\} \to G\,,$$

non necessariamente definita in l, sia tale che

$$\lim_{y\to l} g(y) = L\,.$$

Se $f(x) \neq l$ per ogni $x \in E \setminus \{x_0\}$, allora

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione $\tilde{f} : E \to F$, continua in x_0 con $\tilde{f}(x_0) = l$. Analogamente, consideriamo la funzione $\tilde{g} : F \to G$ così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l\,, \\ L & \text{se } y = l\,. \end{cases}$$

Essa è continua in l con $\tilde{g}(l) = L$. Consideriamo la funzione composta $\tilde{g} \circ \tilde{f}$, che per quanto sopra è continua in x_0 con $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$. Essendo $f(x) \neq l$ per ogni x, si ha che, per $x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))\,,$$

e pertanto,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L\,.$$

■

Nota. La conclusione del teorema precedente si riassume con la formula

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{\substack{y\to \lim f(x) \\ x\to x_0}} g(y)\,.$$

Spesso si dice che si è operato il "cambio di variabile $y = f(x)$". Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia $f(x) \neq l$ per gli x tali che $0 < d(x, x_0) < \delta$. Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo "locale". Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

Esempio. Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $g(z) = z \sin(1/z)$. Il Teorema 21 qui può essere applicato per concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = \lim_{\substack{z \to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}} g(z) = \lim_{z\to 0} g(z) = 0\,.$$

Siamo infine interessati a studiare il limite di una funzione $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^M$, dove x_0 è un punto di accumulazione di uno spazio metrico E. Consideriamo le sue componenti $f_k : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ di f, con $k = 1, 2, \ldots, M$, per cui si ha:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x))\,.$$

Teorema 22 *Il limite* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^M$ *esiste se e solo se esistono i limiti* $\lim\limits_{x\to x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$, *per ogni* $k = 1, 2, \ldots, M$. *In tal caso, si ha* $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_M)$. *Vale quindi la formula*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = (\lim_{x\to x_0} f_1(x), \lim_{x\to x_0} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to x_0} f_M(x))\,.$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ∎

Finora abbiamo considerato due spazi metrici E, F, un punto x_0 di accumulazione per E e una funzione $f : E \to F$, oppure $f : E \setminus \{x_0\} \to F$. Siccome l'eventuale valore di f in x_0 è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonchè del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso $f : E \setminus \{x_0\} \to F$.

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$, con $\widehat{E} \subseteq E$, purché x_0 sia di accumulazione per $\widehat{E}$: ogni intorno di x_0 deve contenere infiniti punti di $\widehat{E}$.

Sia ora $f : E \setminus \{x_0\} \to F$, e sia $\widehat{E} \subseteq E$. Possiamo considerare la restrizione di f a $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$: è la funzione $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \to F$ i cui valori coincidono con quelli di f: si ha $\hat{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$. Talvolta si scrive $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$.

Teorema 23 *Se esiste il limite di* f *in* x_0 *e* x_0 *è di accumulazione anche per* $\widehat{E}$, *allora esiste anche il limite di* $\hat{f}$ *in* x_0 *e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x\to x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\,.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di $\hat{f}$. ∎

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione f: a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

Esempio 1. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,,$$

non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$, come si vede considerando le restrizioni alle due rette $\{(x,y) : x = 0\}$ e $\{(x,y) : x = y\}$.

Esempio 2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}\,,$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per $(0,0)$ hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola $\{(x,y) : y = x^2\}$ vale costantemente $\frac{1}{2}$.

Esempio 3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\,,$$

risulta naturale prendere $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, per avere che

$$d((x,y),(0,0)) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon\,.$$

Consideriamo ora il caso in cui E è uno spazio metrico qualunque ed $F = \mathbb{R}$. Risulterà talvolta utile il seguente "teorema dei due carabinieri".

Teorema 24 *Supponiamo di avere due funzioni f_1, f_2 per cui*

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = l\,.$$

Se $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ è tale che, per ogni x,

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{aligned} 0 < d(x,x_0) < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad l-\varepsilon < f_1(x) < l+\varepsilon\,,\\ 0 < d(x,x_0) < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad l-\varepsilon < f_2(x) < l+\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, allora

$$0 < d(x,x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad l-\varepsilon < f_1(x) \le f(x) \le f_2(x) < l+\varepsilon\,,$$

il che dimostra la tesi. ∎

5 La retta ampliata

Consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|} .$$

Possiamo definire una nuova distanza su $\mathbb{R}$:

$$\tilde{d}(x, x') = |\varphi(x) - \varphi(x')| .$$

Si può vedere che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$, definito come unione di $\mathbb{R}$ e di due nuovi elementi, che indicheremo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} .$$

L'insieme $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x < +\infty .$$

Consideriamo la funzione $\tilde{\varphi} : \widetilde{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty , \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} , \\ 1 & \text{se } x = +\infty . \end{cases}$$

Definiamo, per $x, x' \in \widetilde{\mathbb{R}}$,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')| .$$

Si verifica facilmente che $\tilde{d}$ è una distanza su $\widetilde{\mathbb{R}}$. In questo modo, $\widetilde{\mathbb{R}}$ risulta uno spazio metrico.

Si può verificare che un intorno di $+\infty$ è un insieme che contiene, oltre al punto $+\infty$, un intervallo del tipo $]\alpha, +\infty[$, per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente, un intorno di $-\infty$ è un insieme che contiene, oltre a $-\infty$, un intervallo del tipo $]-\infty, \beta[$, per un certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi $+\infty$ o $-\infty$. Ad esempio, sia $E \subseteq \mathbb{R}$, F uno spazio metrico e $f : E \to F$ una funzione. Considerando E come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si ha che $+\infty$ è punto di accumulazione per E se e solo se E non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } l \ \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ f(U \cap E) \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon .$$

Analogamente, se E non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \ \Rightarrow \ d(f(x), l) < \varepsilon \, .$$

Si noti che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(-x) = l \, .$$

Vediamo ora il caso in cui E sia uno spazio metrico ed $F = \mathbb{R}$, considerato come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per E e consideriamo una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, o $f : E \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \ f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha \, ;$$

analogamente,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \ \Rightarrow \ f(x) < \beta \, .$$

Si noti che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty \, .$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \ f(U \cap E) \subseteq V$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha' \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha \, ;$$

analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad x > \alpha \ \Rightarrow \ f(x) < \beta \, .$$

Se invece $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente ed $F = \mathbb{R}$, si avrà

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : \quad x < \beta \ \Rightarrow \ f(x) > \alpha \, ;$$

analogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R} : \quad x < \beta' \ \Rightarrow \ f(x) < \beta \, .$$

Vediamo ad esempio il caso di una successione $(a_n)_n$ in uno spazio metrico F. Abbiamo quindi una funzione $f : \mathbb{N} \to F$ definita da $f(n) = a_n$. Considerando $\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbb{R}}$, si vede che l'unico punto di accumulazione è $+\infty$. Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, l) < \varepsilon \,.$$

Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con $\lim_n a_n$, sottintendendo che $n \to +\infty$.

Teorema 25 *La funzione f è continua in x_0 se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in E, si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0) \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0, e sia $(a_n)_n$ una successione in E tale che $\lim_n a_n = x_0$. Per il Teorema 20 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0) \,,$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che f non sia continua in x_0. Questo significa che esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esiste almeno un $x \in E$ per cui $d(x, x_0) < \delta$ e $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = \frac{1}{n+1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste pertanto un a_n in E tale che $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$ e $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. Ne segue che $\lim_n a_n = x_0$, ma sicuramente non può essere che $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$. ∎

Consideriamo ora il caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione e $f : E \setminus \{x_0\} \to F$ una funzione. Come immediata conseguenza del teorema precedente, otteniamo il seguente

Corollario 2 *Avremo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se e solo se, presa una successione $(a_n)_n$ in $E \setminus \{x_0\}$, si ha

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = l \,.$$

Sia ora U un sottoinsieme dello spazio metrico E. Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a U facendo uso delle successioni.

Teorema 26 *Un punto $x \in E$ è aderente a U se e solo se esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$.*

Dimostrazione. Se x è aderente a U, allora l'intersezione $B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U$ è non vuota, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo a_n. In questo modo, ho costruito una successione $(a_n)_n$ in U, ed è facile vedere che essa ha limite x. Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Allora, fissato $\rho > 0$, esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \;\Rightarrow\; d(a_n, x) < \rho\,,$$

ossia $a_n \in B(x, \rho)$. Quindi, $B(x, \rho) \cap U$ è non vuoto, e questo dimostra che x è aderente a U. ∎

6 Insiemi compatti

Data che sia una successione $(a_n)_n$, una sua "sottosuccessione" si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici $(n_k)_k$ e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}\,.$$

Teorema 27 *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici n_k in $\mathbb{N}$, dalla $n_{k+1} > n_k$ si deduce che $n_{k+1} \geq n_k + 1$ e, per induzione, che $n_k \geq k$, per ogni k. Ne segue che $\lim_k n_k = +\infty$. Pertanto,

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \lim_k n_k} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$ ∎

In uno spazio metrico E, diremo che un sottoinsieme U è "compatto" se ogni successione $(a_n)_n$ in U possiede una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U. Il Teorema di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se $E = \mathbb{R}$, gli intervalli del tipo $U = [a, b]$ sono compatti.

Teorema 28 *Ogni insieme compatto di uno spazio metrico E è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sia U un insieme compatto. Preso un $x \in \overline{U}$, esiste una successione $(a_n)_n$ in U tale che $\lim_n a_n = x$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha limite in U. Ma, essendo una sottosuccessione, deve essere $\lim_k a_{n_k} = x$, per cui $x \in U$. Quindi, ogni punto aderente di U appartiene ad U, per cui U è chiuso.

Fissiamo ora un $x_0 \in U$ qualsiasi e dimostriamo che, se $n \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, allora $U \subseteq B(x_0, n)$. Per assurdo, se così non fosse, potrei trovare una successione $(a_n)_n$ in U tale che $d(a_n, x_0) \geq n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma, essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ che ha un certo limite $\bar{x} \in U$. Usando la disuguaglianza triangolare, si ha che

$$|d(a_{n_k}, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(a_{n_k}, \bar{x})\,,$$

da cui segue che $\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = d(\bar{x}, x_0)$, mentre dovrebbe essere

$$\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = +\infty\,,$$

una contraddizione. Pertanto, U deve essere limitato. ∎

Ora vorremmo focalizzare la nostra attenzione sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^M$.

Teorema 29 *Un sottoinsieme $\mathbb{R}^M$ è compatto* se e solo se *è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sappiamo già che ogni compatto è chiuso e limitato. Supponiamo ora che U sia un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^M$. Supporremo per semplicità $M = 2$. Allora U è contenuto in un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]\,.$$

Sia $(\boldsymbol{a}_n)_n$ una successione in U. Si ha $\boldsymbol{a}_n = (a_n^1, a_n^2)$, con $a_n^1 \in [a_1, b_1]$ e $a_n^2 \in [a_2, b_2]$. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a^1_{n_k})_k$ che ha un limite $l_1 \in [a_1, b_1]$. Consideriamo la sottosuccessione $(a^2_{n_k})_k$, con gli stessi indici di quella appena trovata. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a^2_{n_{k_j}})_j$ che ha un limite $l_2 \in [a_2, b_2]$. Osservando che

$$d\Big(\boldsymbol{a}_{n_{k_j}}, (l_1, l_2)\Big) = \sqrt{(a^1_{n_{k_j}} - l_1)^2 + (a^2_{n_{k_j}} - l_2)^2}\,,$$

se ne deduce che

$$\lim_j \boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = (l_1, l_2)\,.$$

Il punto $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$ è aderente ad U. Essendo U chiuso, $\boldsymbol{l}$ appartiene ad U. ∎

Nel seguito, diremo che una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è "limitata superiormente" (o "limitata inferiormente") se lo è la sua immagine $f(U)$. Diremo che f è "limitata" se è sia limitata superiormente che inferiormente. Diremo che "f ha massimo" (o "f ha minimo") se $f(U)$ ce l'ha. Nel caso in cui f abbia massimo, chiameremo "punto di massimo" ogni $\bar{x}$ per cui $f(\bar{x}) = \max f(U)$; analoga definizione per "punto di minimo".

Teorema 30 (di Weierstrass) *Se U è un insieme compatto e $f : U \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $s = \sup f(U)$. Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un $\bar{x} \in U$ tale che $f(\bar{x}) = s$.

Notiamo che è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in $f(U)$ tale che $\lim_n y_n = s$: se $s \in \mathbb{R}$, per ogni $n \geq 1$ possiamo trovare un $y_n \in f(U)$ per cui $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$; se invece $s = +\infty$, per ogni n esiste un $y_n \in f(U)$ tale che $y_n > n$.

In corrispondenza, possiamo trovare una successione $(x_n)_n$ in U tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo U compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che ha un limite $\bar{x} \in U$. Siccome $\lim_n y_n = s$ e $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, la sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ ha anch'essa limite s. Allora, per la continuità di f,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s\,.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l'esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua $g = -f$ e si usa il fatto che g ha massimo). ∎