

Esercitazioni di “Geometria”

Foglio 1

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

11 ottobre 2024

“La pratica è la verifica della teoria”

Esercizi 1. Calcolare il modulo, il complesso coniugato e l’elemento inverso dei seguenti numeri complessi:

$$-i, 1 - i, 3 - i\sqrt{2}, 2i - \sqrt{3}, i - 3, -\frac{1}{2}(1 - i), \sqrt{3 - 2i}, \frac{-i + 1}{i - 1}.$$

Esplicitare la parte reale ed immaginaria dei numeri determinati, e riscriverli in forma trigonometrica.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti numeri complessi:

$$(1 + i)^{-3}, \frac{1 + 2i}{1 - 2i} \cdot (1 + \sqrt{5}i)^2 - i, (1 + \sqrt{3}i)^5 + i.$$

Esercizio 3. Calcolare le radici quadrate dei seguenti numeri complessi:

$$2 - 3i, 1 + i, \sqrt{1 + i}.$$

Esercizio 4. Calcolare le seguenti radici complesse:

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}i}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[6]{-1}, \sqrt{-i}, \sqrt[3]{-i}.$$

Esercizio 5. Calcolare le radici dei seguenti polinomi (di secondo grado):

$$2x^2 - 3x + 4, 2x^2 + 3x + 4, x^2 + x + 1, x^2 - x + 1, ix^2 + 1, x^2 + i \in \mathbb{C}[x].$$

- Scomporli come prodotti di polinomi di primo grado.
- Quali polinomi sono scomponibili su \mathbb{R} ?
- Quali polinomi sono scomponibili su \mathbb{Q} ?

Esercizio 6. Svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \\ & \sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{4} & -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \end{pmatrix} - \sqrt[3]{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3, \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^2. \end{aligned}$$

Esercizio 7. Date le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^3, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^2, \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2. \end{aligned}$$

Calcolare i seguenti prodotti di matrici: $AB, BA, AC, BD, BE, CB, CC, DD, EE, DE, ED, ABD$.

Esercizio 8. Ripetere il precedente esercizio considerando le precedenti matrici a coefficienti nei campi $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$.

Nota: con \mathbb{F}_p indico il campo finito con p elementi.