Lezione 7 ottobre 2024

lunedì 7 ottobre 2024 10:00

AVVISO: oggi 16 - 17:30 ricevimento studenti
e ogni LUNEDÌ in aula 3B : terzo piano
ed. H2 bis

Su MOODLE : Foglio 1 di esercizi
Domani : 14:15 - 15:00 lezione
15:00 - 16:45 tutorato
con VIRIGINIA GAZZIERO

~ . ~ . ~

VISTO : Funzione ; composizione

OSS: A partire da funzioni elementari è possibile produrre infinite altre; oltre alla composizione, possiamo cons. le seguenti:

per semplicità $f: R \to R$
($\text{opp. } f: D \to R$)
$D \subseteq R$

$g: R \to R$ ($\text{opp. } g: D' \to R$)

Def.: La SOMMA $f+g : R \to R$
(ovvero $f+g : \underbrace{D \cap D'}_{\text{intersezione}} \to R$)

così definita:

$$\boxed{(f+g)(r) = f(r) + g(r)}$$

Somma in R

$r \in R$
$(D \cap D')$

Es: • $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

$(f+g)(x) = x^2 + x^3$

$(f+g)(2) = 2^2 + 2^3 = f(2) + g(2)$

• $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

$(f+g)(x) = \sin x + \cos x$

- MOLTIPLIC. PER UN NUMERO

ovvero UNO SCALARE

Sia $f: R \to R$, opp. $f: D \to R$
$\subseteq R$

sia $c \in R$
posso cons.

$c \cdot f : D \to R$

$(c \cdot f)(r) = c \cdot f(r)$, $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$

$r \in D$

moltiplic. in R

es.: $f(x) = \sin x$, $(3 \cdot f)(\pi) = 3 \cdot f(\pi)$
$= 3 \cdot \sin \pi = 3 \cdot 0 = 0$

- $f: D \to R$, $g: D' \to R$

$(f \cdot g) : D \cap D' \to R$

$(f \cdot g)(r) = f(r) \cdot g(r)$

- $\dfrac{f}{g} : \underbrace{D \cap D' \cap \{r \in D' : g(r) \neq 0\}} \to R$

$$\frac{f}{g}(r) = \frac{f(r)}{g(r)}$$

Vediamo ora alcune funzioni elementari:

VALORE ASSOLUTO :

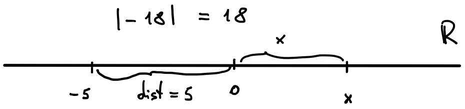
$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$|0| = 0$

es : $|3,12| = 3,12$

$|-18| = 18$

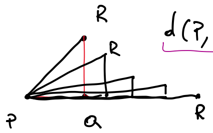


DISEG. TRIANGOLARE :

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$$

(vedremo : distanze in $\mathbb{R}^2$: $d(P,Q)$



$\underline{d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)}$

Esempi: $x = 2$, $y = 3$

$|2+3| \leq |2| + |3|$

$|5| = 5 = 2 + 3$

$x = -2$, $y = -3$

$|-2-3| = |-5| = 5 \leq |-2| + |-3|$

$5 = 2 + 3$

$\Rightarrow$ se x e y hanno segno concorde,
vale $=$

- $x = -2$, $y = 3$

$|x+y| = |-2+3| = |1| = 1 \leq |-2| + |3|$

$2 + 3 = 5$

$1 < 5$

vale $<$ se x e y segno discorde.

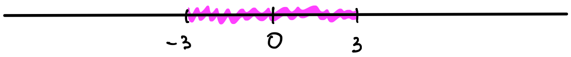
USO DI $|\cdot|$:

Cons. le diseg. $\boxed{|x| \leq 3}$

$x \geq 0$: $x \leq 3$

$x \leq 0$: $-x \leq 3 \Updownarrow x \geq -3$

$\Longrightarrow -3 \leq x \leq 3$ INTERVALLO CHIUSO



$|x| < 3$

$x \geq 0$: $x < 3$

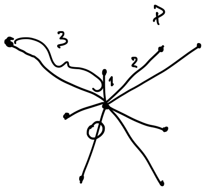
$x \leq 0$: $-x < 3$, $x > -3$

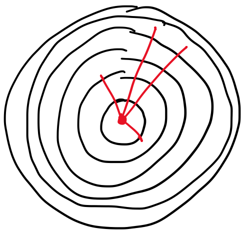
$$\boxed{-3 < x < 3}$$

INTERVALLO APERTO

(analog : $d(O,P) \leq 3$

O punto fissato $\{P \in \mathbb{R}^2 : d(O,P) \leq 3\}$ = DISCO DI CENTRO O e RAGGIO 3





In generale : $|x| < a$, $|x| \leq a$ $\Rightarrow$

$-a < x < a$, $-a \leq x \leq a$, $a > 0$

se $a > 0$

se $a \leq 0$: NON CI SONO SOLUZ.

($|x| < -1$ $\Rightarrow$ non ha soluzioni)

$|x| < 0$ $\Rightarrow$ " "

Notaz: $-a \leq x \leq a$ $(a > 0)$ scriviamo

$x \in [-a, a] = \{r \in \mathbb{R} : -a \leq r \leq a\}$

INT. CHIUSO

$-a < x < a$: $x \in (-a, a) = \{r \in \mathbb{R} : -a < r < a\}$

OSS. su $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

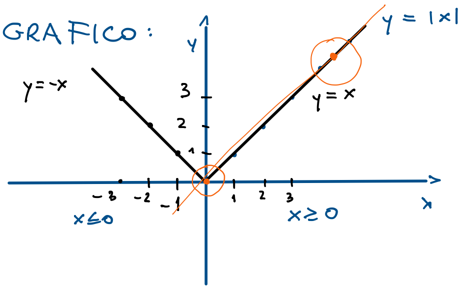
è un esempio di FUNZIONE DEFINITA A TRATTI

NON è iniettiva: $|-8| = |8| = 8$

È SURIETTIVA : $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $r \geq 0$

$|r| = r$

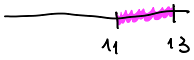
il GRAFICO:



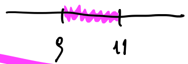
- Possiamo cons. diseq. del tipo:

$\boxed{|x-11|} < 2$

$x \geq 11$, $x-11 \geq 0$: $x-11 < 2$, $x < 13$



$x-11 \leq 0$, $x \leq 11$: $11 - x < 2$, $x > 9$



$\Updownarrow$

$9 < x < 13 \iff \boxed{x \in (9, 13)}$

Oss. : non è del tipo $(-a, a)$

OVVERO : come $|x|$ rappres. la distanza da 0

$|x-11|$ rappresenta la distanza da 11

IN GENERALE $|x-b| < a$, $a > 0$

$x-b \leq 0$: $b - x < a$, $x > b - a$

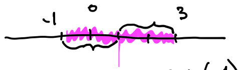
$x-b \geq 0$: $x - b < a$, $x < b + a$

$\Rightarrow b-a < x < b+a$

OSS: Tutti gli intervalli si possono scrivere in questa forma :

ad es. $(-1, 3) = \{r \in \mathbb{R} : -1 < r < 3\}$

$-1 < x < 3 \iff |x-1| < 2$



$1 = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

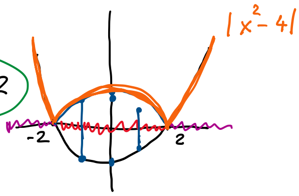
VALORE ASS. DI FUNZIONI

ad es.: $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & x^2-4 \geq 0 \\ 4-x^2 & x^2-4 \leq 0 \end{cases}$

$x^2-4 \geq 0 \iff x \leq -2$ opp. $x \geq 2$

$(x-2)(x+2) \geq 0$

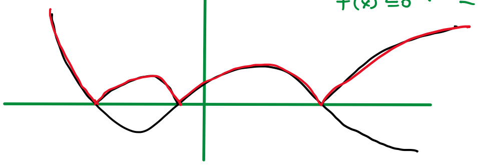
$\iff -2 \leq x \leq 2$



In generale, data $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
$D \subseteq \mathbb{R}$

possiamo cons. $|f| : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$



FUNZIONI POTENZA :

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$= \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

se n è pari $\boxed{f(-x) = f(x) \quad \text{FUNZIONE PARI}}$

se n è dispari $\boxed{f(-x) = -f(x) \quad \text{FUNZIONE DISPARI}}$

$n=3$

x^3 ; $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -x^3$

Possiamo cons.

x^k con $k \in \mathbb{Z}$

così definita : se $k \geq 0$, $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ volte}}$: $x^k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$k < 0$

$k = -3$: $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$: $x^k = \frac{1}{x^{-k}}$: $\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\{r \in \mathbb{R} : r \neq 0\}} \longrightarrow \mathbb{R}$

Generalizz. ancora

$x^{p/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$: $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

$q > 0$

$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

$x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

$x^{-3/4} = \sqrt[4]{x^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$

Se cons. $x > 0$: $D = \{r : r > 0\} = (0, +\infty)$
int. aperto

su D è definita la potenza $x^{p/q}$ $\forall\, p/q \in \mathbb{Q}$

È possibile dimostrare che si può definire

$$\boxed{x^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{per} \quad x > 0}$$

in modo che valgano tutte le proprietà delle potenze:

$$\boxed{\begin{array}{l} x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{(\alpha+\beta)} \\ (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\cdot\beta} \end{array}}$$

Su $(0, +\infty)$ sono tutte iniettive

$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$

$f^{-1}(y) = y^{1/\alpha}$, $x^{\alpha} = y$

$x = y^{1/\alpha}$

FUNZIONI POLINOMIALI

$f_0 = x^0 = 1$, $f_1 = x$, $f_2 = x^2$, $f_3 = x^3$, $\dots$, $f_n = x^n$

posso cons.

$$a_0 \cdot f_0 + a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \dots + a_n f_n = f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a_0 \in \mathbb{R}$ $a_1 \in \mathbb{R}$

$$= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

FUNZ. POLIN.

di grado n se $a_n \neq 0$

FUNZ. RAZIONALI

Siano f e g due funz. polinomiali

e cons. $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{r : g(r) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{f}{g} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

FUNZIONE ESPONENZIALE

Faccio variare l'esponente e cons.

a^x con $\boxed{a > 0}$

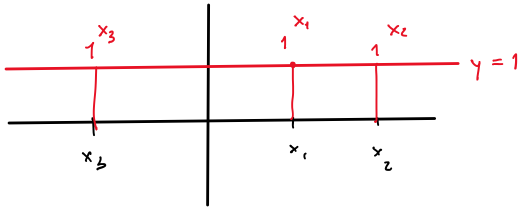
$x \in \mathbb{R}$

$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i suoi valori sono > 0

Proprietà : $a = 1$: $1^x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

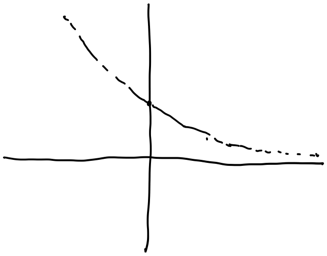
$\Rightarrow$ se $a = 1$, $f(x) = a^x$ è la funzione COSTANTE $f(x) = 1$



Se $0 < a < 1$ è iniettiva e STRETT. DECRESCENTE

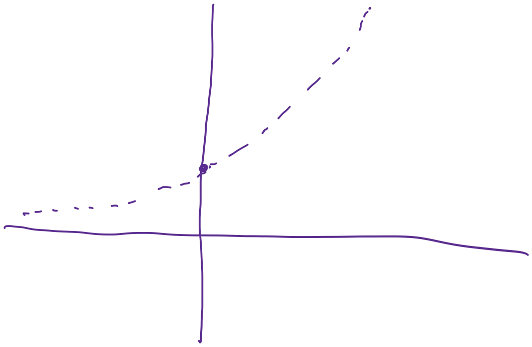
$a = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$: $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$



Se $a > 1$: a^x è INIETTIVA e STRETT. CRESCENTE

$a = 3$: 3^x : $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$



Proprietà $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{(x_1 + x_2)}$

$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$