



# Alcuni punti delicati rispetto alla risoluzione dei sistemi lineari

⊗: Quasi che i sistemi lineari ammettono

NESSUNA SOLUZIONE, UN'UNICA SOLUZIONE, INFINITE SOLUZIONI ?

$\dots \mathbb{R}^{-4}, \mathbb{R}^{-3}, \mathbb{R}^{-2}, \mathbb{R}^{-1},$

QUESTI SPAZI NON ESISTONO E  
LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI  
 $S = \emptyset$  È SEMPLICEMENTE  
L'INSIEME VUOTO

CORRISPONDE  
ALLO SPAZIO  
DI SOLUZIONI  $S$ :

$\mathbb{R}^0$

QUANDO LO SPAZIO  
DELLE SOLUZIONI  
 $S$  È UN SOLO PUNTO

$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI  
 $S$  È UNO DIMENSIONALE, DUE  
DIM., TRE DIM., ...

Intuitivamente dello spazio delle soluzioni  $S$  possiamo dire:

QUESTA È LA COSA PIÙ  
IMPORTANTE DA CAPIRE  
E DIPENDE DA QUANTO  
RIDONDANTI SONO FRA  
LORO LE EQUAZIONI,  
E QUANTO COMPATIBILI

$$S = \mathbb{R}^{\overbrace{\# \text{VARIABILI}}^m - \overbrace{\# \text{EQUAZIONI}}^n + \text{CORREZIONE}}$$

PRINCIPIO GENERALE [che vale genericamente, cioè spesso ma non sempre]

- Se aggiungiamo una **VARIABILE**, questa si può muovere su tutto  $K = \mathbb{R}$ , guadagniamo quindi un **GRADO di LIBERTÀ**, quindi dovremmo avere una **DIMENSIONE** in più in  $S$
- Se aggiungiamo una **EQUAZIONE**, questa dà una **RESTRIZIONE**, un **VINCOLO AGGIUNTIVO** su come le variabili si rapportano tra loro, quindi ci aspettiamo una **DIMENSIONE** in meno per  $S$

# In che senso non vale sempre?

PARTE di un  
SISTEMA LINEARE  
e AGGIUNGO una  
EQUAZIONE i cui  
coefficienti sono  
**GENERATI RANDOM:**

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n \\ \textcolor{blue}{a_{n+1,1}x_1 + \dots + a_{n+1,m}x_m = b_{n+1}} \end{cases}$$

ABBIAMO  
AGGIUNTO  
QUESTA  
EQUAZIONE

ALLORA LO SPAZIO  
delle SOLUZIONI **S**  
PERDE una dimensione

$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1,j} \text{ con } j=1, \dots, m \text{ e } b_{n+1} \\ \text{vengono generati casualmente da un computer} \end{array} \right.$

**QUASI SEMPRE.** In particolare a meno di cadere in uno di questi casi:

Per esempio:

1) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \textcolor{blue}{x_1 + x_2 + x_3 = 2} \end{cases}$$

**DIVENTA IMPOSSIBILE!**

$S = \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow S = \emptyset$

PRIMA di AGGIUNGERE  
l'EQUAZIONE

DOPO

VEDREMO  
PRECISAMENTE  
NELL'UNITA'S  
CHE COSA  
VUOL DIRE  
MATEMATICAMENTE

2) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ \textcolor{blue}{x_1 + x_2 + x_3 = 5} \end{cases}$$

NESSUNA NUOVA INFORMAZIONE

$S = \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow S = \mathbb{R}^2$

Quando invece aggiungere parametri nella  
soluzione?  
E quanti parametri vanno aggiunti?

Esempio:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$



$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

ASPETTATIVA:  $S \cong \mathbb{R}^{\# \text{INCOGNITE} - \# \text{EQUAZIONI} + \text{CORREZIONE}}$   
OSSERVIAMO:  $R_3 = 2R_2 - R_1$ ,  $R_4 = R_2 + R_3 - R_1$   
QUINDI SEMBRA CHE  $R_3, R_4$  SIANO RIDONDANTI!  
ALLORA CI ASPETTIAMO  $S = \mathbb{R}^{4-2} = \mathbb{R}^2$

1 NOSTRI  
DUE PIVOT } RIDUZIONE  
IN FORMA  
SCALA

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$



$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

QUANTI E QUALI  $x_i$  DEVO CONSIDERARLI  
PARAMETRI? QUELLI CHE MI SERVONO PER  
AVERE UNA MATRICE QUADRATA TRIANGOLARE  
SUPERIORE!

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_4 = s \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{NUMERI FISSATI}$$

QUESTI ora sono NUMERI non più VARIABILI

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3t - 4s \\ x_2 = -2t - 3s \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3t-4s \\ 0 & 1 & -2t-3s \end{array} \right)$$

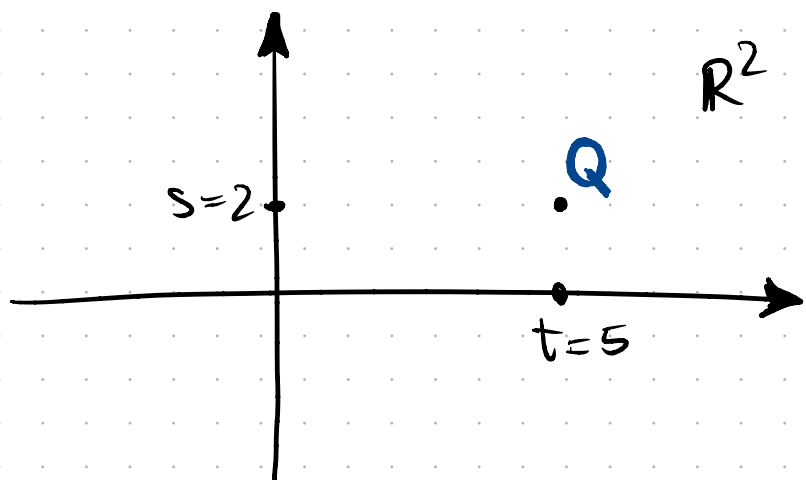
QUADRATA TRIANGOLARE SUPERIORE

$$x_1 = -3t - 4s - 2(-2t - 3s) = t + 2s$$

TANTI QUANTI I PARAMETRI LIBERI

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{t, s} \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^2$$

PROPRIO COME AVEVAMO IMMAGINATO!



Q  $\longleftrightarrow$  CORRISP.  $\begin{pmatrix} 9 \\ -16 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  CHE È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE:

INFATTI:  $\begin{cases} -16 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 0 \\ 9 + 2(-16) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 0 \\ 2 \cdot 9 + 3(-16) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 0 \\ 3 \cdot 9 + 4(-16) + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 0 \end{cases}$



# Il metodo di Gauss

**DEF** Sull'insieme di tutti i sistemi lineari di  $n$  EQUAZIONI con  $m$  INCOGNITE a coefficienti nel campo  $K$ , consideriamo la RELAZIONE  $\sim$  DEFINITA come "AVERE LO STESSO SPAZIO delle SOLUZIONI". Questa definisce una RELAZIONE di EQUIVALENZA tra i sistemi lineari.

Cioè: RIFLESSIVITÀ, SIMMETRIA, TRANSITIVITÀ valgono.

Dentro a ciascuna CLASSE di EQUIVALENZA modulo  $\sim$ , cerchiamo un rappresentante di questa classe che sia un sistema lineare la cui matrice associata sia una matrice IN FORMA SCALA.

**TEOREMA [GAUSS]** Siano fissati un campo  $K$ , ed  $n, m \in \mathbb{N}$  come sopra.

**TESI** Ogni classe modulo  $\sim$  ha un rappresentante **IN FORMA SCALA** che può essere ottenuto da ogni altro rappresentante della stessa classe tramite **OPERAZIONI ELEMENTARI**

**DIMOSTRAZIONE:** Consideriamo un sistema lineare con matrice:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

### STEP I

L'obiettivo è di portare questa matrice in forma scale tramite operazioni elementari. Se  $A = (a_{ij})$  è la matrice nulla, abbiamo già finito. Altrimenti sia  $A^{(j)}$  la prima colonna non nulla da sinistra. Se  $a_{1j} = 0$ , allora si usa l'operazione dello scambio delle righe **OE3** per scambiare di posto la prima e la  $i$ -esima riga dove  $A_{(i)}$  è una qualsiasi riga tale che  $a_{ij} \neq 0$  [esiste altrimenti  $A^{(j)}$  sarebbe una colonna nulla].

Alla fine dello STEP I la matrice associata è stata portata in questa forma

$a_{i,j}^{(1)}$  VUOL DIRE IL COEFFICIENTE DOPO LO STEP I

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,j}^I & \dots & a_{1,m}^I & | & b_1^I \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,j}^I & \dots & a_{n,m}^I & | & b_n^I \end{pmatrix}$$

NON È ZERO, LO VOGLIAMO COME PRIMO PIVOT  
QUINDI VOGLIAMO TUTTI ZERI SOTTO AL PIVOT

⚠ È LEcito DIVIDERE PER  $a_{1,j}^I$  SOLO PERCHÉ CI SIAMO ASSICURATI CHE SIA NON NULLO

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 \mapsto R_2 - \frac{a_{2,j}^I}{a_{1,j}^I} \cdot R_1 \leftarrow \text{PRODUCE UNO ZERO AL POSTO } (2,j) \\ R_3 \mapsto R_3 - \frac{a_{3,j}^I}{a_{1,j}^I} \cdot R_1 \leftarrow \text{PRODUCE UNO ZERO AL POSTO } (3,j) \\ R_4 \mapsto R_4 - \frac{a_{4,j}^I}{a_{1,j}^I} \cdot R_1 \leftarrow \text{PRODUCE UNO ZERO AL POSTO } (4,j) \\ \vdots \end{array} \right.$$

Alla fine di STEP II:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,j}^{II} & \dots & a_{1,m}^{II} & | & b_1^{II} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ora ripetiamo gli stessi identici steps a questa sottomatrice.

Prima controlliamo quante colonne nulle ci sono, poi controlliamo che la prima colonna non-nulla abbia un elemento non nullo al primo posto, e se non è così scambiamo la riga in alto con un'altra riga il cui primo elemento sia non nullo, quell'elemento diventa IL **NUOVO PIVOT**, quindi vogliamo soltanto zero sotto quell'elemento, quindi applichiamo le trasformazioni elementari che producono quegli zero, e poi ripetiamo ancora il processo con una sottomatrice ancora più piccola.

È chiaro che il processo termina **DOPO UN NUMERO FINITO DI STEPS**, in particolare quando la sottomatrice del prossimo step è la **MATRICE NULLA** oppure quando è **DEGENERE** (nel senso che il numero di righe oppure di colonne è uguale a zero). La matrice risultante da questo processo è **A SCALA** e produce un sistema lineare **SIMILE** SIMBOLA DI FINE DIMOSTRAZIONE **MODULO LA RELAZIONE  $\sim$**  PERCHÉ SONO STATE USATE SOLO OPERAZIONI ELEMENTARI. Questa conclude la dimostrazione del Teorema 9. 