

TEOREMA di STRUTTURA per SISTEMI LINEARI

Si scelgano in campo K , un numero di incognite m ed un numero di equazioni n .

- i). Per un sistema lineare **OMOGENEO** (i.e. $b=0$), l'insieme delle soluzioni è un K -**SPAZIO VETTORIALE** contenuto in K^m
- ii). Per ogni scelta di una soluzione $\tilde{s}$ di $A \cdot x = b$ (i.e. $A \cdot \tilde{s} = b$) **OGNI ALTRA SOLUZIONE** s di $Ax=b$ si può scrivere come:

$$s = \tilde{s} + s_0$$

per una certa soluzione
del sistema **OMOGENEO** associato
ovvero $A \cdot s_0 = 0$.

DIMOSTRAZIONE: i). Sia $S := \{s \in K^m \mid A \cdot s = 0\}$ l'insieme delle soluzioni.

- 1) La somma di due soluzioni è ancora una soluzione dello stesso sistema? **SI ✓**: $A \cdot (s_1 + s_2) = \underbrace{A s_1}_{=0} + \underbrace{A s_2}_{=0} = 0$.
S PROMOSSO A MAGMA $= 0$
- 2) Vale la associatività? **✓** S PROMOSSO A SEMIGRUPPO
- 3) Esiste il neutro? **✓** $s = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa $A s = 0$. S PROMOSSO A MONOIDE
- 4) Esiste l'opposto? **✓** $A \cdot (-s) = -(\underbrace{A s}_{=0}) = -0 = 0$ PROMOSSO A GRUPPO
- 5) La somma commuta? **✓** PROMOSSO A GRUPPO ABELIANO!

Rispetto alla moltiplicazione per scalari di K :

$$6) \lambda \cdot (s_1 + s_2) \stackrel{?}{=} \lambda s_1 + \lambda s_2 \quad \checkmark$$

$$7) (\lambda + \mu) \cdot s \stackrel{?}{=} \lambda \cdot s + \mu \cdot s \quad \checkmark$$

$$8) \lambda \cdot (\mu \cdot s) \stackrel{?}{=} (\lambda \cdot \mu) \cdot s \quad \checkmark$$

$$9) \underset{K}{1} \cdot s \stackrel{?}{=} s \quad \checkmark$$

$$\forall \lambda, \mu \in K \\ \forall s_1, s_2, s \in S$$

S è chiuso perché:

$$A \cdot (\lambda \cdot s) = \lambda \cdot (\underbrace{A \cdot s}_{=0}) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

RIGA PER COLONNA

PRODOTTI PER SCALARI

Questo conclude la dimostrazione del punto i).

⊗: Se le soluzioni di un sistema lineare **OMogeneo** $A \cdot x = 0$ sono spazio vettoriale, lo sono anche quelle di un sistema non omogeneo $A \cdot x = b$?

R: No! Perché se $b \neq 0$, allora $S=0$ non è più soluzione, quindi l'insieme delle soluzioni perde subito il **NEUTRO** rispetto alla somma di vettori! Non è nemmeno più un **MONOIDE**.

Q: Ma c'è comunque la speranza che sia qualcosa di buono anche se non è uno spazio vettoriale?

R: Sì! Il prossimo punto del teorema ci dice che lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare **NON OMogeneo** è "UNA TRASLAZIONE DI QUELLO OMogeneo VIA DALL' ORIGINE"

che è lo stesso spazio, traslato di un vettore. Questi spazi si chiamano **SPAZI AFFINI** e li studieremo nell'Unità 7.

ii). Sia s una soluzione del sistema non omogeneo, i.e. $A \cdot s = b$.
Scriviamo:

$$s = \tilde{s} + \underbrace{(s - \tilde{s})}_{\substack{\text{LO DEFINIAMO } s_0 \\ \text{RIMANE SOLO DA VERIFICARE CHE } s - \tilde{s} \\ \text{È SOLUZIONE DEL SISTEMA OMogeneo} \\ A \cdot x = 0}}$$

Allora calcoliamo:

$$A(s - \tilde{s}) = \underbrace{A \cdot s}_{=b} - \underbrace{A \cdot \tilde{s}}_{=b} = b - b = 0 \quad \checkmark$$

Vediamo il viceversa: è vero che ogni soluzione della forma $\tilde{s} + s_0$ con $\tilde{s}$ soluzione del non omogeneo ed s_0 soluzione dell'omogeneo è ancora una soluzione del non omogeneo?

Allora calcoliamo:

$$A(\tilde{s} + s_0) = \underbrace{A \cdot \tilde{s}}_{=b} + \underbrace{A \cdot s_0}_{=0} = b - 0 = b \quad \checkmark$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema

□