



Prof. M. Riva\*, Prof. A. Guadagnini\*, Prof. V. Armenio\*\*



\*Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133 Milano- Italy

\*\* Università di Trieste, Piazzale Europa 1, 34127 Trieste

# CINEMATICA

- ⇒ Descrizione Lagrangiana ed Euleriana
- ⇒ Velocità e accelerazione
- ⇒ Elementi di visualizzazione di un campo di moto
- ⇒ Moto relativo : velocità di deformazione e di rotazione
- ⇒ Teorema del trasporto di Reynolds

**N.B.: Questo indice NON è esaustivo e NON sostituisce il libro di testo**

**Alcune immagini sono prese dal libro di testo (Meccanica dei Fluidi, Y.A.Cengcek e J.M. Cimbala, Ed. It G. Cozzo e C. Santoro) per scopi didattici**

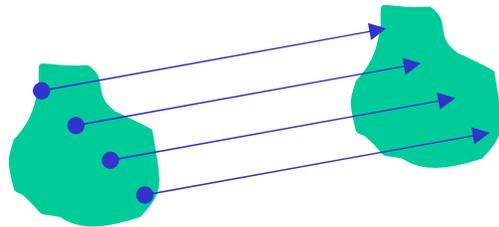
La Cinematica dei Fluidi studia il moto dei fluidi senza considerare le forze e i momenti che danno origine al moto.

### Descrizione Lagrangiana

(matematico italiano Joseph Louis Lagrange 1736-1813).

*il movimento del fluido è descritto seguendo la storia di ogni singola particella di fluido e descrivendone le caratteristiche in funzione dei suoi spostamenti e del tempo.*

sistema materiale



derivata temporale sostanziale  $\frac{d}{dt}$   
(derivata totale)

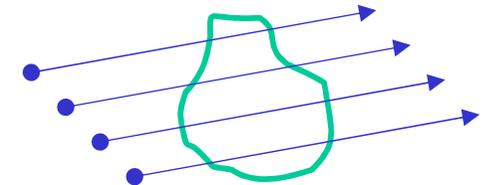
formulazione classica delle leggi fisiche

In questa trattazione l'elemento in moto è un elemento continuo di fluido dotato di una massa propria invariante e proprietà intrinseche (densità, temperatura etc...)

### Descrizione Euleriana

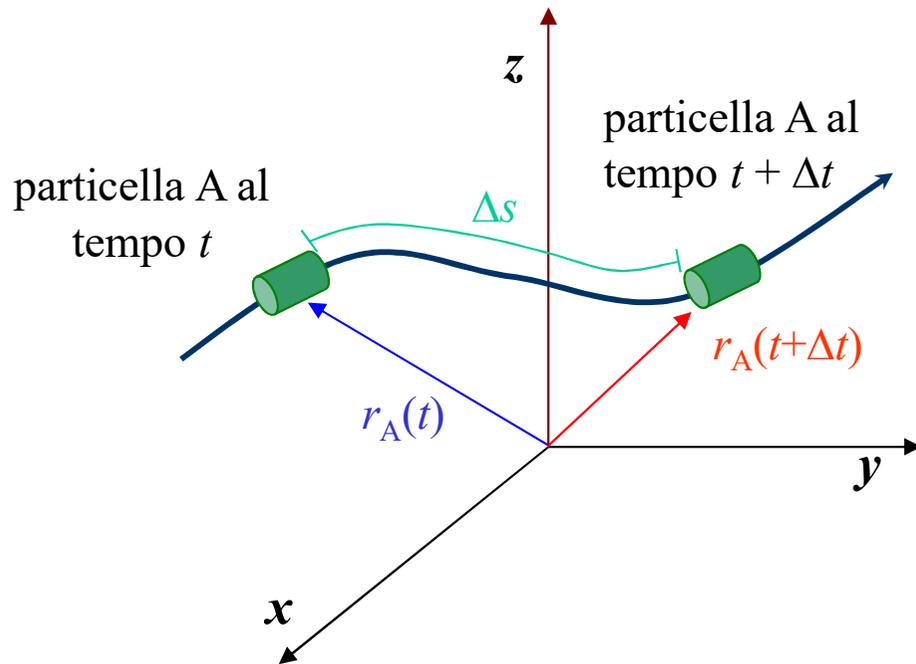
*il movimento del fluido è studiato descrivendone le caratteristiche come funzione dello spazio e del tempo. Le grandezze vengono osservate in punti fissi nello spazio, al variare del tempo.*

volume di controllo



derivata temporale locale  $\frac{\partial}{\partial t}$   
(derivata parziale)

formulazione delle leggi fisiche come bilancio di assegnate quantità che agiscono sul volume di fluido



$$\bar{V} = \frac{d \bar{r}}{dt}$$

$$\langle \bar{v} \rangle = \langle \bar{v} \rangle (\mathbf{x}_0, t)$$

Velocità Lagrangiana : *grandezza vettoriale*

Il vettore posizione  $\mathbf{r}$  è funzione della posizione iniziale  $\mathbf{x}_0$  e del tempo  $t$

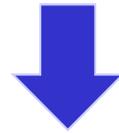
- modulo  $V = \Delta s / \Delta t$  [m/s]
- direzione
- verso

Protagonista è la particella di fluido che viene seguita durante la propria evoluzione spazio temporale. In questo approccio si segue la particella elementare di massa  $\delta M$  che non varia

# Variazioni temporali di grandezze associate all'elemento Lagrangiano di massa $\delta M$

Consideriamo, per esempio, la temperatura di un elemento fluido di massa  $\delta M$  e scriviamo la serie di Taylor della temperatura in un punto  $x$  raggiunto al tempo  $t$ , a partire dalla posizione  $x_0$  che aveva al tempo  $t_0$

$$T = T_0 + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0 (x - x_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 (y - y_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_0 (z - z_0) + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_0 (t - t_0)$$



$$\frac{T - T_0}{(t - t_0)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0 \frac{(x - x_0)}{(t - t_0)} + \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \frac{(y - y_0)}{(t - t_0)} + \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_0 \frac{(z - z_0)}{(t - t_0)} + \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_0$$

Abbiamo determinato la variazione di temperatura della particella di massa  $\delta M$  nell'intervallo  $\Delta t$ , nel quale la particella ha percorso uno spazio  $\overrightarrow{\Delta x}$

Da notare che i rapporti incrementali a secondo membro rappresentano le componenti della velocità della particella di massa  $\delta M$

$$\begin{aligned} \frac{DT}{Dt} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{T - T_0}{(t - t_0)} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y + \frac{\partial T}{\partial z} v_z = \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{aligned}$$

La variazione di una grandezza fisica di una particella di massa  $\delta M$  durante la propria evoluzione spazio-temporale può essere considerata come la somma di due contributi:

- Variazione locale della grandezza
- Variazione della grandezza associata alla non uniformità spaziale e alla velocità di trasporto della grandezza stessa

La somma di questi due contributi viene denominata:

**Derivata Sostanziale o Materiale**

## Approccio Euleriano o del volume di controllo

Protagonisti sono i punti dello spazio all'interno del volume e su tali punti registriamo i valori delle grandezze di interesse (densità, temperatura pressione, velocità etc..)

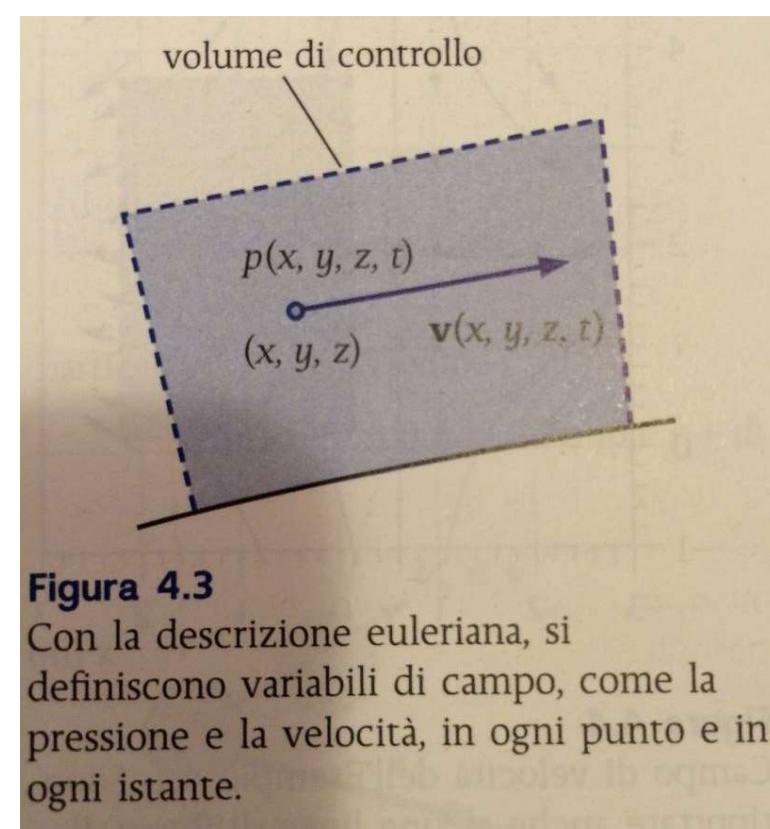
Si introduce il concetto di **campo**, cioè una distribuzione spaziale delle variabili del sistema

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

$$V = V(x, y, z, t)$$

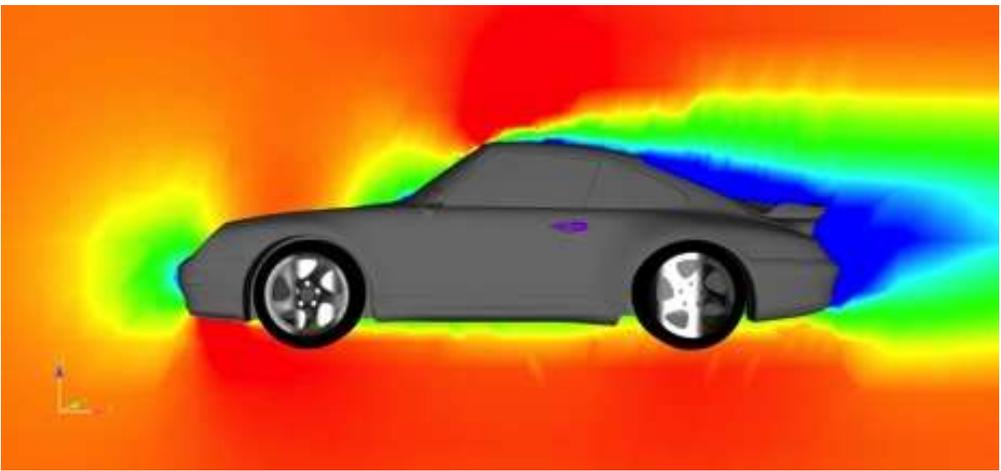
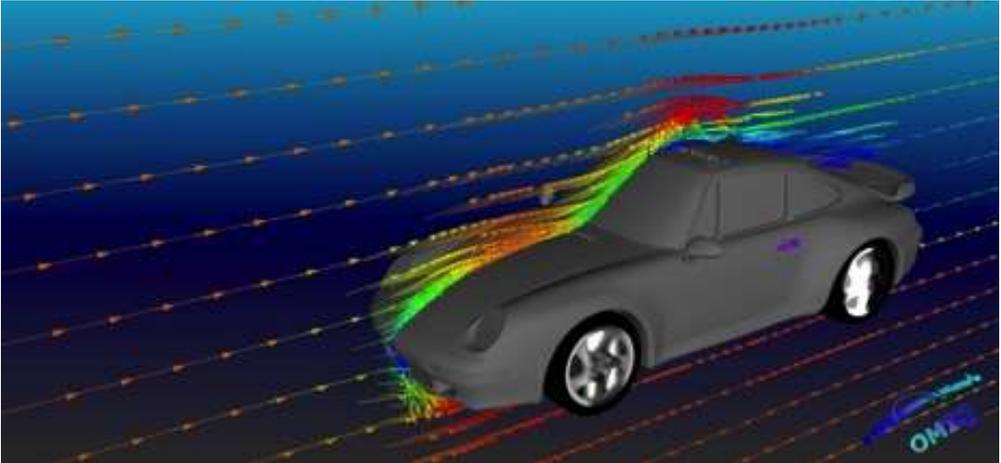
Nota: da un punto del volume di coordinate (x,y,z) passano infinite particelle lagrangiane di fluido!



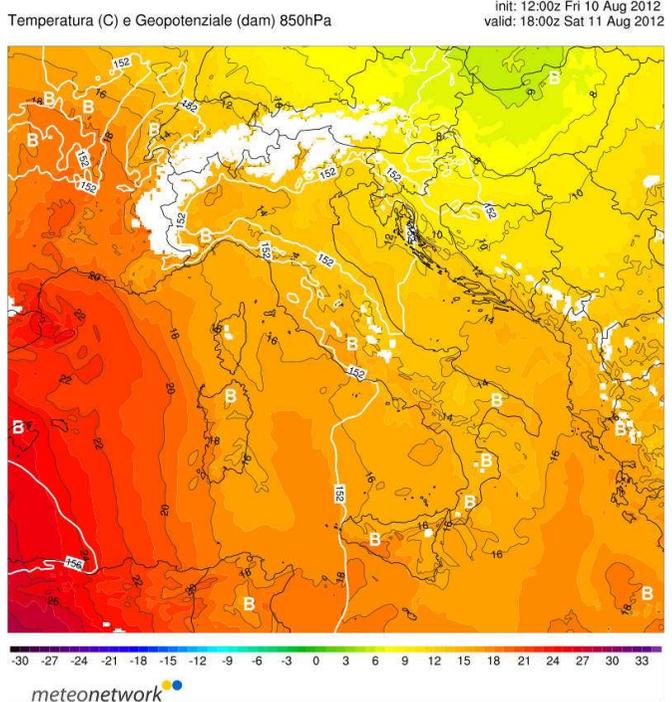
In questo approccio le variazioni  
Temporali di una grandezza sono:

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

*Campo di velocità e di pressione su un'automobile:  
é visualizzata la distribuzione sul piano di simmetria.  
Il volume di controllo è il volume di aria circostante  
e la superficie dell'automobile rappresenta una parte  
della superficie di contorno del volume*



*Campo di temperatura sull'Italia in  
una giornata estiva*



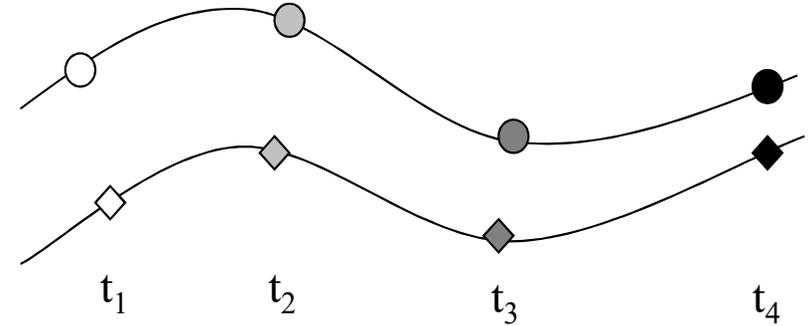
*Campo di temperatura su un edificio*



# Elementi caratteristici del moto

## Traiettorie (Approccio Lagrangiano):

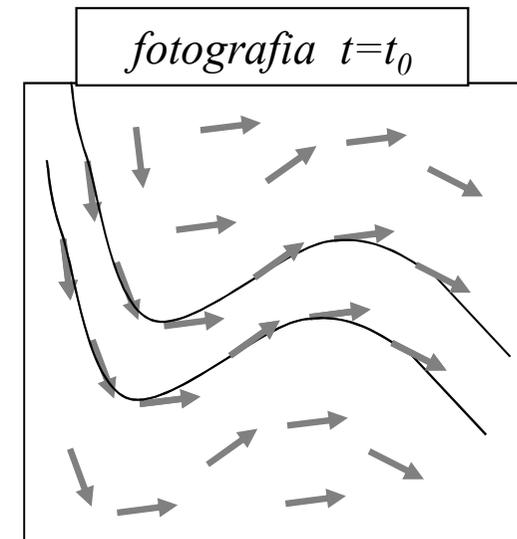
*Luogo dei punti successivamente occupati dalle singole particelle fluide in moto; descrivono la storia di ogni particella in moto. (approccio Lagrangiano)*



## Linee di corrente (Approccio Euleriano):

*noto, in un certo istante  $t=t_0$  e in ogni punto del campo, il vettore velocità, la linea di corrente è la curva che in ogni punto è tangente al vettore velocità.*

- La Particle Image Velocimetry (PIV) è una moderna tecnica sperimentale per misurare il campo di velocità di un piano nel campo di moto.



- N.B. : Nei moti stazionari, linee di corrente e traiettorie coincidono.

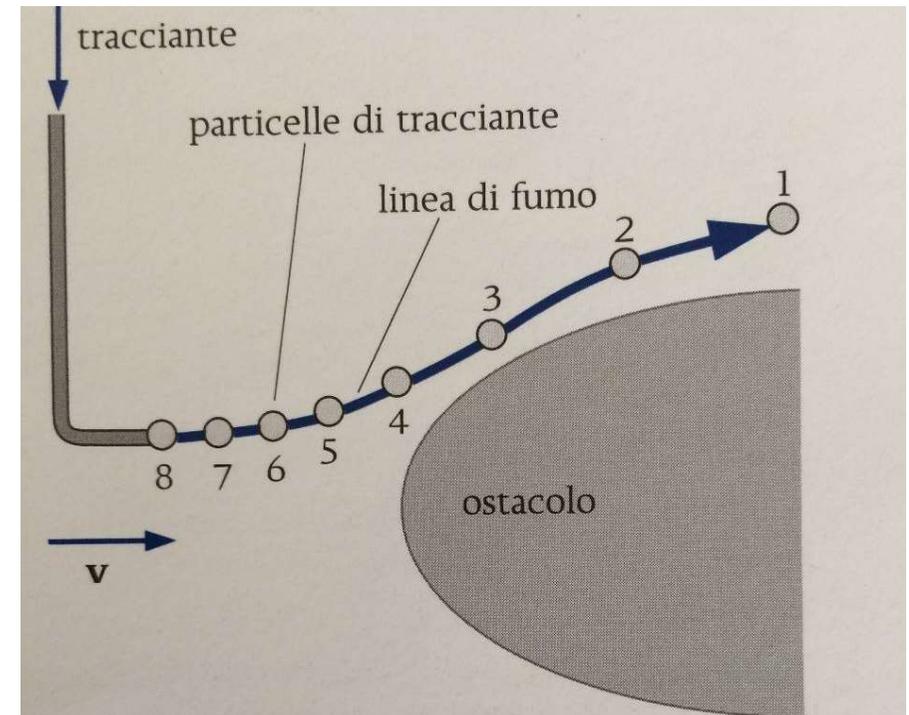
# Elementi caratteristici del moto

## Linee di fumo: (Approccio misto)

*il luogo delle particelle che sono passate in sequenza da uno stesso punto*

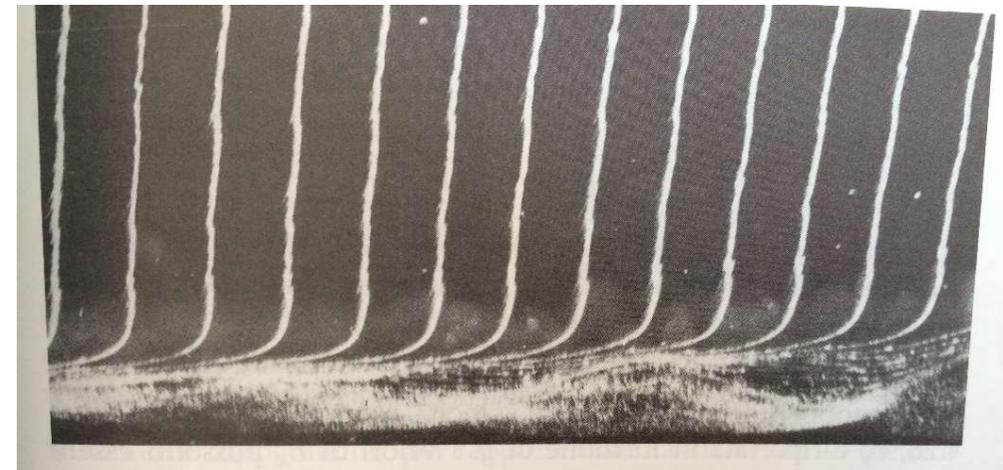
*Sono normalmente generate in un'analisi sperimentale*

*Per la visualizzazione del campo di moto*



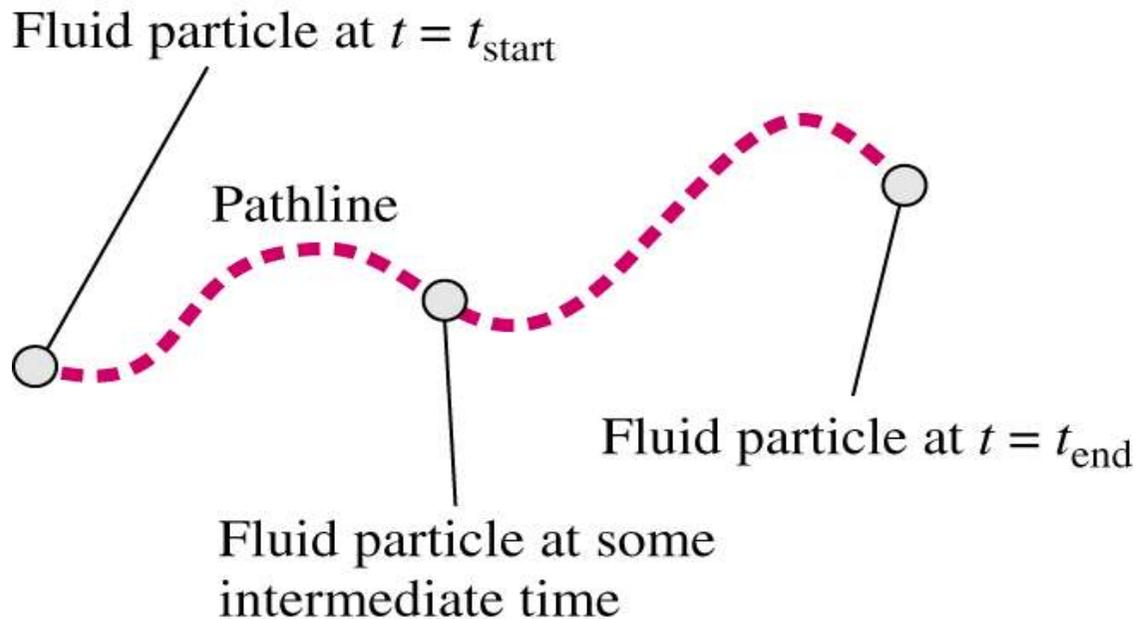
## Linee di tempo: (Approccio Lagrangiano)

Il luogo delle posizioni raggiunte in un certo istante da un insieme di particelle di fluido che precedentemente stava su una linea



- N.B. : Nei moti stazionari, linee di corrente, traiettorie e linee di fumo coincidono.

# Traiettorie



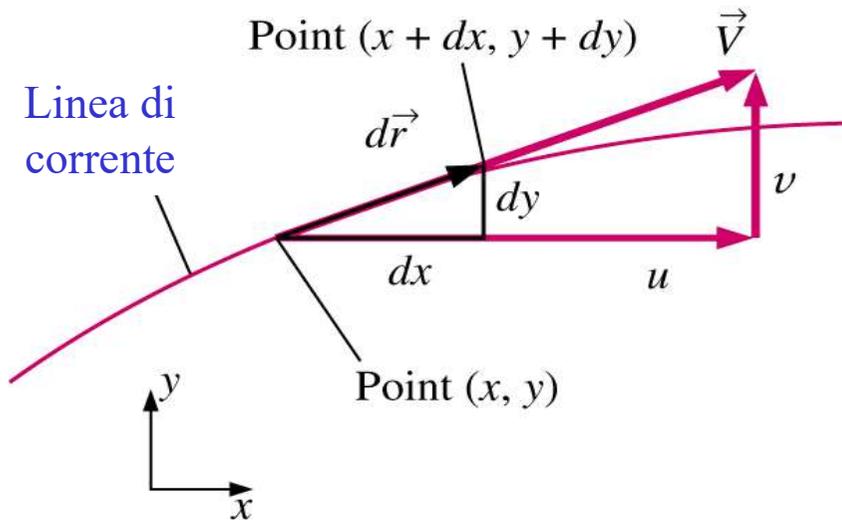
- Una **Traiettoria** è il percorso effettivo effettuato da una singola particella fluida in un certo intervallo di tempo.
- È la stessa cosa del vettore posizione materiale della particella fluida

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = (x_{\text{particle}}(t), y_{\text{particle}}(t), z_{\text{particle}}(t))$$

- Posizione della particella al tempo  $t$ :

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{\text{start}} + \int_{t_{\text{start}}}^t \bar{\mathbf{V}} dt$$

# Linee di corrente (o linee di flusso)



- Una **Linea di corrente** è una curva che è ovunque tangente al vettore velocità *istantaneo* e locale.

- Si consideri un arco di curva di lunghezza

$$d\bar{r} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}$$

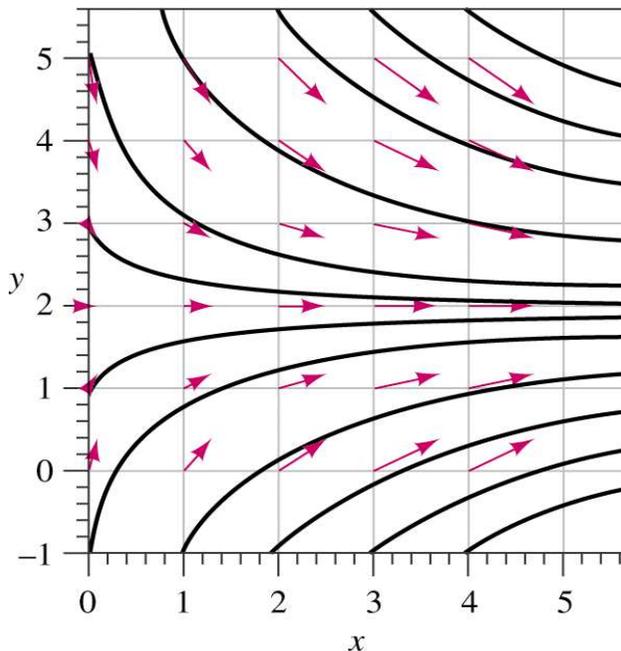
- $d\bar{r}$  deve essere parallelo al vettore velocità locale

$$\bar{V} = u \bar{i} + v \bar{j} + w \bar{k}$$

- Quindi il prodotto vettoriale tra  $d\bar{r}$  e  $\bar{V}$  deve essere nullo:

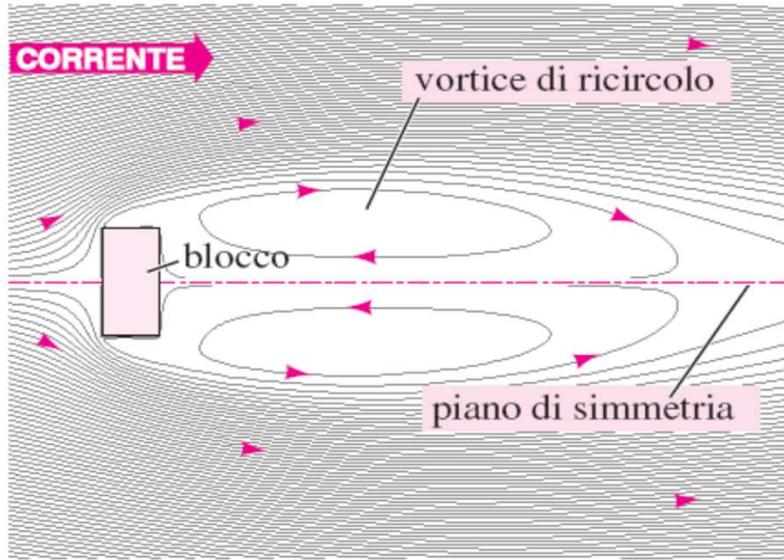
$$d\bar{r} \times \bar{V} = 0$$

$t = \text{costante}$

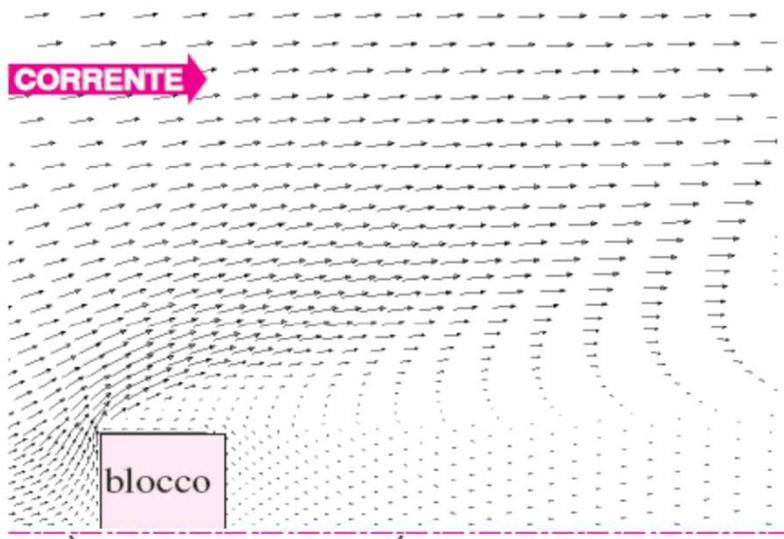


Es 2D:  $\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$       Ne segue  $\frac{dr}{V} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$

# Esempi di rappresentazioni grafiche di campi di moto



(a)



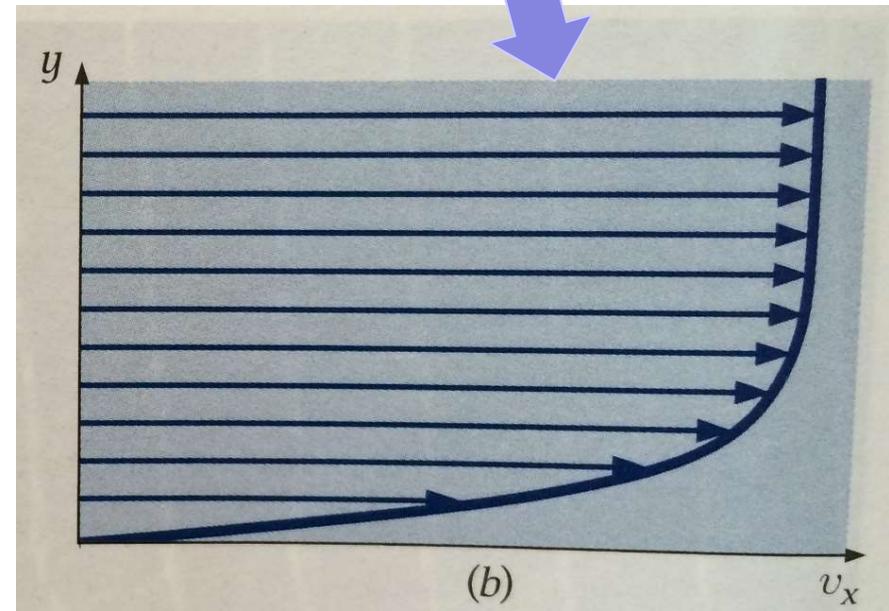
(b)

piano di simmetria

Isolinee (i.e. linee di corrente)

Mappe vettoriali

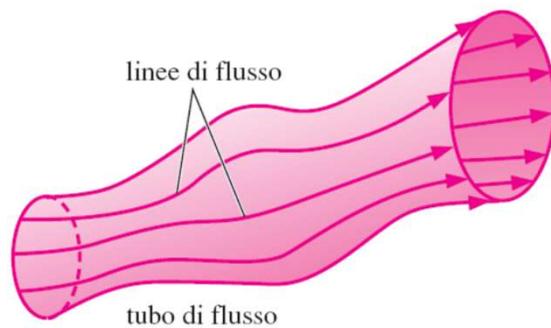
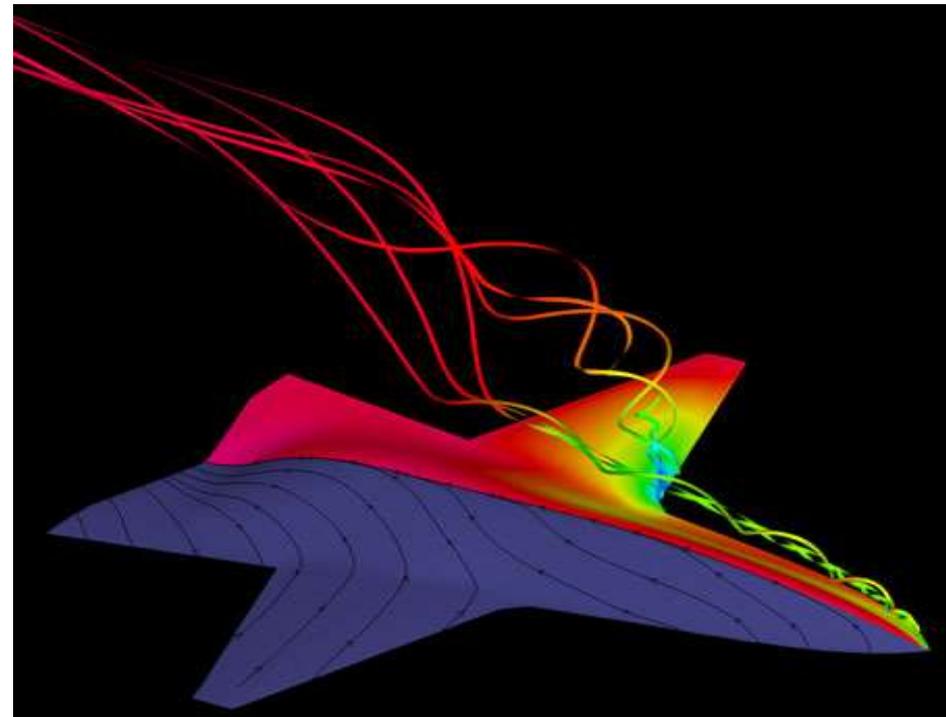
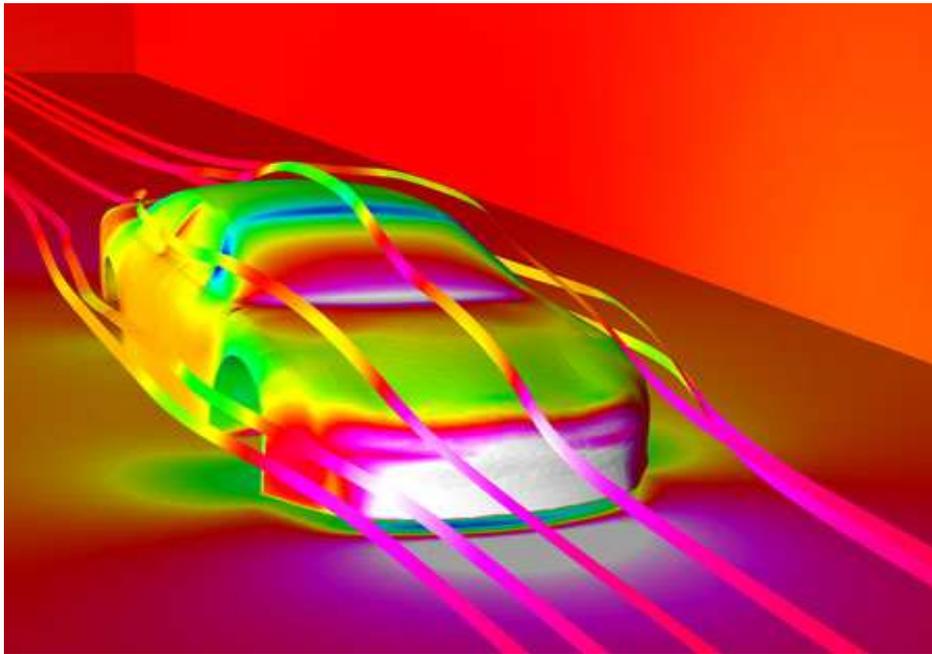
Profili di velocità



(b)

# Esempi

Isolinee della pressione superficiale e linee di corrente



## Tubo di flusso

**Figura 4.18**

Un tubo di flusso è costituito da un fascio di linee di flusso.

# Accelerazione Lagrangiana

Accelerazione : grandezza vettoriale  $\Rightarrow$

- modulo [m/s<sup>2</sup>]
- direzione
- verso

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(x(t), y(t), z(t), t)}{dt}$$

accelerazione = derivata *sostanziale* della velocità

derivata totale o sostanziale

derivata locale  $\rightarrow$  variazione di velocità nel singolo punto al variare del tempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \right)$$

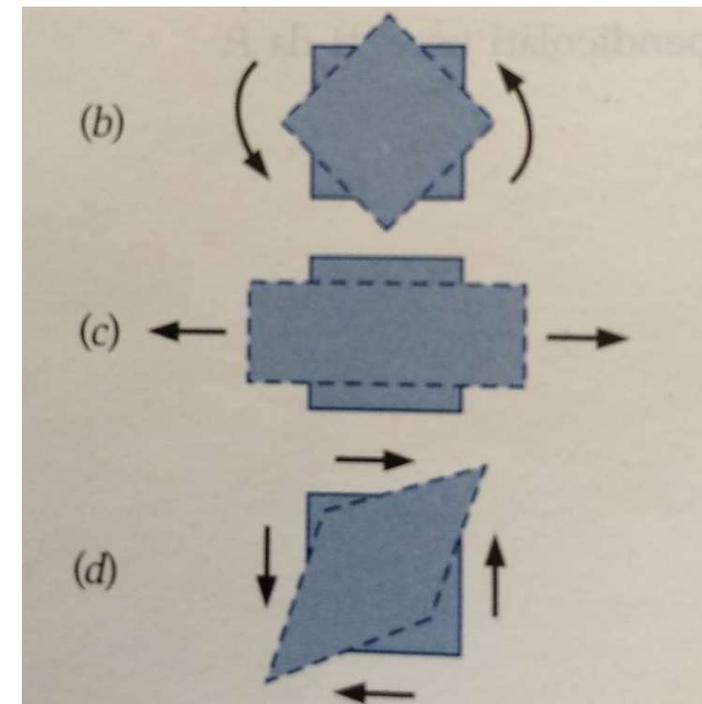
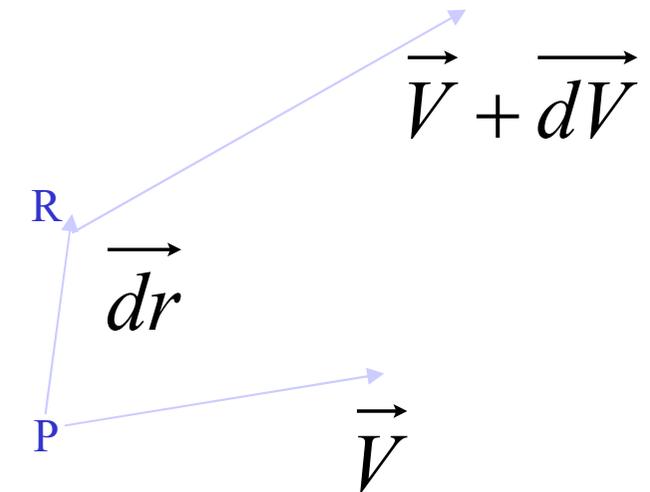
accelerazione advettiva  
(deriva dallo spostamento della particella in un campo di velocità non uniforme)

## Moto relativo tra elementi di fluido

In meccanica dei fluidi è importante il moto relativo tra due punti nello spazio.

Se ipotizziamo i due punti appartenenti ad un elemento fluido, il moto relativo tra due punti dell'elemento produce

- moto di pura traslazione che è inessenziale
- Una rotazione dell'elemento
- Una deformazione dell'elemento
  - Lineare
  - Angolare



## Velocità di rotazione

Si definisce velocità di rotazione in un punto P la velocità di rotazione di due rette inizialmente perpendicolari e passanti per quel punto:

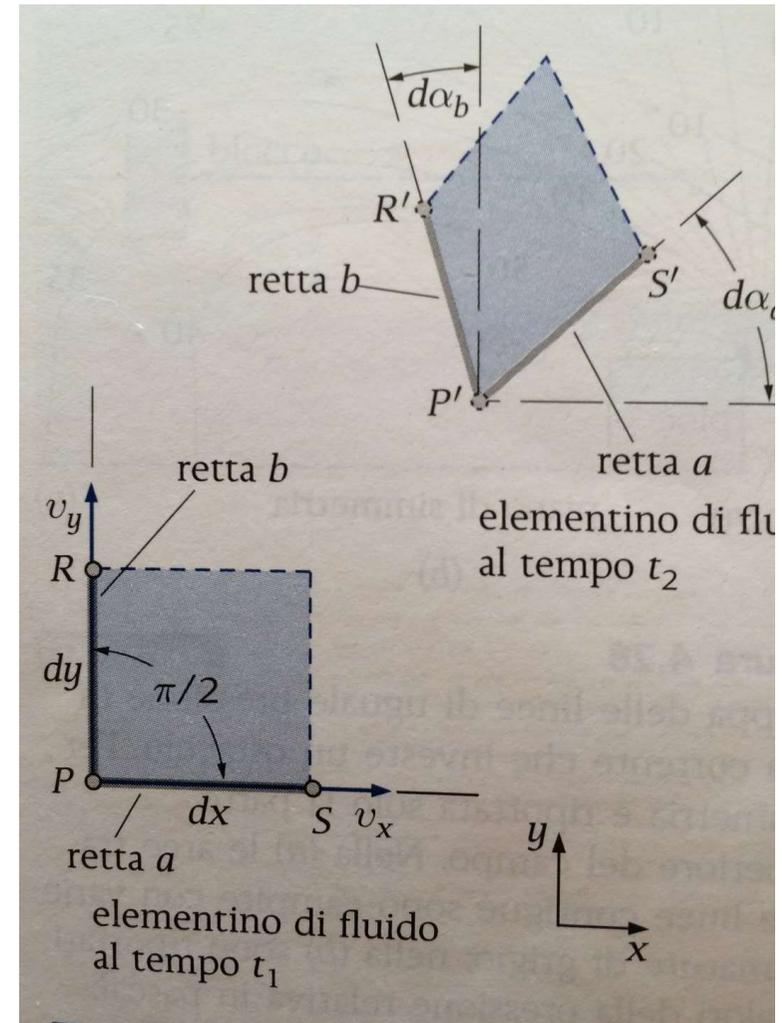
$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha_a}{dt} + \frac{d\alpha_b}{dt} \right)$$

Gli angoli possono essere espressi in funzione delle velocità nei punti P, R e S:

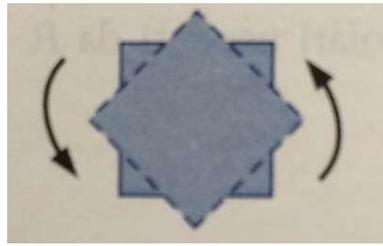
$$V(P) \equiv V_x, V_y$$

$$V(R) \equiv V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy, V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy$$

$$V(S) \equiv V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx, V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx$$

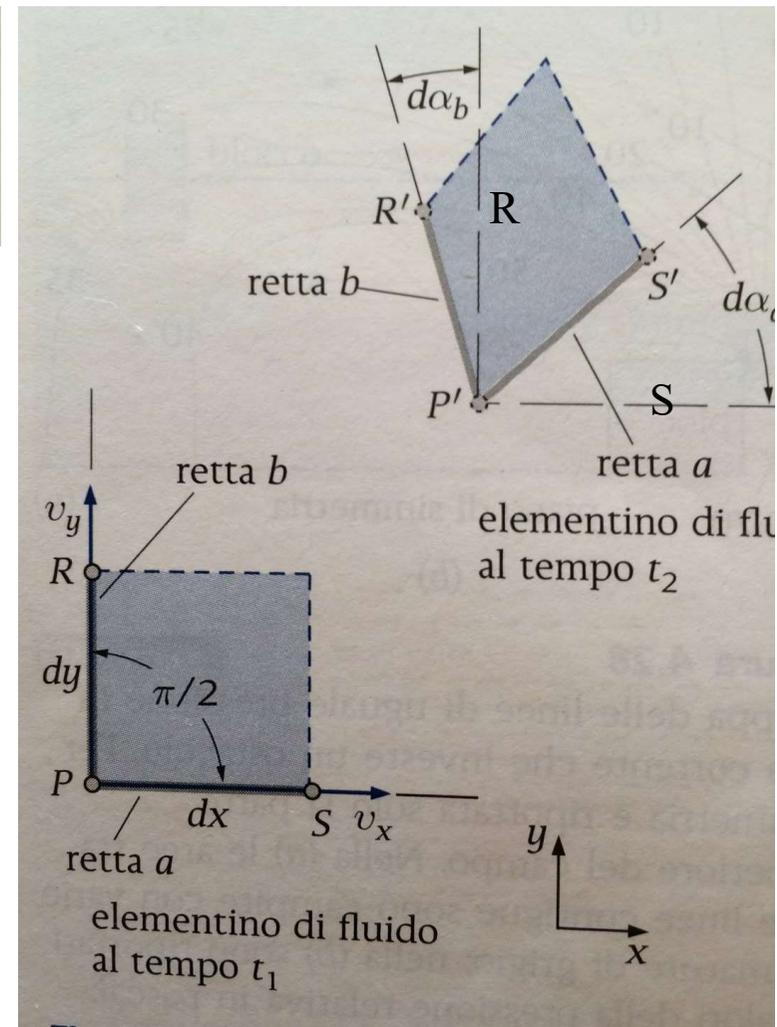


## Velocità di rotazione (2)



$$d\alpha_a = \frac{SS'}{dx} = \frac{\frac{\partial V_y}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial V_y}{\partial x} dt$$

$$d\alpha_b = \frac{RR'}{dy} = \frac{-\frac{\partial V_x}{\partial y} dy dt}{dy} = -\frac{\partial V_x}{\partial y} dt$$



Applicando la definizione di velocità di rotazione:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

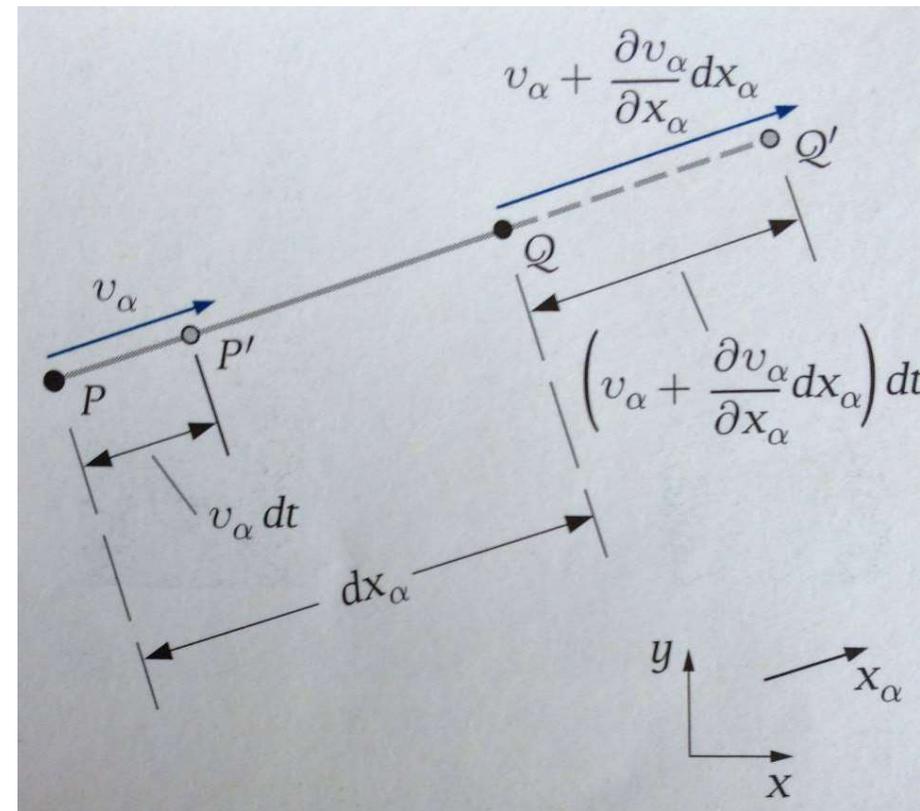
Il generico vettore nello spazio tridimensionale è

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

## Velocità di deformazione lineare

Definiamo deformazione lineare di un elemento di fluido l'allungamento rettilineo dell'elemento per lunghezza unitaria

Definiamo velocità di deformazione lineare la variazione della deformazione lineare nell'unità di tempo:

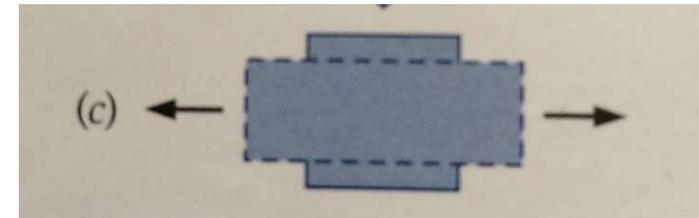


$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{P'Q' - PQ}{PQ} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{PQ' - P'P - PQ}{PQ} \right) = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z}$$



## Velocità di deformazione cubica

Definiamo deformazione cubica di un elemento di fluido la variazione di volume per volume unitario

Definiamo velocità di deformazione cubica la variazione unitaria di volume nell'unità di tempo

Si può dimostrare che:

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Divergenza positiva: espansione del fluido per comprimibilità

Divergenza negativa: compressione del fluido per comprimibilità

Divergenza nulla: campo incomprimibile



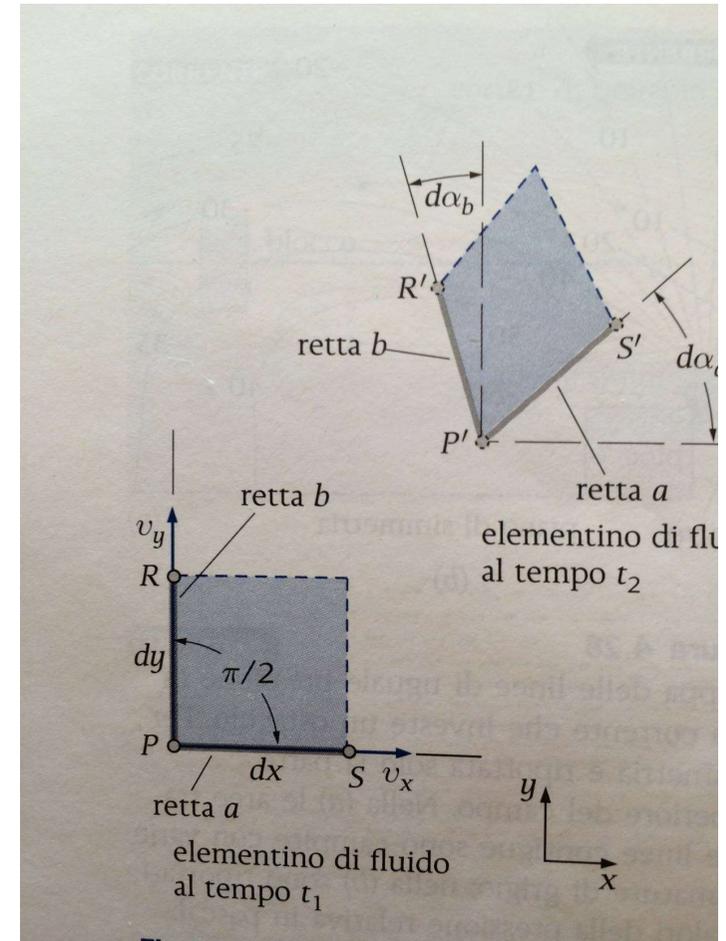
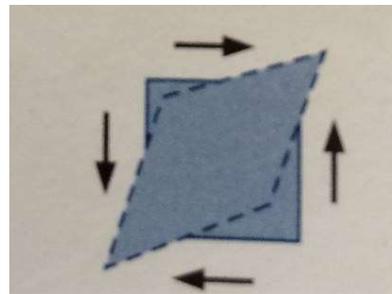
## Velocità di deformazione angolare

Definiamo velocità di deformazione angolare di un elemento di fluido in P la metà della velocità con la quale diminuisce l'angolo formato da due rette inizialmente ortogonali e passanti per il punto P

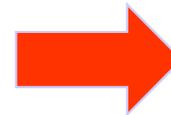
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha_a}{dt} - \frac{d\alpha_b}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)$$



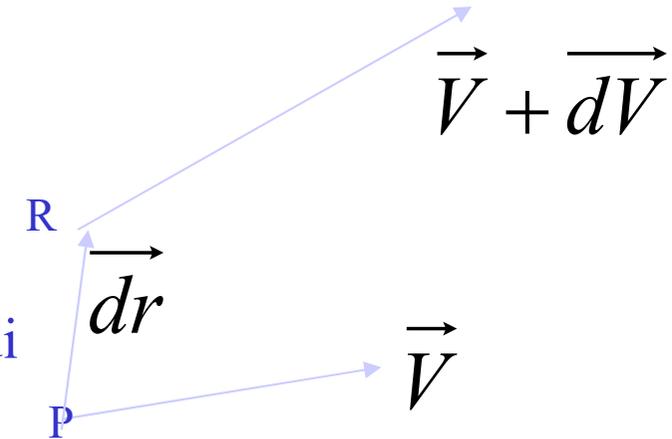
Ne segue che possiamo definire il tensore



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

## rotazione deformazione e velocità relative

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$



Gli elementi della diagonale principale rappresentano la velocità di deformazione lineare

Gli elementi fuori diagonale rappresentano le velocità di deformazione angolare

Se faccio la somma delle velocità di rotazione e deformazione:

$$\omega_{ij} + \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

La velocità relativa tra P e R sarà:

$$\vec{V}_R - \vec{V}_P = d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_j} dx_j$$

Se la esprimo per componenti:

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dx_j$$

le derivate spaziali della velocità rappresentano il moto relativo tra due elementi di fluido, scomponibile in moto di deformazione e moto di rotazione

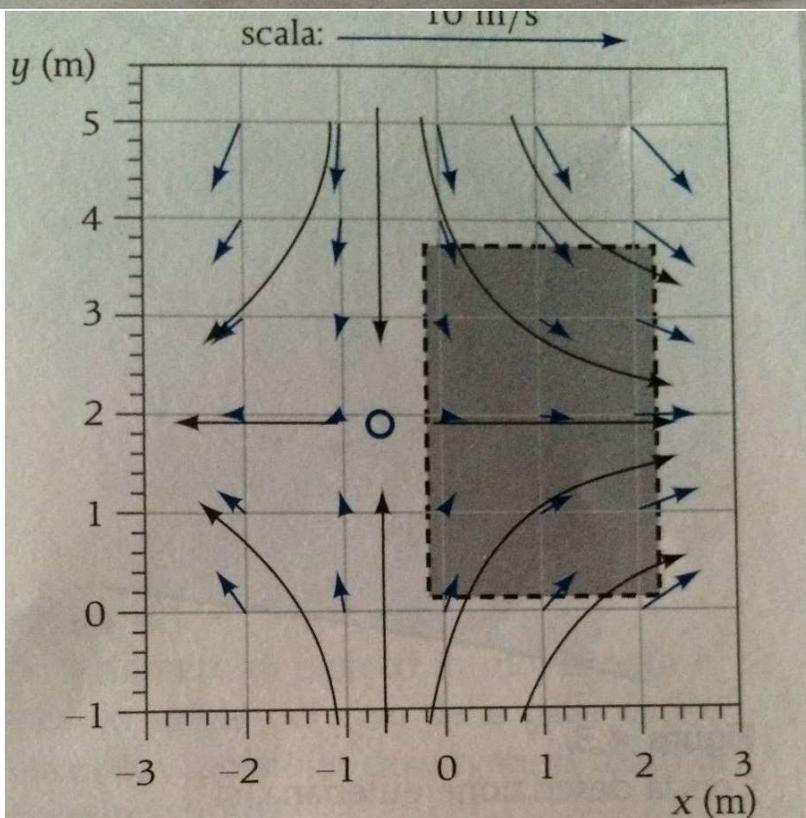
## ESEMPIO 4.1 Un campo di velocità permanente bidimensionale

Dato il campo di velocità

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 0,8x)\mathbf{i} + (1,5 - 0,8y)\mathbf{j}$$

dove le coordinate sono espresse in metri e il modulo della velocità in m/s: **(a)** determinare se esiste un **punto di ristagno**, cioè un punto in cui la velocità è identicamente nulla, e la sua posizione; **(b)** tracciare i vettori velocità in diversi punti nel dominio  $-2 \leq x \leq 2$  m e  $0 \leq y \leq 5$  m e descrivere qualitativamente il campo di moto.

**Ipotesi 1** Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. **2** Il moto è bidimensionale, cioè la componente  $v_z$  della velocità lungo  $z$  è nulla e  $v_x$  e  $v_y$  non variano con  $z$ .



|             |       |       |      |      |
|-------------|-------|-------|------|------|
| $x$ (m)     | -2    | -1    | 0    | 1    |
| $v_x$ (m/s) | -1,10 | -0,30 | 0,50 | 1,30 |

|             |      |      |       |       |       |
|-------------|------|------|-------|-------|-------|
| $y$ (m)     | 0    | 1    | 2     | 3     | 4     |
| $v_y$ (m/s) | 1,50 | 0,70 | -0,10 | -0,90 | -1,70 |

e, conseguentemente, il modulo della velocità, pari a

| $x$ | $y$  |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
|     | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| -2  | 1,86 | 1,30 | 1,10 | 1,42 | 2,02 |
| -1  | 1,53 | 0,76 | 0,32 | 0,95 | 1,73 |
| 0   | 1,58 | 0,86 | 0,51 | 1,03 | 1,77 |
| 1   | 1,98 | 1,48 | 1,30 | 1,58 | 2,14 |
| 2   | 2,58 | 2,21 | 2,10 | 2,28 | 2,70 |

I risultati, riportati in Figura 4.4, mostrano un campo in cui il fluido entra dall'alto e dal basso ed esce da destra, con un asse orizzontale di simmetria passante per il punto di ristagno, indicato in figura con un cerchietto.

Nella porzione di campo ombreggiata in figura si osserva un moto convergente, accelerato da sinistra verso destra, quello che si verifica all'imbocco di una tubazione che si collega a un serbatoio, nel caso in cui l'imbocco sia ben ristretto (Figura 4.5).

### ESEMPIO 4.4 Linee di flusso nel piano $xy$ . Una soluzione analitica

Per il campo di velocità permanente bidimensionale dell'Esempio 4.1, tracciare alcune linee di flusso nella metà destra del campo ( $x > 0$ ).

**Ipotesi** 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 Il moto è bidimensionale, cioè la componente  $v_z$  della velocità lungo  $z$  è nulla e  $v_x$  e  $v_y$  non variano con  $z$ .

**Analisi** Il campo di velocità è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 0,8x)\mathbf{i} + (1,5 - 0,8y)\mathbf{j}$$

Per la 4.15, lungo una linea di flusso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1,5 - 0,8y}{0,5 + 0,8x}$$

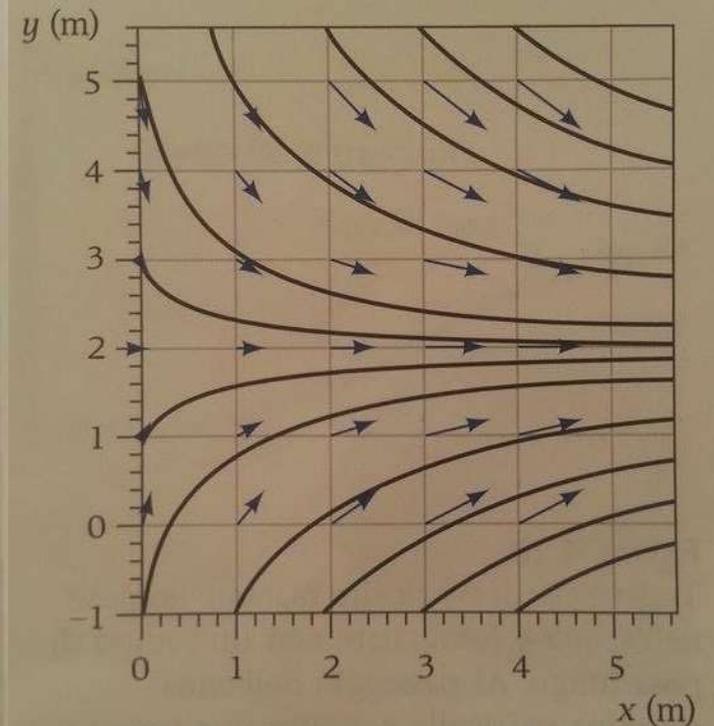
e, separando le variabili,

$$\frac{dy}{1,5 - 0,8y} = \frac{dx}{0,5 + 0,8x}$$

Integrando, con semplici calcoli si ottiene

$$y = \frac{C}{0,8(0,5 + 0,8x)} + 1,875$$

dove  $C$  è una costante di integrazione a cui vanno assegnati valori diversi per ciascuna linea di flusso (Figura 4.17).



### ESEMPIO 4.3 Accelerazione totale in un campo di velocità permanente

Con riferimento al campo di velocità permanente bidimensionale dell'Esempio 4.1, **(a)** calcolare la derivata totale nel punto di coordinate  $x = 2$  m,  $y = 3$  m e **(b)** tracciare i vettori accelerazione totale per lo stesso campo di valori di  $x$  e  $y$  dell'Esempio 4.1.

**Ipotesi** 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 Il moto è bidimensionale, cioè  $v_z = 0$  e  $v_x$  e  $v_y$  non variano con  $z$ .

#### Analisi

**(a)** Il campo di velocità è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 0,8x)\mathbf{i} + (1,5 - 0,8y)\mathbf{j}$$

Per le 4.11, le due componenti non nulle del vettore accelerazione sono

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \\ &= (0,5 + 0,8x) \times 0,8 + (1,5 - 0,8y) \times 0 = 0,4 + 0,64x \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= (0,5 + 0,8x) \times 0 + (1,5 - 0,8y) \times (-0,8) = \\ &= -1,2 + 0,64y \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

per cui nel punto di coordinate  $x = 2$  m,  $y = 3$  m, si ha  $a_x = 1,68 \text{ m/s}^2$  e  $a_y = 0,72 \text{ m/s}^2$ .

**(b)** Dalle espressioni sopra ricavate è possibile calcolare le componenti  $a_x$  e  $a_y$  dell'accelerazione per diversi valori di  $(x, y)$

|                           |       |       |      |      |       |      |
|---------------------------|-------|-------|------|------|-------|------|
| $x$ (m)                   | -2    | -1    | 0    | 1    | 2     |      |
| $a_x$ (m/s <sup>2</sup> ) | -0,88 | -0,24 | 0,4  | 1,04 | 1,68  |      |
| $y$ (m)                   | 0     | 1     | 2    | 3    | 4     | 5    |
| $a_y$ (m/s <sup>2</sup> ) | -1,20 | -0,56 | 0,08 | 0,72 | -1,36 | 2,00 |

| $x$ | $y$  |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|
|     | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
| -2  | 1,49 | 1,04 | 0,88 | 1,14 | 1,62 | 2,19 |
| -1  | 1,22 | 0,61 | 0,25 | 0,76 | 1,38 | 2,01 |
| 0   | 1,20 | 0,57 | 0,11 | 0,72 | 1,36 | 2,00 |
| 1   | 1,40 | 0,91 | 0,72 | 1,02 | 1,54 | 2,13 |
| 2   | 1,81 | 1,47 | 1,36 | 1,54 | 1,92 | 2,42 |

I valori sono tracciati nella Figura 4.14.

**Discussione** Nonostante il moto sia permanente, il campo di accelerazione è non nullo. Al di sopra del punto di ristagno, cioè per  $y > 1,875$  m, i vettori accelerazione sono diretti verso l'alto, con modulo crescente via via che ci si allontana dal punto di ristagno.

### ESEMPIO 4.2 Accelerazione di una particella di fluido in un ugello

Un signore lava la sua automobile, usando un ugello di lunghezza  $L = 0,10$  m, avente diametro della sezione di ingresso  $D_i = 0,010$  m e diametro della sezione di uscita  $D_u = 0,005$  m (Figura 4.9), da cui effluisce una portata  $Q = 0,052$  l/s. Calcolare l'accelerazione di una particella di fluido che si muova lungo l'asse dell'ugello.

**Ipotesi** 1 Il moto è permanente e il fluido incomprimibile. 2 Si assume l'asse  $x$  coincidente con l'asse dell'ugello. 3 Per simmetria, sull'asse si ha  $v_y = v_z = 0$ .

**Analisi** Essendo il moto permanente, è nulla l'accelerazione locale ma non l'accelerazione convettiva. La velocità media  $V$  nelle sezioni di ingresso e di uscita dell'ugello è pari al rapporto tra la portata e l'area delle rispettive sezioni trasversali

$$V_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{4Q}{\pi D_i^2} = \frac{4 \times 0,052 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,010^2} = 0,662 \text{ m/s}$$

$$V_u = \frac{Q}{A_u} = \frac{4Q}{\pi D_u^2} = \frac{4 \times 0,052 \times 10^{-3}}{\pi \times 0,005^2} = 2,65 \text{ m/s}$$

Il calcolo dell'accelerazione può essere fatto in due modi diversi, con risultati equivalenti. Il primo consiste nel calcolare un valore medio dell'accelerazione nella direzione  $x$ , semplicemente dividendo la variazione di velocità tra le sezioni di ingresso e di uscita dall'ugello per il tempo  $\Delta t$  impiegato da una particella a percorrere la distanza  $\Delta x$  tra le due sezioni, con velocità pari alla media tra quella di ingresso e quella di uscita (Figura 4.10). Pertanto, si ha

$$a_x \cong \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_u - V_i}{2\Delta x / (V_u + V_i)} = \frac{V_u^2 - V_i^2}{2\Delta x}$$

Il secondo metodo usa direttamente le equazioni 4.11 che esprimono le componenti dell'accelerazione in coordinate cartesiane. Si ha

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

In quanto dei quattro addendi è diverso da zero solo il secondo. Infatti, il primo è nullo perché il moto è permanente, il terzo e il quarto perché sono nulle le componenti  $v_y$  e  $v_z$  della velocità. Assumendo come velocità media, lungo l'ugello, la media delle velocità in ingresso e in uscita e usando per il valore medio della derivata

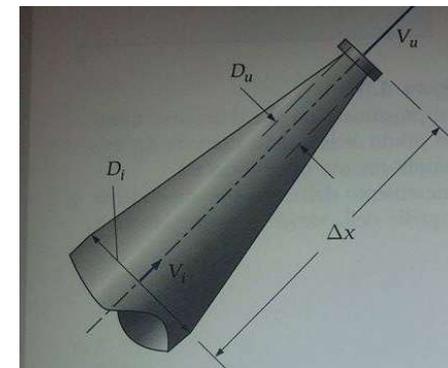
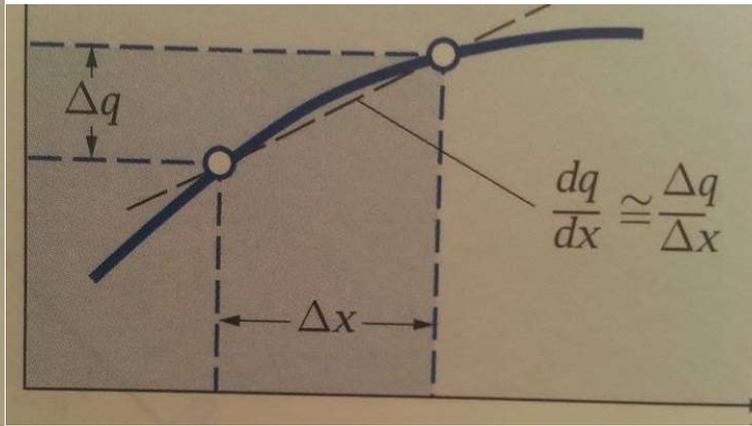


Figura 4.9 Schema dell'Esempio 4.2.

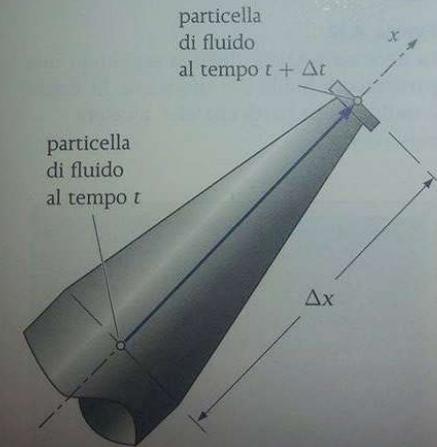


Figura 4.10

un'approssimazione alle differenze finite del primo ordine (Figura 4.11), si ha

$$a_x \cong \frac{V_u + V_i}{2} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_u + V_i}{2} \frac{V_u - V_i}{\Delta x} = \frac{V_u^2 - V_i^2}{2\Delta x}$$

così come nel primo metodo. Per cui

$$a_x \cong \frac{V_u^2 - V_i^2}{2\Delta x} = \frac{2,65^2 - 0,662^2}{2 \times 0,10} = 32,9 \text{ m/s}^2$$

**Discussione** Le particelle di fluido sono sottoposte a un'accelerazione media lungo l'ugello pari a quasi il quadruplo dell'accelerazione di gravità.

## ESEMPIO 4.5 Calcolo delle proprietà cinematiche di un campo di moto bidimensionale

Per il campo di velocità permanente bidimensionale dell'Esempio 4.1, di cui in Figura 4.35 sono riportate le linee di flusso, calcolare le diverse proprietà cinematiche e verificare che il fluido sia incomprimibile.

**Ipotesi** 1 Il moto è permanente. 2 Il moto è bidimensionale, cioè  $v_z = 0$  e  $v_x$  e  $v_y$  non variano con  $z$ .

**Analisi** Il campo di velocità è definito dalla

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (0,5 + 0,8x)\mathbf{i} + (1,5 - 0,8y)\mathbf{j}$$

Per la 4.17, la velocità di traslazione coincide col vettore velocità. Per cui

$$v_x = (0,5 + 0,8x) \quad v_y = (1,5 - 0,8y) \quad v_z = 0$$

Per la 4.22, essendo  $v_z = 0$  e  $v_x$  e  $v_y$  costanti con  $z$ , la velocità di rotazione ha componente diversa da zero solo in direzione  $z$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \frac{1}{2} (0 - 0) \mathbf{k} = 0$$

In questo caso, quindi, nel loro moto le particelle di fluido non ruotano. Per la 4.24, le velocità di deformazione lineare nelle direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,8 \text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = -0,8 \text{ s}^{-1} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Le particelle di fluido, quindi, *si allungano* in direzione  $x$  ( $\varepsilon_{xx} > 0$ ) e *si accorciano* in direzione  $y$  ( $\varepsilon_{yy} < 0$ ). Ciò è messo in evidenza nella Figura 4.36, dove è indicato un elemento di fluido inizialmente

quadrato, che, dopo un intervallo di tempo  $\Delta t = 1,5$  s, trasla e si deforma allungandosi in direzione  $x$  e restringendosi in direzione  $y$ . Le coordinate dei quattro vertici al tempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , note quelle al tempo  $t_1$ , si ottengono dalle

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} (0,5 + 0,8x) dt \quad y_2 = y_1 + \int_{t_1}^{t_2} (1,5 - 0,8y) dt$$

Per la 4.26, la velocità di deformazione angolare è

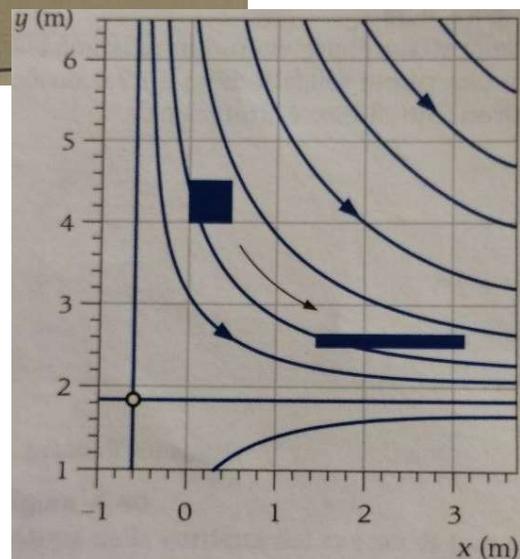
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0$$

Quindi, in questo moto, la velocità di deformazione angolare è nulla, come indicato anche dalla Figura 4.36. Nonostante l'elemento si deformi, esso rimane rettangolare; i suoi angoli inizialmente retti rimangono tali. Infine, la velocità di deformazione cubica, per la 4.25, è

$$\frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0,8 - 0,8 + 0 = 0 \text{ s}^{-1}$$

Si può, pertanto, affermare che gli elementi di fluido nel loro moto non si dilatano né si comprimono. Il fluido è, dunque, incomprimibile o si comporta come un fluido incomprimibile.

**Discussione** In questo esempio, le velocità di deformazione lineare ( $\varepsilon_{xx}$  e  $\varepsilon_{yy}$ ) sono diverse da zero, mentre le velocità di deformazione angolare ( $\varepsilon_{xy}$  e il suo simmetrico  $\varepsilon_{yx}$ ) sono nulle. In casi del genere, gli assi  $x$  e  $y$  sono chiamati *assi principali*.



# Vorticità

Si definisce vorticità di un elemento fluido:

$$\Omega = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \text{rot}(V)$$

Con semplici calcoli si ha che:

$$\omega = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2} \text{rot}(V) = \frac{\Omega}{2}$$

La vorticità è quindi una misura della rotazionalità presente nel campo di moto

E' associata alla presenza di viscosità nel campo di moto

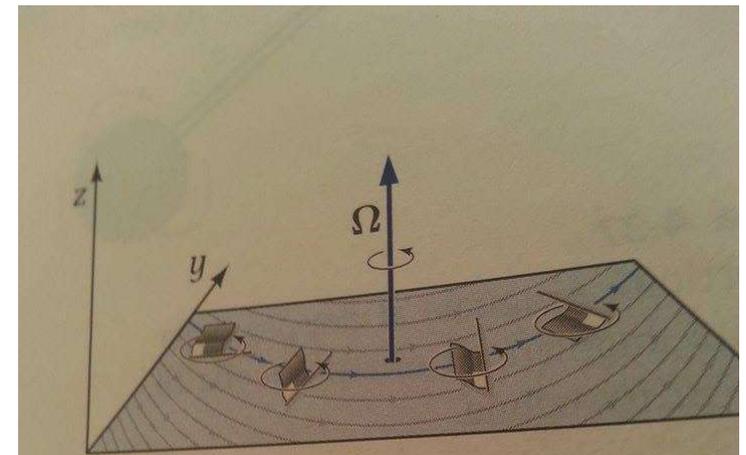
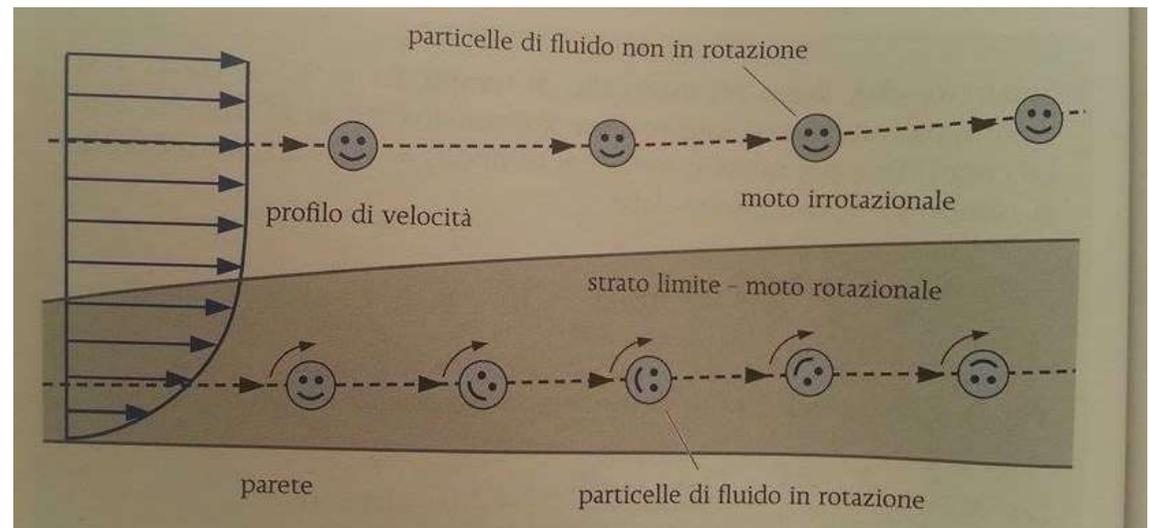


Figura 4.39

In un moto bidimensionale nel piano il vettore vorticità è sempre parallelo all'asse z. In figura, le particelle di fluido ruotano in senso antiorario nel piano e la vorticità è diretta come l'asse z.



## ESEMPIO 4.7 Determinazione della rotazionalità in un moto bidimensionale

Con riferimento al campo di velocità permanente bidimensionale di un fluido incomprimibile

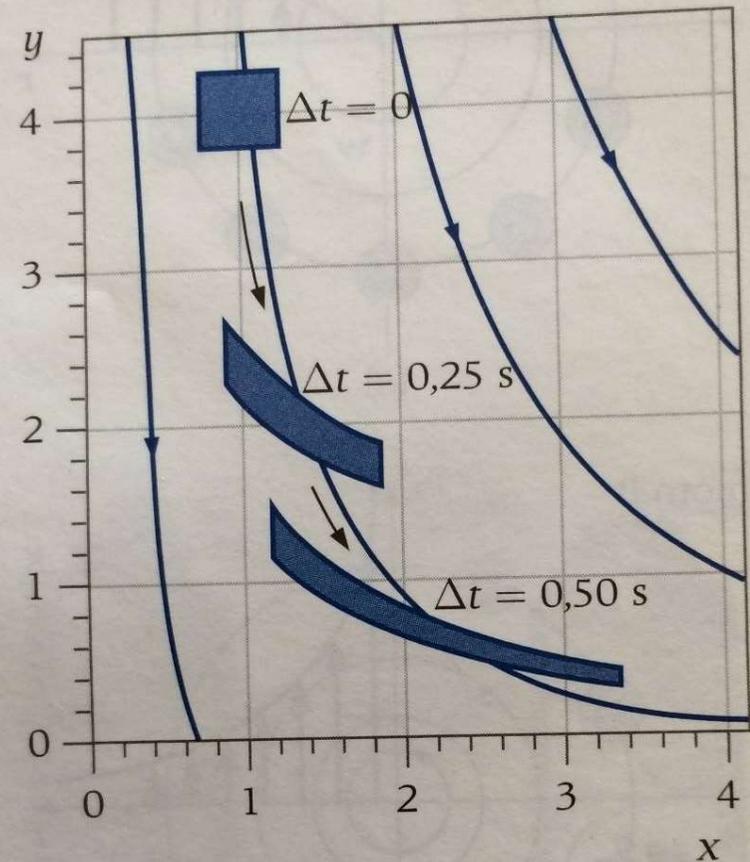
$$\mathbf{v} = (v_x, v_y) = x^2 \mathbf{i} + (-2xy - 1) \mathbf{j}$$

stabilire se il moto è rotazionale o irrotazionale e tracciare le linee di flusso nel primo quadrante.

**Analisi** Per la 4.32

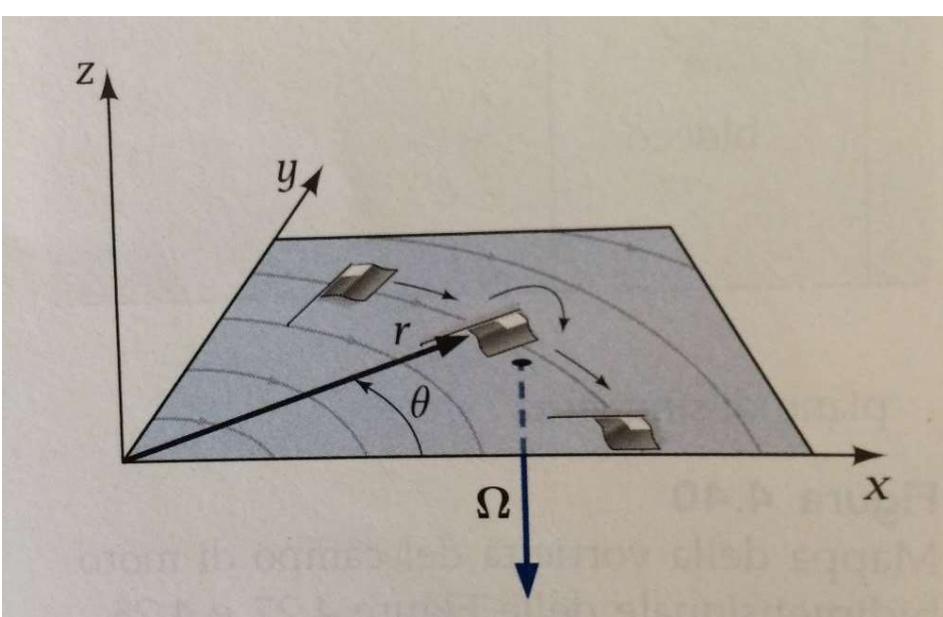
$$\boldsymbol{\Omega} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (-2y - 0) \mathbf{k} = -2y \mathbf{k}$$

Essendo la vorticità diversa da zero, il moto è **rotazionale**. La Figura 4.41 riporta alcune linee di flusso nel primo quadrante, che indicano che il fluido si muove verso il basso e verso destra. La figura riporta anche un elemento di fluido inizialmente quadrato in due istanti temporali successivi, intervallati di 0,25 s. La porzione destra si muove più velocemente verso destra e verso il basso rispetto alla porzione sinistra, dilatando l'elemento verso destra e schiacciandolo nella direzione verticale. L'elemento subisce anche una rotazione oraria.



**Figura 4.41**

Deformazione di una particella inizialmente quadrata soggetta al campo di velocità dell'Esempio 4.7 dopo un intervallo di tempo di 0,25 s e di 0,50 s. Il moto è evidentemente rotazionale.

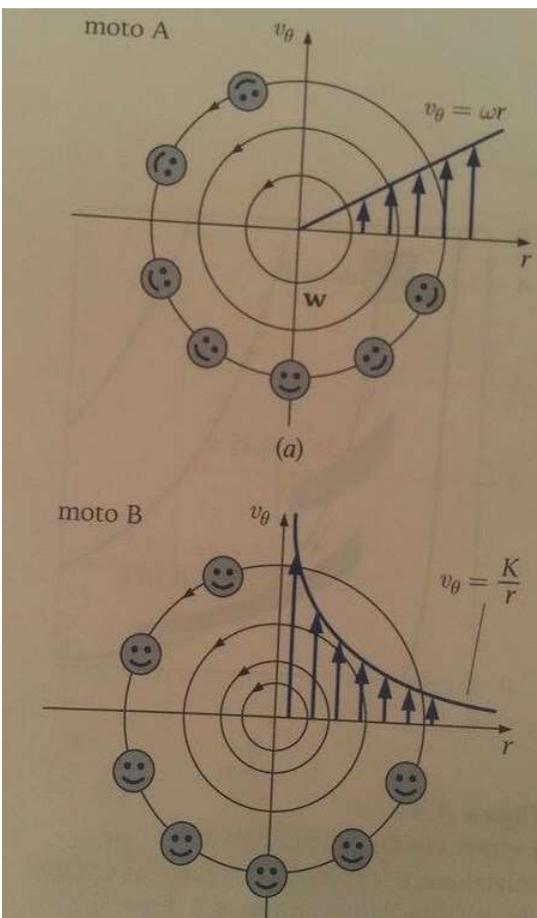


## Vorticità in un moto piano

Conviene considerare coordinate polari:

$$\Omega = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (rv_{\theta})}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

Consideriamo i due moti piani in basso a sn:



Il primo è una rotazione rigida con

$$v_r = 0$$

$$v_{\theta} = \omega r$$

-----

$$v_r = 0$$

$$v_{\theta} = \frac{K}{r}$$

$$|\Omega| = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (\omega r^2)}{\partial r} - 0 \right) = 2\omega$$

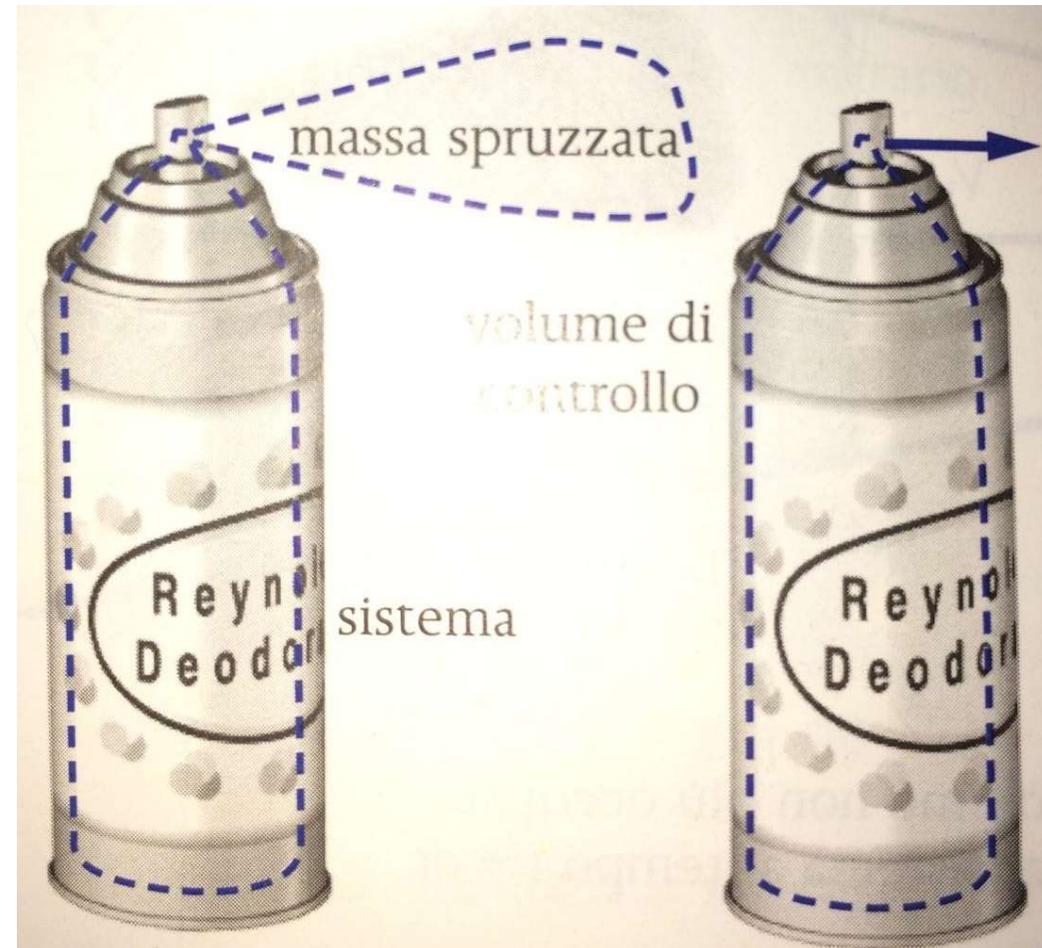
Il secondo è un moto irrotazionale con

$$|\Omega| = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (K)}{\partial r} - 0 \right) = 0$$

## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (1)

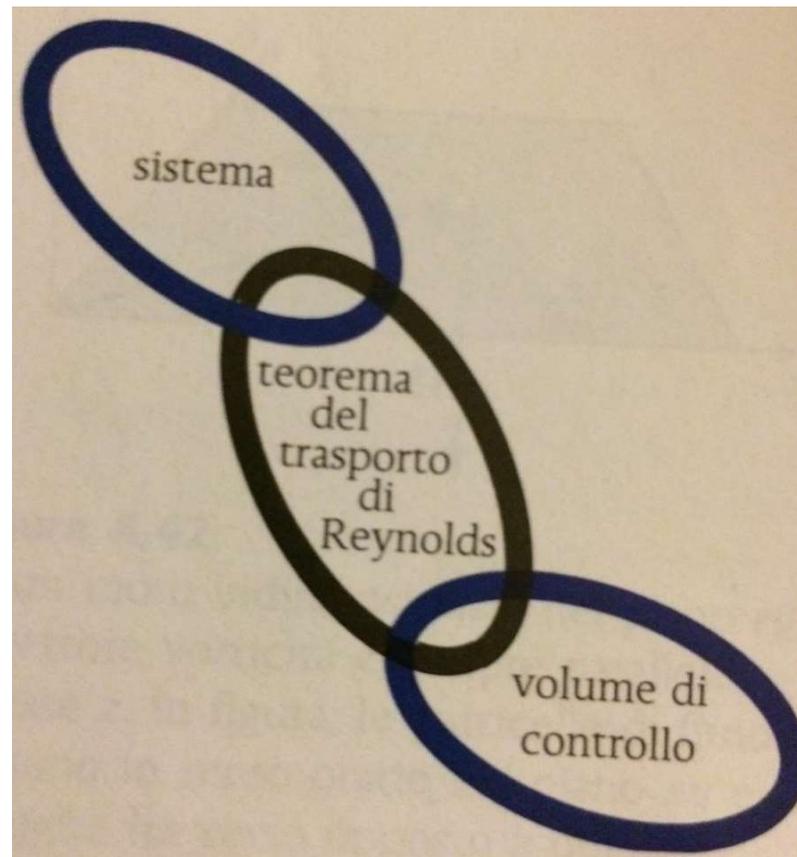
Un sistema chiuso e un volume di controllo sono due entità diverse, in quanto

- il sistema è chiuso e non permette flusso di massa attraverso le superfici;
- Il volume di controllo è aperto, fisso nello spazio e attraverso le superfici possiamo avere flusso di massa.



## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (2)

Il Teorema del Trasporto (o di Reynolds) permette di mettere in relazione la variazione di una grandezza all'interno di un sistema con la corrispondente variazione all'interno di un volume di controllo. Può essere interpretato come la formulazione integrale della derivata materiale



## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (3)

Nel divergente in figura sia il sistema in moto.  
All'istante  $t$  il sistema coincida con  $W$  (volume azzurro; a  $t+dt$  coincida con il volume tratteggiato.

Si avrà:

$$W' = W - dW_e + dW_u$$

$$dW_e = V_1 A_1 dt$$

$$dW_u = V_2 A_2 dt$$

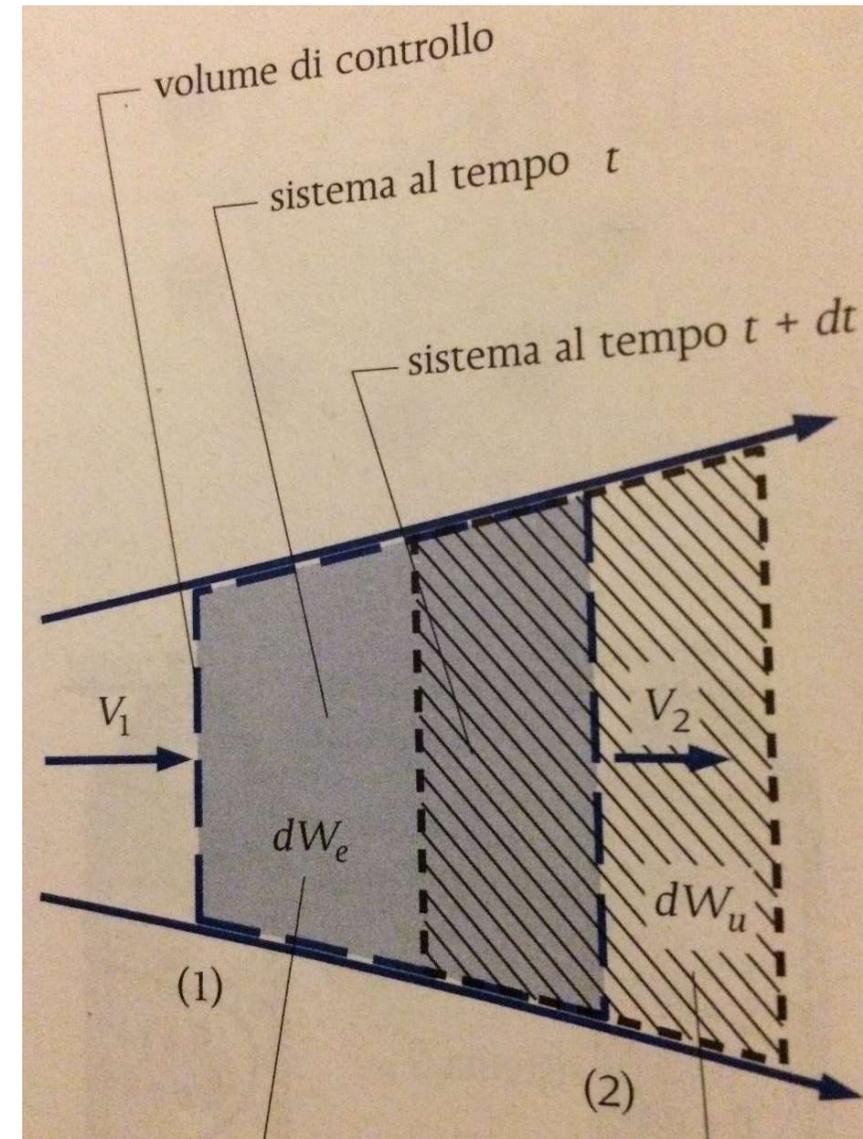
$B$  grandezza estensiva

$b$  corrispondente grandezza intensiva (B/m)

$S$  indica il sistema e  $W$  il volume di controllo

$$\text{a } t \quad \rightarrow \quad B_s = B_w$$

$$\text{a } t + dt \quad \rightarrow \quad B'_s = B'_{W'} = B'_W - B'_{dW_e} + B'_{dW_u}$$



## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (4)

Sottraendo la prima dalla seconda:

$$B'_S - B_S = B'_{W'} - B_W = B'_W - B_W - B'_{dWe} + B'_{dWu}$$

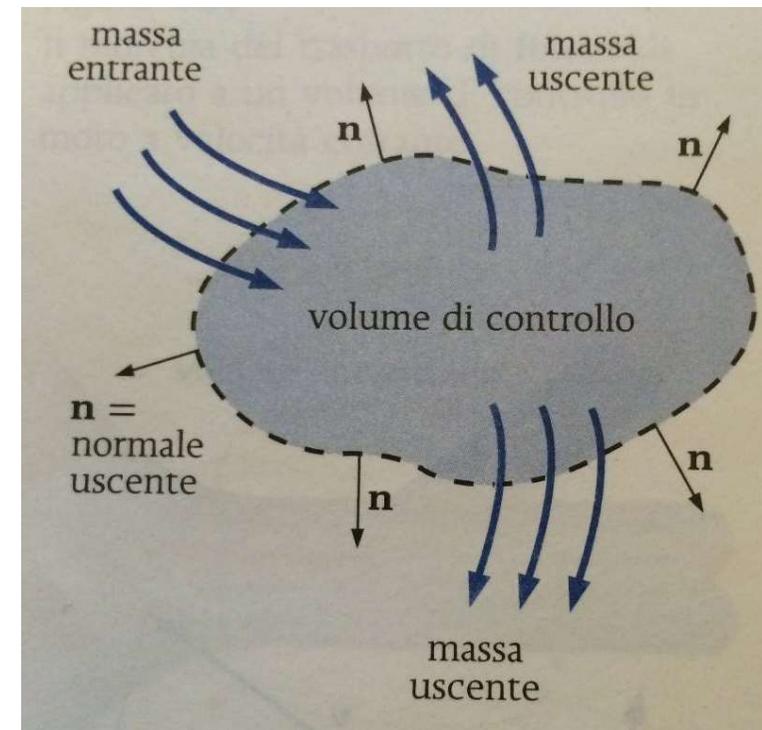
Esprimiamo gli ultimi due termini mediante le grandezze intensive

$$B'_{dWe} = b_1 m_{dWe} = b_1 \rho_1 dWe = b_1 \rho_1 V_1 A_1 dt$$

$$B'_{dWu} = b_2 m_{dWu} = b_2 \rho_2 dWu = b_2 \rho_2 V_2 A_2 dt$$

$$dB_s = dB_w - b_1 \rho_1 V_1 A_1 dt + b_2 \rho_2 V_2 A_2 dt$$

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{dB_w}{dt} - b_1 \rho_1 V_1 A_1 + b_2 \rho_2 V_2 A_2$$



## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (5)

Gli ultimi due termini della relazione precedente rappresentano i flussi (in ingresso e in uscita) della grandezza B attraverso la superficie del volume di controllo

Passiamo alla forma integrale:

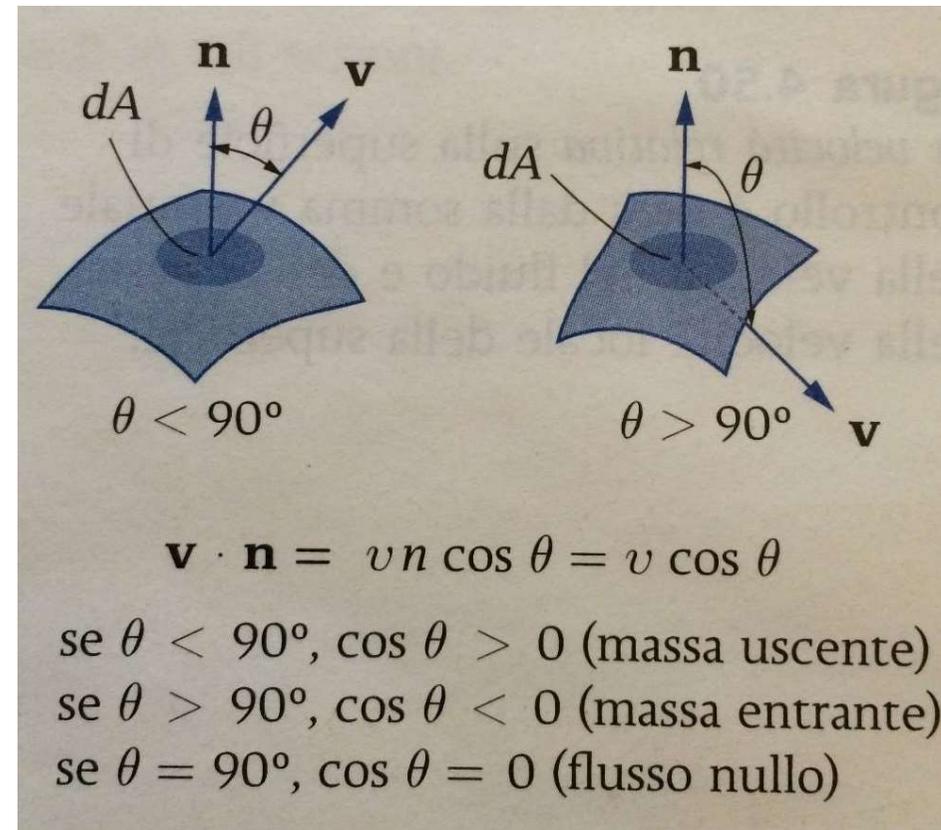
Definiamo flusso di una grandezza B attraverso una superficie A:

$$\int_A \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

Positivo se uscente e negativo se entrante nel volume.

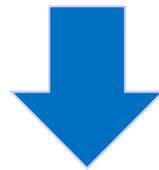
Inoltre:

$$B_W = \int_W \rho b dW$$



## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (6) (volume di controllo fisso)

$$\underbrace{\frac{dB_s}{dt}}_{\text{Variazione della grandezza nel sistema}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_W \rho b dW}_{\text{Variazione nel volume di controllo fisso nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso attraverso la superficie del volume di controllo}}$$



$$\underbrace{\frac{dB_s}{dt}}_{\text{Variazione della grandezza nel sistema}} = \underbrace{\int_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) dW}_{\text{Variazione nel volume di controllo fisso nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho b (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso attraverso la superficie del volume di controllo}}$$

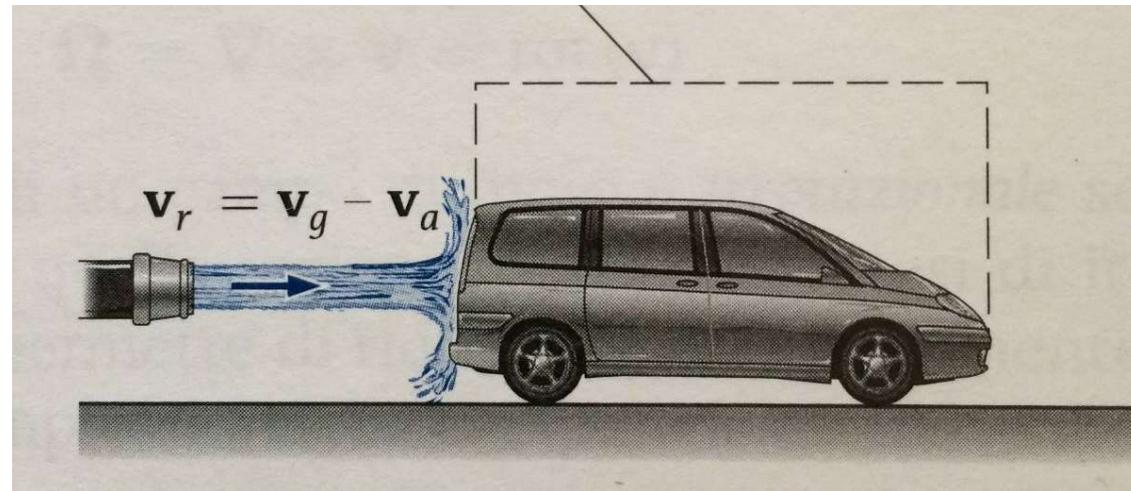
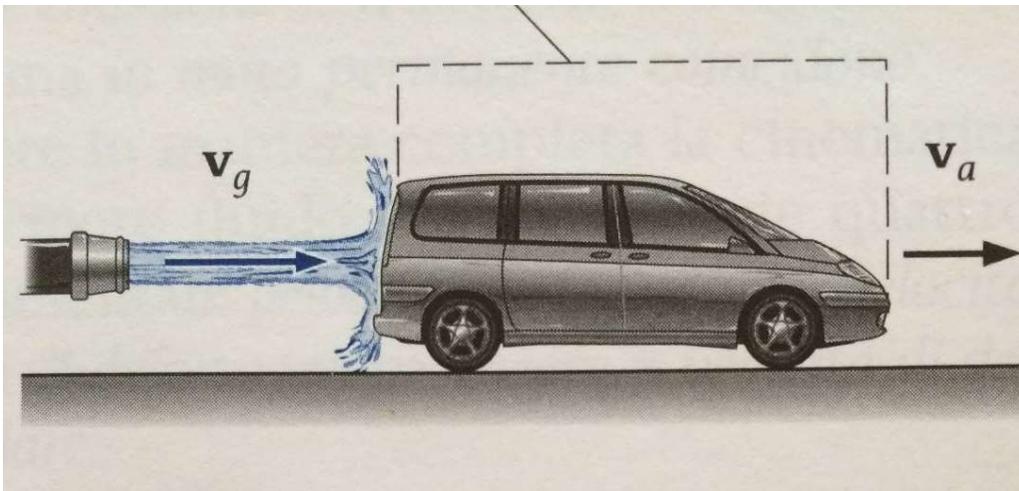
## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (7) (volume di controllo variabile)

$$\underbrace{\frac{dB_s}{dt}}_{\text{Variazione della grandezza nel sistema}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{W(t)} \rho b dW}_{\text{Variazione nel volume di controllo in moto nello spazio}} + \underbrace{\int_A \rho b (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA}_{\text{Flusso attraverso la superficie del volume di controllo dove } v_r \text{ è la velocità relativa}}$$

Variazione della grandezza nel sistema

Variazione nel volume di controllo in moto nello spazio

Flusso attraverso la superficie del volume di controllo dove  $v_r$  è la velocità relativa



Se la velocità relativa è nulla allora il volume di controllo coincide con il sistema e i termini  $d/dt$  si equivalgono

## Teorema del Trasporto (di Reynolds) (8) (applicazione)

Per le applicazioni del teorema, conviene scegliere in maniera opportuna il volume di controllo.

Se si considerano le superfici di flusso del volume:

$$\frac{dB_s}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho b dW + \sum_m b_m Q_{mr}$$

Se introduco la densità media

$$\int_A \rho (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA = \rho_m \int_A (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA = \rho_m V_r$$

$V_r$  è la portata volumetrica:

$$V_r = \int_A (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) dA$$

