

Istituzioni di Algebra e Geometria 2024/25

Secondo foglio di esercizi

14 ottobre 2024

1. Si determini una base del \mathbb{K} -sottospazio vettoriale $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ dei polinomi omogenei di grado d con l'aggiunta del polinomio nullo, e si calcoli la sua dimensione.
2. Si verifichi che se $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ è un polinomio omogeneo non nullo, allora

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2)$$

dove $A = (a_0 : a_1 : a_2) \neq B = (b_0 : b_1 : b_2)$ sono due punti di $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$, è un polinomio omogeneo di grado d .

3. Sia $r \subset \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$ una retta affine di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = lt + q_1 \\ y = mt + q_2. \end{cases}$$

Si dimostri che la sua chiusura proiettiva è una retta proiettiva descritta da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_0 = \mu \\ x_1 = l\lambda + q_1\mu \\ x_2 = m\lambda + q_2\mu. \end{cases}$$

4. Si consideri la curva piana affine di equazione

$$x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0.$$

- (a) Si trovi la chiusura proiettiva della curva e i suoi eventuali punti impropri;
 - (b) si dica se la curva è irriducibile o meno.
5. Nel piano proiettivo complesso, si consideri la chiusura proiettiva \bar{C} della curva affine di equazione:

$$(x-1)(x^2 + y^2) - x = 0.$$

Si determinino i punti impropri di \bar{C} .