Lezione 11 ottobre 2024

venerdì 11 ottobre 2024 11:08

Visto $R(f(t), g(t))$

Teorema (di Sylvester) $\deg f(t) \geq 1$, $\deg g(t) \geq 1$

$f(t)$ e $g(t)$ hanno un fattore comune

$\Leftrightarrow$ $R(f(t)\, g(t)) = 0$.

Dim.: Se f e g hanno h in comune

$f = h \cdot u$, $g = h \cdot v$, $\deg u < \deg f$, $\deg v < \deg g$

$\overset{\Leftarrow}{\underset{\text{Bézout}}{\Rightarrow}}$ $f \cdot v = g \cdot u$, $f \cdot v - g \cdot u \equiv 0$

$\Leftrightarrow$ il SLO essoc. ai coeff. del pol. $f \cdot v - g \cdot u$, dove i coeff. di v e u sono delle incognite ammette soluzioni non nulle.

OSS.: Supp. $R(f(t), g(t)) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ una soluz. non nulla del SLO

$\Rightarrow$ $\exists$ coeff. per v e u non tutti nulli

Affermo: che le soluz. non nulle corrispondono sempre a coppie $v(t)$ e $u(t)$ ENTRAMBI NON NULLI; infatti, se per assurdo:

$v(t) \equiv 0$, $u(t) \neq 0$; vale comunque

$$f(t) \cdot \underbrace{v(t)}_{=0} \equiv g(t) \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(t) \cdot \underbrace{u(t)}_{\neq 0}}_{\in A[t]} \equiv 0$$

A dominio di integrità $\Rightarrow$ $A[t]$ è un dominio di integrità $\Rightarrow$ $g(t) \equiv 0$.

assurdo.

OSS: Se $f(t) = h(t)\, u(t)$, $h(t) = h_1(t) \cdot h_2(t)$

$g(t) = h(t) \cdot v(t)$,

$$f(t) = h_1(t) \cdot \overbrace{(h_2(t) \cdot u(t))}^{u_1(t)}$$

$$g(t) = h_1(t) \cdot \underbrace{(h_2(t) \cdot v(t))}_{= v_1(t)}$$

$\Rightarrow$ i coeff. di (v, u) danno una soluz. non nulla del SLO di Sylvester

e $(v_1(t)\ u_1(t))$ danno un'altra soluzione non nulla, non proporzionale alla precedente

Visto: dato $f(t) \in A[t]$, (t.c. $A \supseteq \mathbb{Q}$)

$$f(t) = a_d t^d + \dots + a_1 t + a_0$$

$$f'(t) := \underbrace{d \cdot a_d}_{} \cdot t^{d-1} + \dots + a_1$$

$$\underbrace{(a_d + a_d + \dots + a_d)}_{d \text{ volte}}$$

Lemma: $f(t)$ ha una radice multipla $t_0 \in A$ $\Leftrightarrow$ t_0 è radice di f e di f'

$f(t_0) = 0$

$f'(t_0) = 0$.

$\Leftrightarrow$ $\Delta(f) = 0$ e $f \in \mathbb{K}[t]$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

Def.: $\Delta(f) := R(f(t), f'(t))$

Lemma: Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $f, g \in \mathbb{K}[t]$

Allora se $R(f, g) = 0$ $\Leftrightarrow$ f e g hanno una radice comune.

Dim.: $\Rightarrow$ $R(f, g) = 0$ $\Rightarrow$ f e g hanno un fattore comune h $\Rightarrow$ $h = h_1^{r_1} \cdots h_s^{r_s}$

con h_i irriducibili $\underset{\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}}{\Rightarrow}$ tutti gli h_i sono polinomi lineari $h_i = \prod_j (a_j t + b_j)$

$\Rightarrow$ $h(t)$ ha almeno una radice

$\Rightarrow$ $f = h \cdot u$, $g = h \cdot v$ anche f e g hanno una radice comune.

Viceversa: Se f e g hanno una radice comune t_0 $\underset{\text{Ruffini}}{\Rightarrow}$ sono entrambi divisibile per $(t - t_0) = h(t)$ $\Rightarrow$ $R(f, g) = 0$.

Esempio di $\Delta(f)$:

$$f(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad \deg f = 2$$

$a_2 \neq 0$.

$$f'(t) = 2a_2 t + a_1 \qquad \deg f' = 1$$

$$M_{f,f'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix}}_{3} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \begin{array}{l} \deg f + \deg f' \\ = 3 \end{array}$$

$$R(f, f') = \det M_{f,f'} = a_2 \cdot (a_1^2) - 2a_2(a_1^2 - 2a_0 a_2)$$

$$= a_1^2 a_2 - 2a_1^2 a_2 + 4a_0 a_2^2$$

$$= 4a_0 a_2^2 - a_1^2 a_2$$

$$= a_2 (4a_0 a_2 - a_1^2)$$

$a_2 \neq 0$ $\qquad = 0 \Leftrightarrow 4a_0 a_2 - a_1^2 = 0$

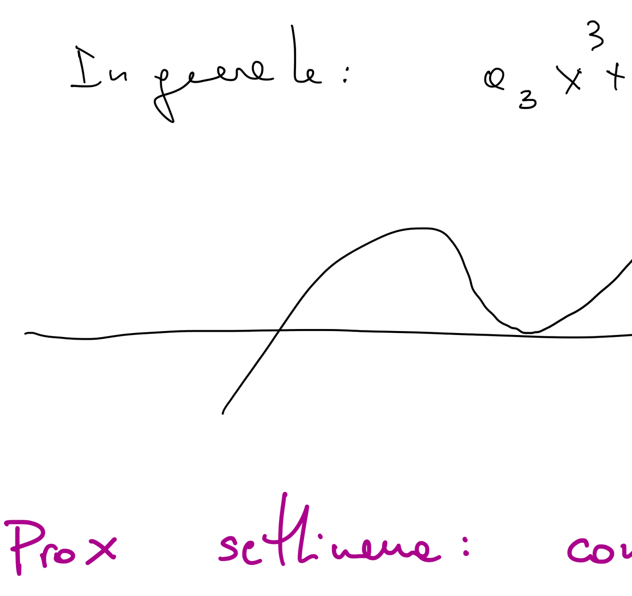
$= -\,\text{Disc (Scuole)}$

$= D(f)$

Infatti: $D(f) = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \dfrac{-a_1}{2a_2}$

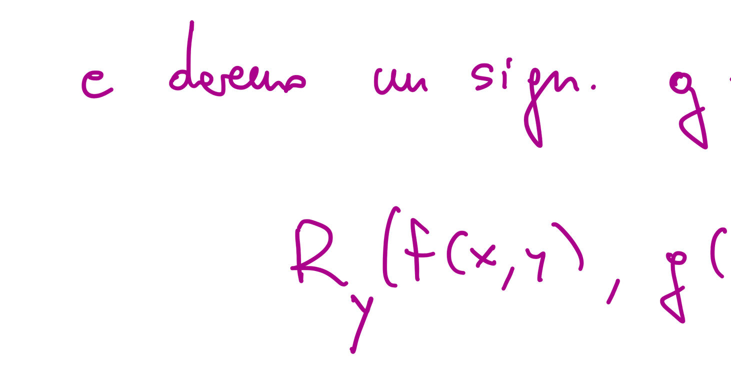
Geometricamente: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

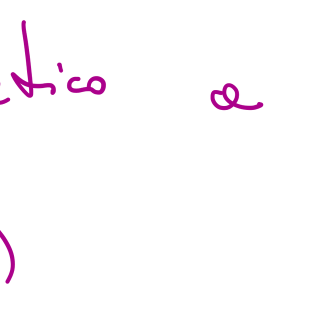
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - y = 0$



radice multipla

In generale: $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = y$





Prox settimana: con $f(x,y), g(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]$

e daremo un sign. geometrico a

$$R_y(f(x,y), g(x,y))$$

$f(x,y) \in \mathbb{K}[x][y]$

$$f(x,y) = a_d(x)\, y^d + a_{d-1}(x)\, y^{d-1} + \dots + a_0(x)$$

$g(x,y) = \dots$