

15 ottobre

Prima di continuare con la continuità di $\sin(x)$, dimostro:

Lemma $|x| \in C^0(\mathbb{R})$

Dim Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, devo dimostrare che $|x|$ è continuo in x_0 , cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \varepsilon$$

δ_ε ? Abbiamo visto che

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$

Pertanto, se scelgo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ ho

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon \quad \text{cioè}$$

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \varepsilon.$$

Continuazione della dim di $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin(0)$

Abbiamo dimostrato che

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per i

$$\begin{array}{ccc} \downarrow x \rightarrow 0 & & \downarrow x \rightarrow 0 \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Concludiamo $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

Esercizio Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Verifikation von $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0$$

$$0 \leq 1 - \cos(x)$$

$$\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} =$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

$$\leq \sin^2 x$$

$$0 \leq 1 - \cos x \leq \sin^2 x$$
$$\downarrow x \rightarrow 0 \quad \downarrow x \rightarrow 0$$
$$0 \quad 0$$

$$\text{for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos(0)$$

✓ $x_0 \in \mathbb{R}$ dimostro che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

$$x = h + x_0$$

$$h = x - x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(h + x_0)$$

$$\sin(h + x_0) = \sin(h) \cos(x_0) + \cos(h) \sin(x_0) \rightarrow$$

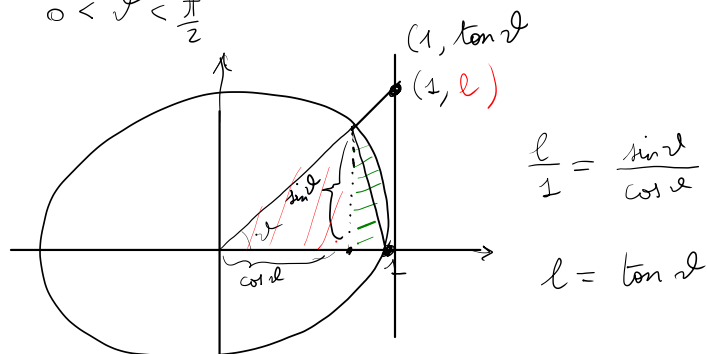
$\downarrow h \rightarrow 0$ $\downarrow h \rightarrow 0$

0 1

$$0 \cos(x_0) + 1 \cdot \sin(x_0) = \sin(x_0)$$

Teor $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dim $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$



Area settore circolare = $\frac{\vartheta}{2}$

Area triangolo grande = $\frac{\tan \vartheta}{2}$

Area triangolo piccolo = $\frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{2}$

$\sin \vartheta \cos \vartheta < \vartheta < \tan \vartheta \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$\sin \vartheta \cos \vartheta < \vartheta < \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$ dividiamo per $\sin \vartheta$

$\cos \vartheta < \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} < \frac{1}{\cos \vartheta} \quad \forall 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\forall 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

poiché entrambe le funzioni
sono pari quindi se ho



$\cos(x) < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ per un certo x

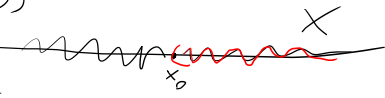
allora, dal fatto che $\frac{-x}{\sin(-x)} = \frac{x}{\sin x}$ e $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos(x)}$

segue anche $\cos x < \frac{-x}{\sin(-x)} < \frac{1}{\cos(-x)}$

Pertanto abbiamo $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Def Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$. Supponiamo che $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$

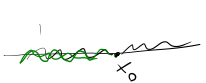
Allora se $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e se 

$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = L$ scriviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Se ad esempio $L \in \mathbb{R}$ allora si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se invece $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ 

e se $\exists L' \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c.

$$A \subset X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)} = L'$$

$$f|_A: A \rightarrow \mathbb{R}$$

allora scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L'$ e se $L' \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L'| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

1. Esercizio Sia $X \in \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$$X' = (X \cap (x_0, +\infty))' \cup (X \cap (-\infty, x_0))'$$

2. Esercizio Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$$x_0 \in X' \text{ , } x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))' \text{ , } x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$$

Dimostrare che le seguenti due proposizioni sono equivalenti

1) Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

2) Esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ e sono uguali.

Quando le proposizioni sono vere si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Teorema Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e sia
 $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ e $x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$



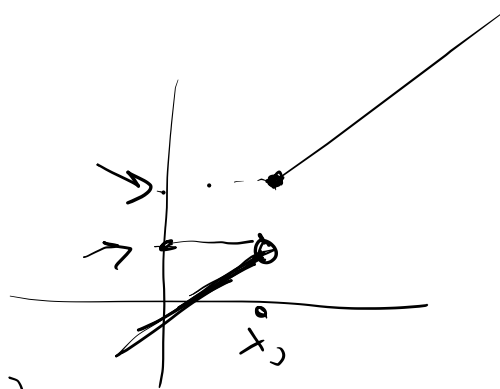
Allora $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ esiste e

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ esiste.

Ad esempio, se f è crescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf \{ f(x); x > x_0 \}$$

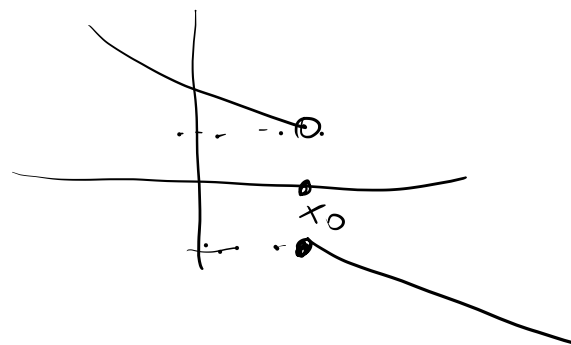
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup \{ f(x); x < x_0 \}$$



Se f è decrescente

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup \{ f(x); x > x_0 \}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf \{ f(x); x < x_0 \}$$



Teorema Sia $b > 1$. Allora funzione esponenziale b^x e' continuo in $\mathbb{R}$ $b^x \in C^0(\mathbb{R})$.

Dim Qui da per scontato il fatto che se $b > 1$ allora $x \rightarrow b^x$ e' una funzione crescente.

Per primo caso dimostreremo $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = b^0 = 1$

La dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$ la spezziamo in due dimostrando

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x &= 1 \\ b) \lim_{x \rightarrow 0^-} b^x &= 1 \end{aligned} \quad \left(\right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1 \left. \right)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = ? \quad \text{Se } x > 0 \Rightarrow b^x > b^0 = 1$$

Segue b^x e' crescente $b^x > 1 \quad x > 0$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x &= \inf \{ b^x : x > 0 \} \leq \\ &\leq \inf \{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

vale $\{ b^x : x > 0 \} \supset \{ b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = 1$

$$\begin{aligned} b) \text{ Dimostrare } \lim_{x \rightarrow 0^-} b^x &= 1 \\ y = -x & \\ x = -y & \\ \lim_{y \rightarrow 0^+} b^{-y} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{b^y} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Conclusione : $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$

Ora dimostreremo che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} b^x &= b^{x_0} \\ x &= h + x_0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} b^{h+x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} b^h b^{x_0} = b^{x_0} \end{aligned}$$

Esercizio Se $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione strettamente
crescente di numeri naturali allora $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dim Procediamo per induzione.

$$1) \quad n_1 \geq 1 \quad \forall n_1 \in \mathbb{N}$$

2) Supponiamo di avere dimostrato che

$$n_k \geq k$$

$$n_{k+1} > n_k \Rightarrow n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$$

$$\text{Cioè } n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1$$

Esercizio Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = L$

$\forall$ sottosequenze $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$.

Dimostrare nel caso $L \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } n > M_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

Voglio dimostrare che $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = L$ cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ t.c. } k > N_\varepsilon \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$$N_\varepsilon = ?$$

Proviamo $N_\varepsilon = M_\varepsilon$. Infatti:

$$k > M_\varepsilon \Rightarrow n_k \geq k > M_\varepsilon \Rightarrow n_k > M_\varepsilon \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon$$