

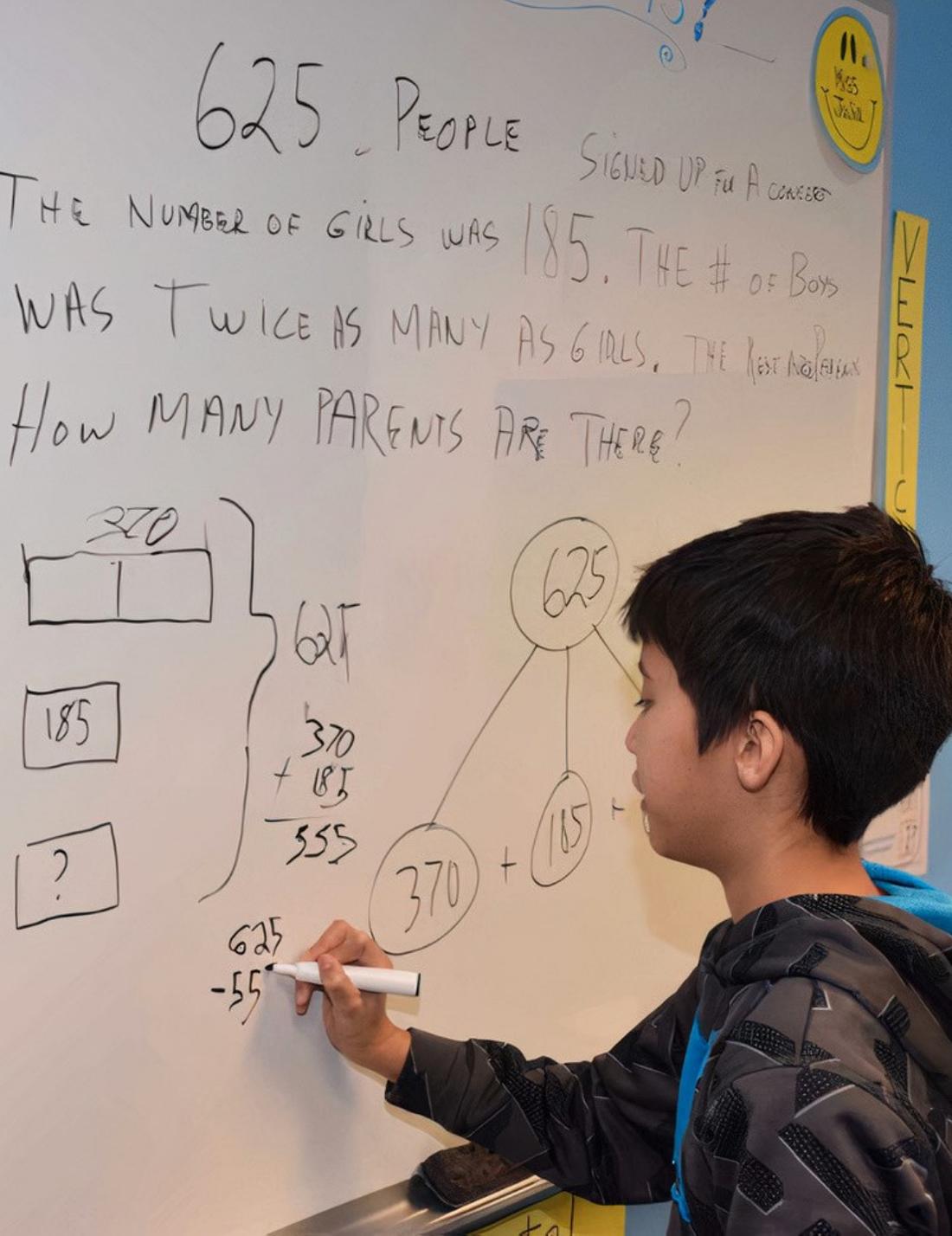


DIFFICOLTÀ NELLA RISOLUZIONE DI PROBLEMI ARITMETICI DI TIPO VERBALE: IL CASO DEI PROBLEMI INCONSISTENTI

Eleonora Doz

eleonora.doz@phd.units.it

15 ottobre 2024



Problemi aritmetici di tipo verbale

3. IL BIGLIETTO DELL'INGRESSO ALLO STADIO COSTA 28 € PER UN ADULTO E 11 € PER UN BAMBINO.

QUANTO SPENDERANNO PER ENTRARE MARTINA E IL SUO PAPÀ?

$$28 - 11 = 17$$

$$28 -$$

$$11 =$$

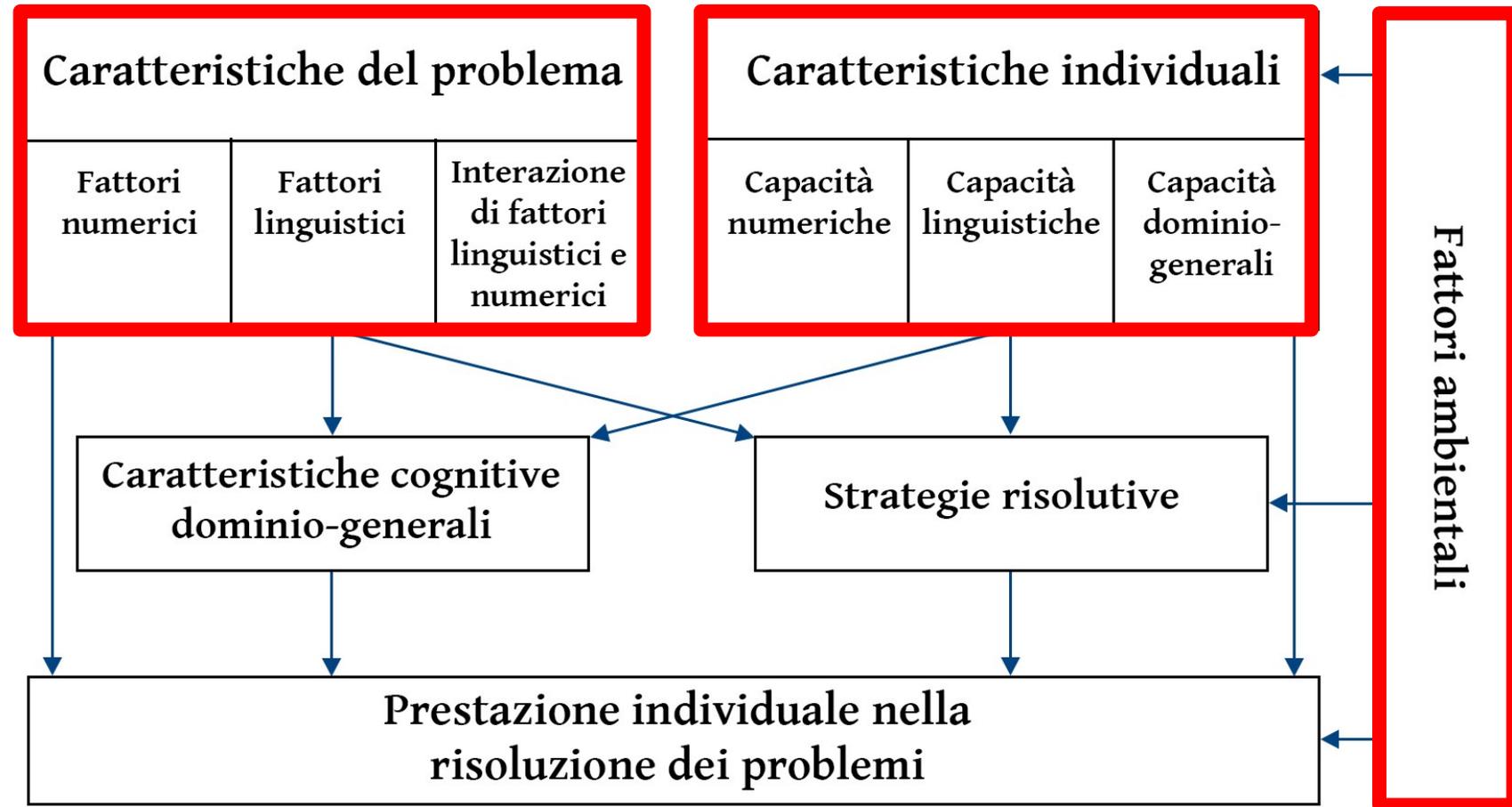
$$\hline 17$$

Difficoltà nella soluzione di problemi: il modello teorico di Daroczy

3 aspetti che predicono la prestazione nella soluzione di problemi aritmetici:

- 1. Caratteristiche del problema;**
- 2. Caratteristiche individuali;**
- 3. Fattori ambientali.**

(Daroczy et al., 2015)



1. Caratteristiche del problema

- Alcuni problemi sono più difficili da risolvere rispetto ad altri (Boonen & Jolles, 2015).

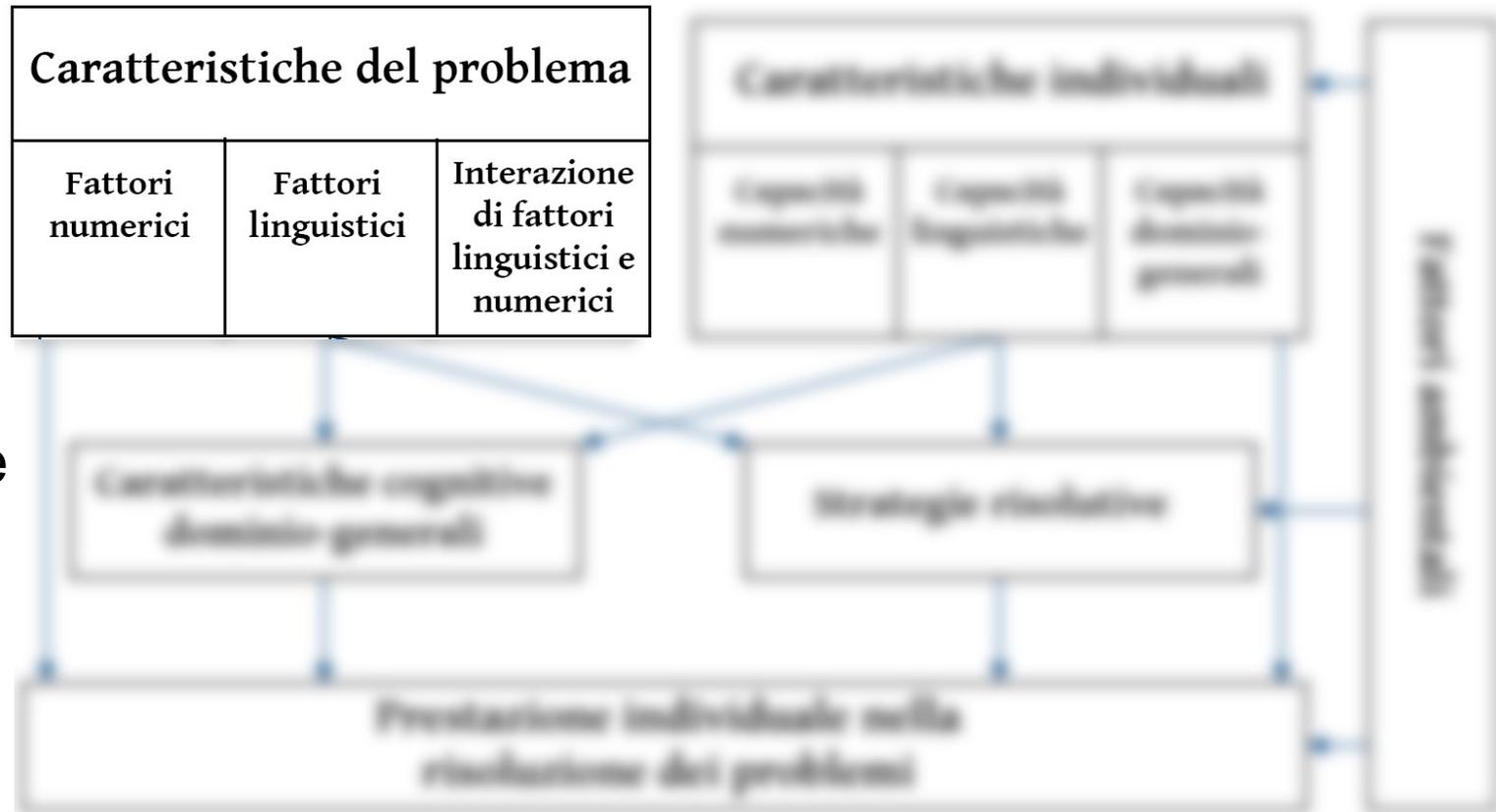
20. Per una gita scolastica di 65 bambini sono stati raccolti € 1625. Al termine della gita sono avanzati € 125 perchè alcuni bambini hanno rinunciato alla gita all'ultimo momento. Quanti sono i bambini che non sono andati in gita?

28. La nonna di Chiara compra 3 confezioni di biscotti. Ciascuna confezione contiene 12 biscotti. Li distribuisce tra i suoi 4 nipotini. Quanti biscotti dà a ciascuno?

- Dunque, le difficoltà nella soluzione di problemi dipendono in parte dalla **complessità del problema stesso.**

1. Caratteristiche del problema

- a) Caratteristiche numeriche;
- b) Caratteristiche linguistiche;
- c) Interazione tra caratteristiche linguistiche e numeriche.



a) Caratteristiche numeriche



- **Grandezza dei numeri:** problemi con numeri ad una cifra vs. problemi con numeri a più cifre (Haghverdi et al., 2012; Lean et al., 1990)

Livia acquista 7 succhi di frutta al costo di €2 ciascuno. Quanto spende Livia?

$$7 \times 2 = 14$$

Livia acquista 14 orsetti peluche al costo di €21 ciascuno. Quanto spende Livia?

$$14 \times 21 = 294$$

- **Tipologia dei numeri:** problemi con numeri interi vs. problemi con numeri razionali (De Corte et al., 1988; Raudan, 2010)

Livia acquista 7 succhi di frutta al costo di €2 ciascuno. Quanto spende Livia?

$$7 \times 2 = 14$$

Livia acquista 7 succhi di frutta al costo di €1,59 ciascuno. Quanto spende Livia?

$$7 \times 1,59 = 11,13$$

a) Caratteristiche numeriche



- **Carry-borrow effect:** problemi che richiedono un'addizione con riporto o sottrazione con prestito sono più difficili rispetto a problemi che richiedono operazioni senza riporto o prestito (Daroczy et al., 2020)

Livia ha 23 caramelle alla fragola e 16 alla menta. Quante caramelle ha Livia in totale?

$$23+16 = 39$$

Livia ha 23 caramelle alla fragola e 48 alla menta. Quante caramelle ha Livia in totale?

$$23+48= 71$$

a) Caratteristiche numeriche



- **Numero di operazioni aritmetiche**: problemi *one-step* più facili da risolvere rispetto problemi *two-step* (Muth, 1992)

Matteo ha acquistato 5 magliette a 6 euro ciascuna. Quanto ha speso in tutto?

→ 1 operazione

Matteo ha acquistato 5 magliette a 6 euro ciascuna ed un paio di jeans a 32 euro.
Quanto ha speso in tutto?

→ 2 operazioni

a) Caratteristiche numeriche



- **Informazioni numeriche irrilevanti**: la presenza di informazioni numeriche irrilevanti peggiora la prestazione (Ng, Lee & Khng, 2017; Kingsdorf & Krawec, 2014)

L'album delle figurine di Luca ha 28 pagine e in ogni pagina ci sono 8 figurine. Quante figurine ci sono in tutto?

L'album delle figurine di Luca ha 28 pagine e in ogni pagina ci sono 8 figurine. Luca ha impiegato 10 mesi per completarlo. Quante figurine ci sono in tutto?



b) Caratteristiche linguistiche

- **Lunghezza del problema:** all'aumentare della lunghezza del problema, aumenta la difficoltà (Loftus & Suppes, 1972)
- **Informazioni verbali irrilevanti:** all'aumentare delle informazioni verbali irrilevanti, aumenta la difficoltà (Muth, 1992; Passolunghi, Cornoldi & Liberto, 1999)

Una scuola sta organizzando una gita scolastica; gli alunni visiteranno un parco naturale dove potranno osservare diverse piante e animali. Tutti gli studenti parteciperanno alla gita. Nella scuola ci sono 12 classi. In ciascuna classe ci sono 23 studenti. Inoltre, 27 insegnanti accompagneranno gli alunni. Gli studenti sono molto felici perché potranno finalmente vedere alcuni animali selvatici. Quante persone in tutto andranno in gita scolastica?



b) Caratteristiche linguistiche

- **Nominalization**: usare sostantivi al posto dei verbi incide negativamente sulla risoluzione (Daroczy et al., 2020; Schlager et al., 2017)

Giovanni aveva 82 euro. Il giorno successivo ha guadagnato 15 euro. Quanti euro ha Giovanni adesso?

Giovanni aveva 82 euro. Il giorno successivo era felice del suo guadagno di 15 euro. Quanti euro ha Giovanni adesso?



b) Caratteristiche linguistiche

- **Linguaggio implicito**: usare un linguaggio implicito (es. iperonimi) aumenta la difficoltà di un problema (Fuchs et al., 2021)

Marta ha 15 pere. Giovanni ha 17 mele. Quante pere e mele hanno insieme?

Marta ha 15 pere. Giovanni ha 17 mele. Quanti frutti hanno insieme?

c) Interazione tra caratteristiche linguistiche e numeriche

- **Parole chiave** (*cue verbali*) semanticamente legate ad un'operazione aritmetica (Pape, 2003):

- congiunzione «e» → addizione

Marta ha mangiato 7 biscotti al cioccolato e 2 alla marmellata. Quanti biscotti ha mangiato Marta in tutto?

- «ciascuno», «ogni» → moltiplicazione

*Marta ha comprato 5 pacchi di biscotti. **Ciascuno** contiene 12 biscotti. Quanti biscotti ci sono in tutto?*

- «in più» → addizione / «in meno» → sottrazione

*Marta ha mangiato 7 biscotti. Laura ne ha mangiati 2 **in più** rispetto a Marta. Quanti biscotti ha mangiato Laura?*

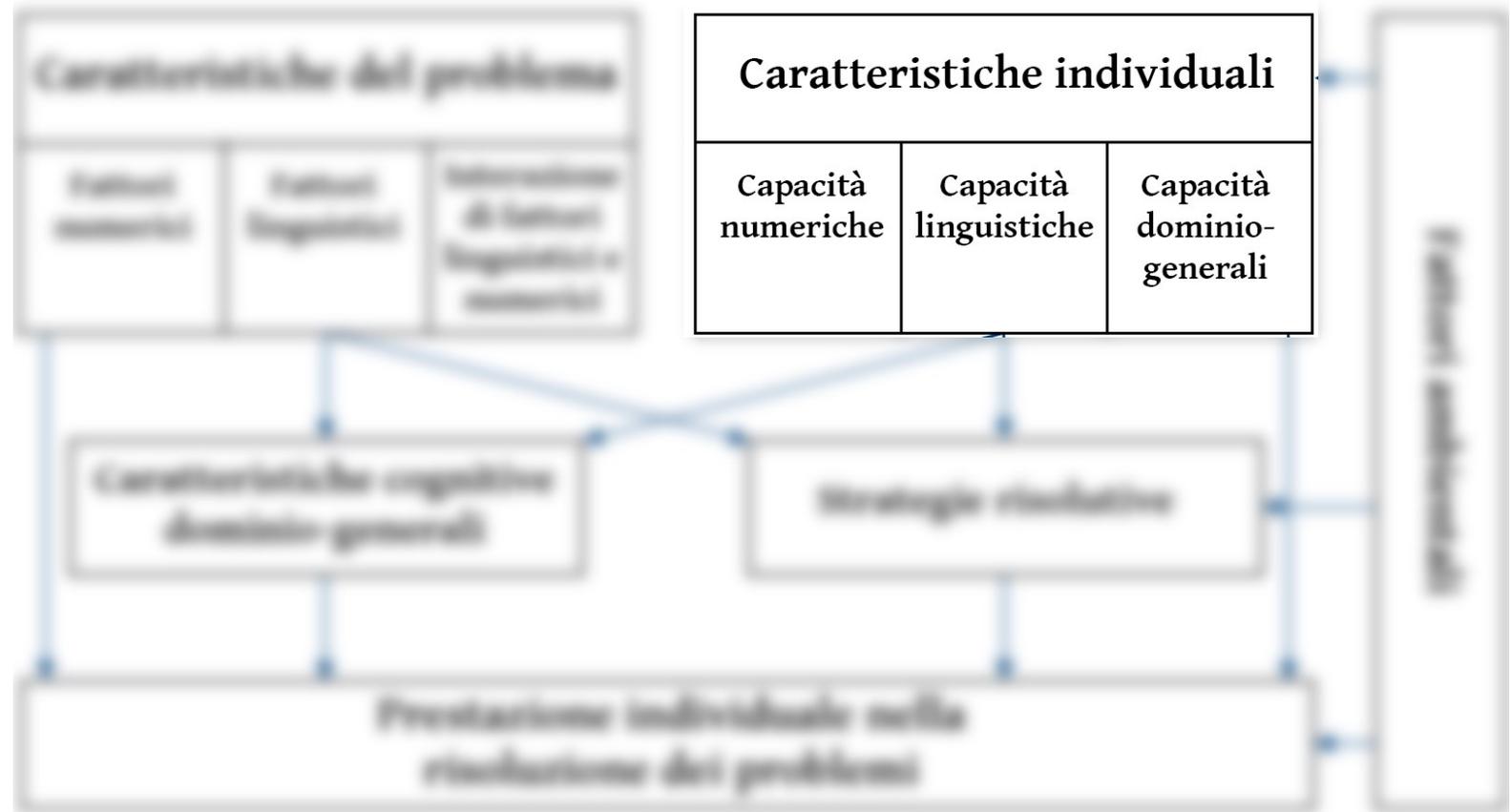
Solitamente le parole chiave **facilitano** la soluzione.

MA NON SEMPRE (vedi problemi inconsistenti)

2. Caratteristiche individuali

Nella risoluzione di problemi aritmetici sono coinvolte:

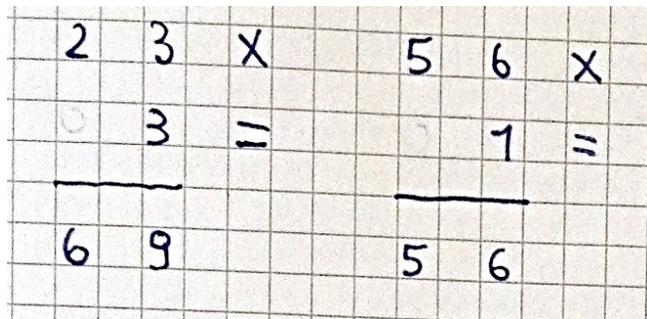
- **abilità numeriche;**
- **abilità linguistiche;**
- **abilità dominio-general.**



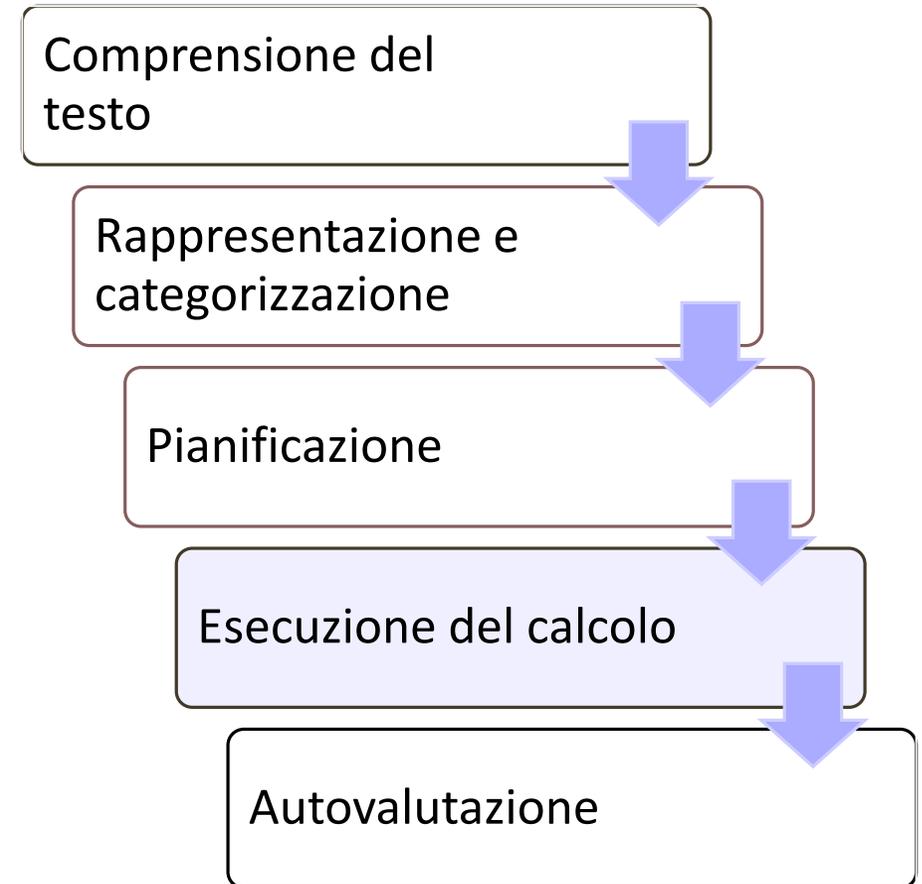
2. Caratteristiche individuali

Abilità numeriche:

- L'abilità di calcolo e la conoscenza dei concetti matematici permettono di **svolgere correttamente i calcoli aritmetici** necessari alla soluzione.



(Fuchs et al., 2008; Kail & Hall, 1999; Pongsakdi et al., 2020; Spencer et al., 2020; Wang et al., 2016)



Modello delle componenti cognitive (Mayer, 1992; Passolungi et al., 1996)

2. Caratteristiche individuali

Abilità numeriche:

ARITHMETIC: A NECESSARY BUT INSUFFICIENT FOUNDATION FOR WORD PROBLEMS

That arithmetic is a necessary but insufficient foundation for WP solving is not surprising, given that

Accordingly, studies (Fuchs et al., 2012; Swanson, 2006) indicate that

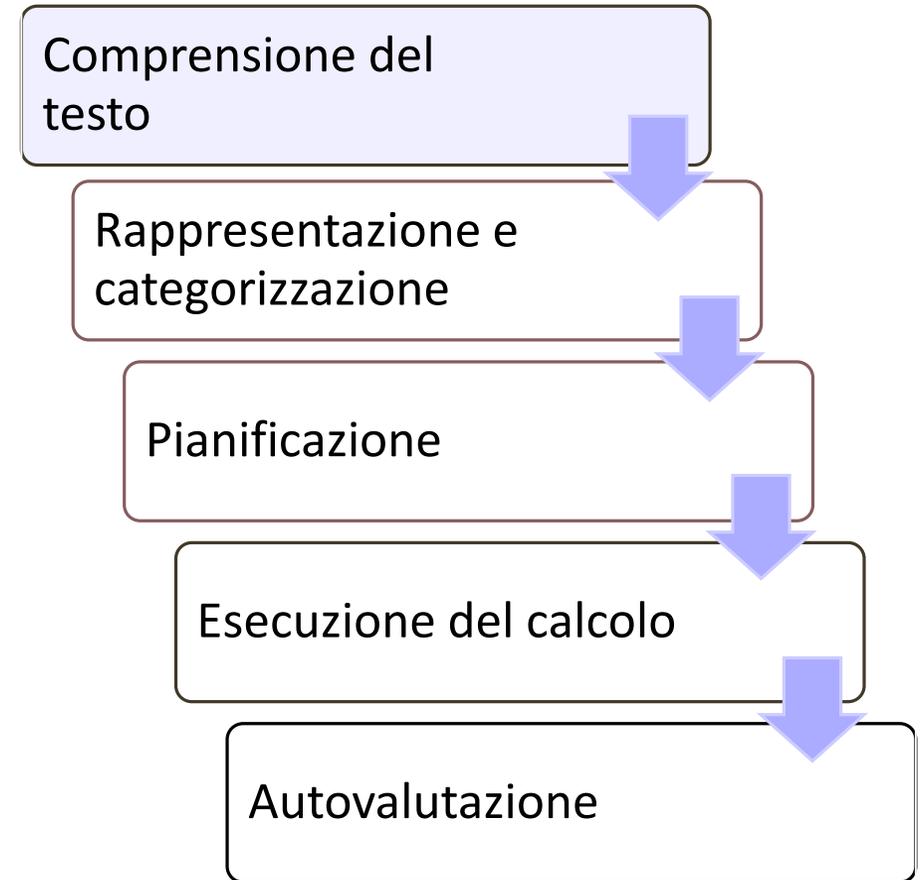
(Fuchs et al., 2015)

2. Caratteristiche individuali

Abilità linguistiche:

- La conoscenza linguistica e l'abilità di comprensione del testo permettono di **comprendere** ed **integrare** le informazioni presenti nel testo, in modo da creare una **rappresentazione mentale** adeguata del problema.

(Fuchs et al., 2015; Fuchs et al., 2018; Lin et al., 2021; Passolunghi et al., 2022; Pongsakdi et al., 2020; Spencer et al., 2020; Wang et al., 2016)



2. Caratteristiche individuali

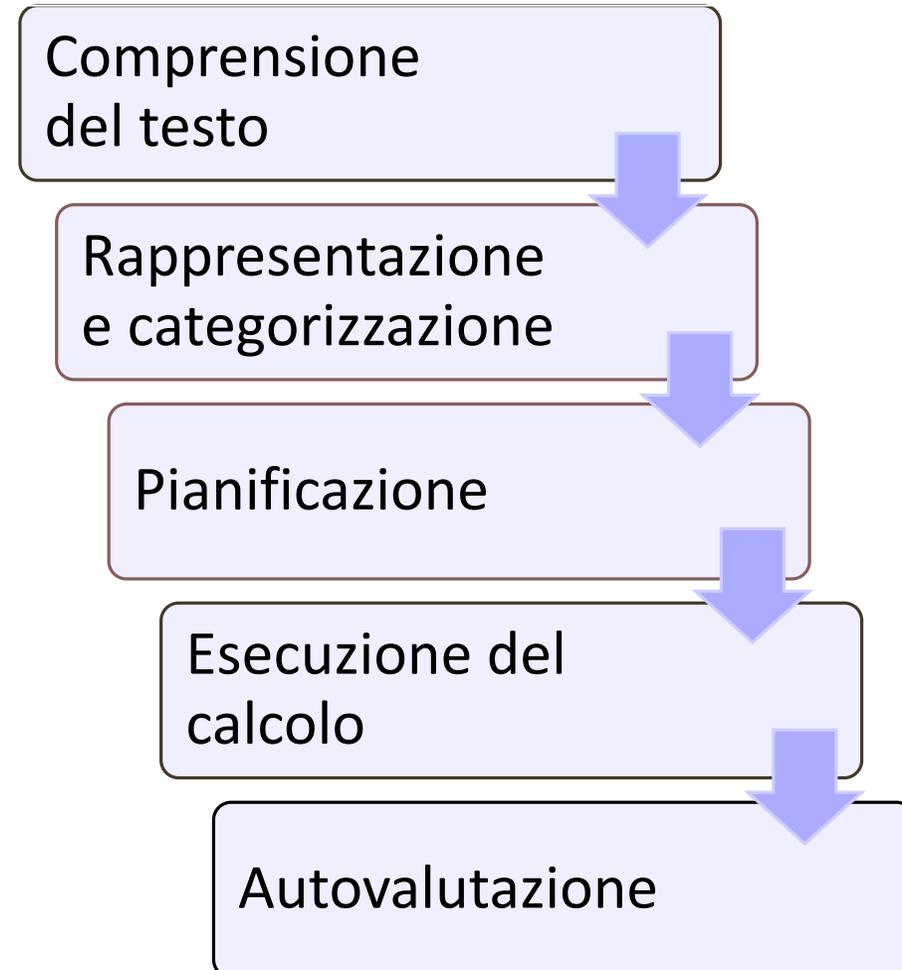
Abilità dominio-generalì:

Ragionamento non verbale (intelligenza fluida)	permette di crearsi una rappresentazione mentale adeguata del problema e incide sulla scelta della strategia (Fuchs et al., 2006; Fuchs et al., 2010; Xin et al., 2005).
Processi attentivi	permettono di concentrarsi sul compito (Fuchs et al., 2005; Lin, 2020).
Memoria di lavoro	permette di mantenere in memoria le informazioni rilevanti per costruirsi una rappresentazione mentale del problema; permette di tenere a mente il piano d'azione ; permette lo svolgimento di calcoli (Andersson & Lyxell, 2007; Swanson & Beebe-Frankenberger, 2004; Wang et al., 2016).
Aggiornamento (<i>updating</i>)	permette di aggiornare le informazioni , sostituendo le info non più rilevanti con quelle rilevanti (Passolunghi & Pazzaglia, 2004, 2005; Kotsopoulos & Lee, 2012; Mori & Okamoto, 2017).
Inibizione	permette di inibire informazioni irrilevanti o strategie di soluzione inadeguate (Passolunghi & Siegel, 2001, 2004; Khng & Lee, 2009; Lubin et al., 2013).
Metacognizione	permette di monitorare, controllare e autovalutare il processo di soluzione (Pennequin et al., 2010)

2. Caratteristiche individuali

Abilità dominio-generalì:

Ragionamento non verbale (intelligenza fluida)
Processi attentivi
Memoria di lavoro
Aggiornamento (<i>updating</i>)
Inibizione
Metacognizione



2. Caratteristiche individuali

Caratteristiche individuali		
Capacità numeriche	Capacità linguistiche	Capacità dominio-general

Oltre alle componenti cognitive, bisogna considerare anche differenze individuali a livello **EMOTIVO e MOTIVAZIONALE**, come:

- ansia matematica
- autoefficacia matematica.

(Doz et al., 2023; Passolunghi et al., 2019; Ramirez et al., 2013, 2016)

3. Fattori ambientali

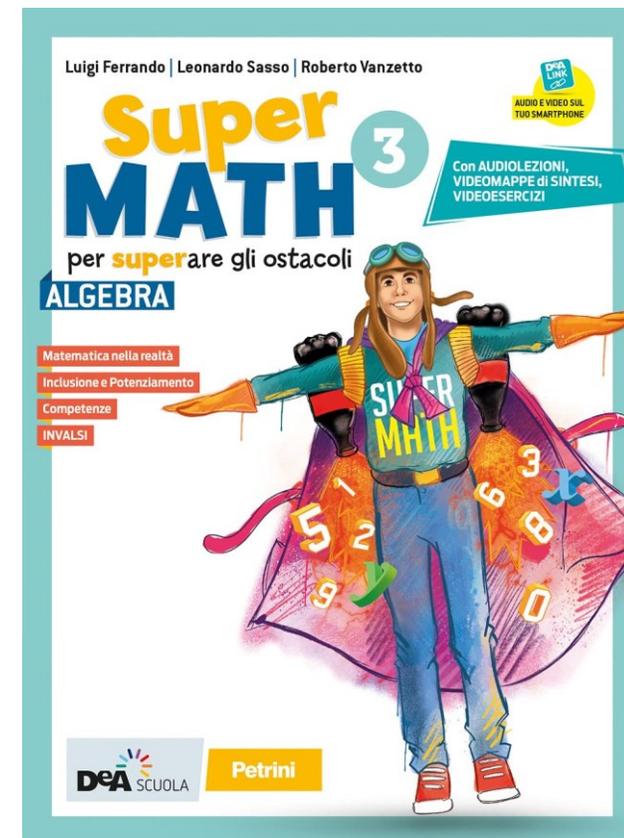
- Il metodo di insegnamento;
 - I libri di testo di matematica;
 - L'atteggiamento degli insegnanti e genitori nei confronti della matematica;
 - Gli stereotipi di genere in matematica.
-
- I fattori ambientali incidono sulle capacità individuali, sulla motivazione e sulle strategie di soluzione (Daroczy et al., 2015).



3. Fattori ambientali

Libri di testo di matematica:

- I libri di testo sono uno strumento frequentemente utilizzato nell'apprendimento matematico (Oates, 2014).
- I libri di testo in matematica differiscono in base alla proposta delle tipologie di problemi (Verschaffel et al., 2020).
- Ad esempio, alcuni libri di testo prediligono problemi che richiedono **l'applicazione meccanica di procedure aritmetiche** a scapito di problemi di ragionamento (Vicente et al., 2020).
- Proprio questa discrepanza potrebbe esacerbare la difficoltà dei bambini nell'affrontare i problemi, in quanto essi vengono abituati a risolvere solamente alcune tipologie di problemi.



3. Fattori ambientali

I libri di testo differiscono anche nelle illustrazioni dei problemi.

Illustrazioni figurative:

Rappresentano in modo decorativo la situazione del problema.

Illustrazioni organizzative:

Chiariscono le relazioni matematiche tra le quantità e aiutano il risolutore a costruire un modello mentale coerente del problema.

(Vicente et al., 2020, 2022)

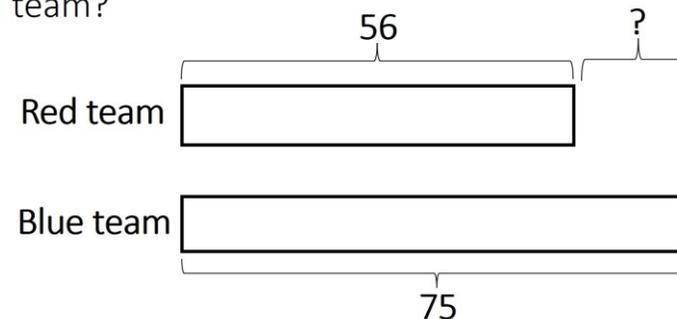
FIGURATIVE ILLUSTRATION



In a basketball game, the red team scored 56 points and the blue team scored 75 points.
How many points did the red team score less than the blue team?

ORGANIZATIONAL ILLUSTRATION

In a basketball game, the red team scored 56 points and the blue team scored 75 points.
How many points did the red team score less than the blue team?



Per riassumere...

Caratteristiche del problema		
Fattori numerici	Fattori linguistici	Interazione di fattori linguistici e numerici

Caratteristiche individuali		
Capacità numeriche	Capacità linguistiche	Capacità dominio-general



Fattori ambientali

IL CASO DEI PROBLEMI INCONSISTENTI

Interazione tra caratteristiche linguistiche e numeriche

- Presenza di **parole chiave** semanticamente legate ad un'operazione aritmetica (Pape, 2003):
 - «in più» → addizione
 - «in meno» → sottrazione

Sandra ha 12 macchinine. Giorgio ha 8 macchinine in più di Sandra. Quante macchinine ha Giorgio?



Problemi consistenti e inconsistenti

In base al significato semantico del termine di relazione distinguiamo:

- **problemi consistenti** → termine di relazione **congruente** con l'operazione aritmetica

- *Sandra ha 12 macchinine. Giorgio ha 8 macchinine in più di Sandra. Quante macchinine ha Giorgio?*



- **problemi inconsistenti** → termine di relazione **incongruente** rispetto all'operazione

- *Sandra ha 12 macchinine. Lei ha 8 macchinine in più di Giorgio. Quante macchinine ha Giorgio?*



Problemi consistenti e inconsistenti

- Problemi **inconsistenti sono più difficili** rispetto ai problemi consistenti (Hegarty et al., 1992; Lewis & Mayer, 1987; Riley & Greeno, 1988; Schumacher & Fuchs, 2012).

→ Effetto congruenza (*consistency effect*)

	<i>M</i>	<i>SD</i>
<i>Control instruction</i>		
Consistent unmarked	0.86	0.04
Consistent marked	0.87	0.03
Inconsistent unmarked	0.65	0.05
Inconsistent marked	0.48	0.06

Effetto congruenza in bambini di quinta primaria (De Koning et al., 2017)

Problemi consistenti e inconsistenti

- La maggior parte degli errori dei problemi inconsistenti è **reversal error** → soggetto applica erroneamente l'operazione aritmetica congruente al termine di relazione (Lewis & Mayer, 1987; Stern & Lehrndorfer, 1992; Verschaffel et al., 1992).

Da *Mediaworld*, un telefono cellulare costa € 37. Questo importo è di € 2 in più rispetto allo stesso telefono cellulare da *Expert*. Quanto costa un telefono cellulare da *Expert*?

$$\begin{array}{r} 37 + \\ \underline{2} = \\ 39 \end{array}$$

39 EURO

Problemi consistenti e inconsistenti

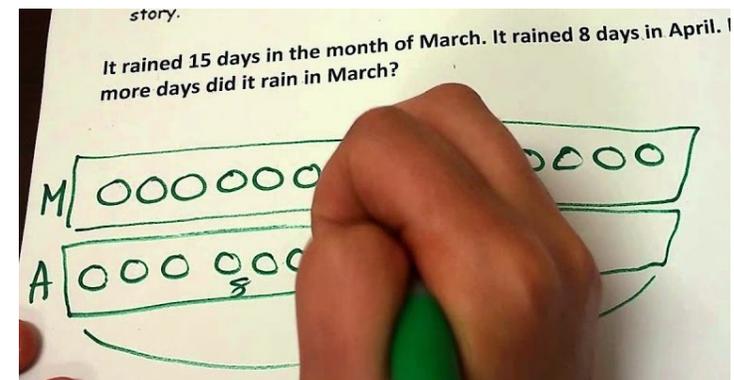
- Problemi consistenti: **strategia di traduzione diretta** (Hegarty et al., 1995).

Strategia superficiale basata sulla parola chiave.

Marc has 6 marbles. Seth has 4 more marbles than that Marc has. How many marbles do they have alto

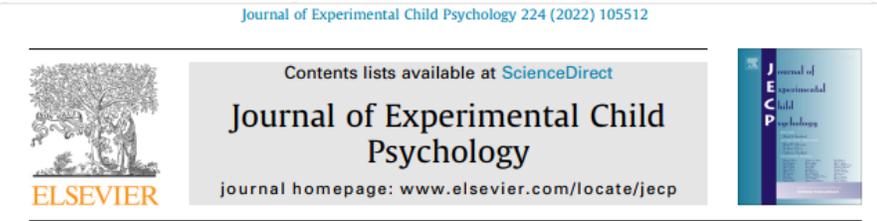
- Problemi inconsistenti: **strategia basata sulla rappresentazione del problema** (Hegarty et al., 1995).

Strategia che richiede una comprensione profonda del problema e la costruzione del modello mentale.



Studio di Passolunghi et al. 2022: abilità cognitive nei problemi consistenti e inconsistenti

- Lo studio aveva lo scopo di:
 1. Verificare l'effetto congruenza in un contesto italiano
 2. Esaminare il ruolo di diverse abilità cognitive (intelligenza fluida, comprensione del testo, aggiornamento, inibizione) nel risolvere problemi consistenti e inconsistenti



The role of working memory updating, inhibition, fluid intelligence, and reading comprehension in explaining differences between consistent and inconsistent arithmetic word-problem-solving performance

Maria Chiara Passolunghi^{a,*}, Gonzalo Duque De Blas^b, Barbara Carretti^c, Isabel Gomez-Veiga^b, Eleonora Doz^a, Juan Antonio Garcia-Madruga^b

^a Department of Life Sciences, University of Trieste, 34128 Trieste, Italy

^b National Distance Education University (UNED), 28015 Madrid, Spain

^c Department of General Psychology, University of Padova, 35131 Padova, Italy

ARTICLE INFO

Article history:
Received 3 June 2021
Revised 26 May 2022

Keywords:

Inhibition
Updating
Word problem solving
Fluid intelligence
Working memory
Reading comprehension
Inconsistent problems

ABSTRACT

Children's performance in arithmetic word problems (AWPs) predicts their academic success and their future employment and earnings in adulthood. Understanding the nature and difficulties of interpreting and solving AWP is important for theoretical, educational, and social reasons. We investigated the relation between primary school children's performance in different types of AWP and their basic cognitive abilities (reading comprehension, fluid intelligence, inhibition, and updating processes). The study involved 182 fourth- and fifth-graders. Participants were administered an AWP-solving task and other tasks assessing fluid intelligence, reading comprehension, inhibition, and updating. The AWP-solving task included comparison problems incorporating either the adverb *more than* or the adverb *less than*, which demand consistent or inconsistent operations of addition or subtraction. The results showed that consistent problems were easier than inconsistent problems. Efficiency in solving inconsistent problems is related to inhibition and updating. Moreover, our results seem to

Metodo

- Allo studio hanno partecipato bambini di quarta e quinta.
- Ai bambini si sono somministrate le seguenti prove:
 - **Abilità di soluzione dei problemi** (adattamento da Hegarty et al., 1992)
 - **Intelligenza fluida** (Cattell Culture Fair Intelligence Test; Cattell & Cattell, 1963)
 - **Inibizione** (Stroop color task; Stroop, 1935)
 - **Aggiornamento** (Carretti et al., 2014)
 - **Comprensione del testo** (MT; Cornoldi et al., 2017)

Metodo

MATERIALE

1. **Abilità di soluzione dei problemi** (adattamento da Hegarty et al., 1992)

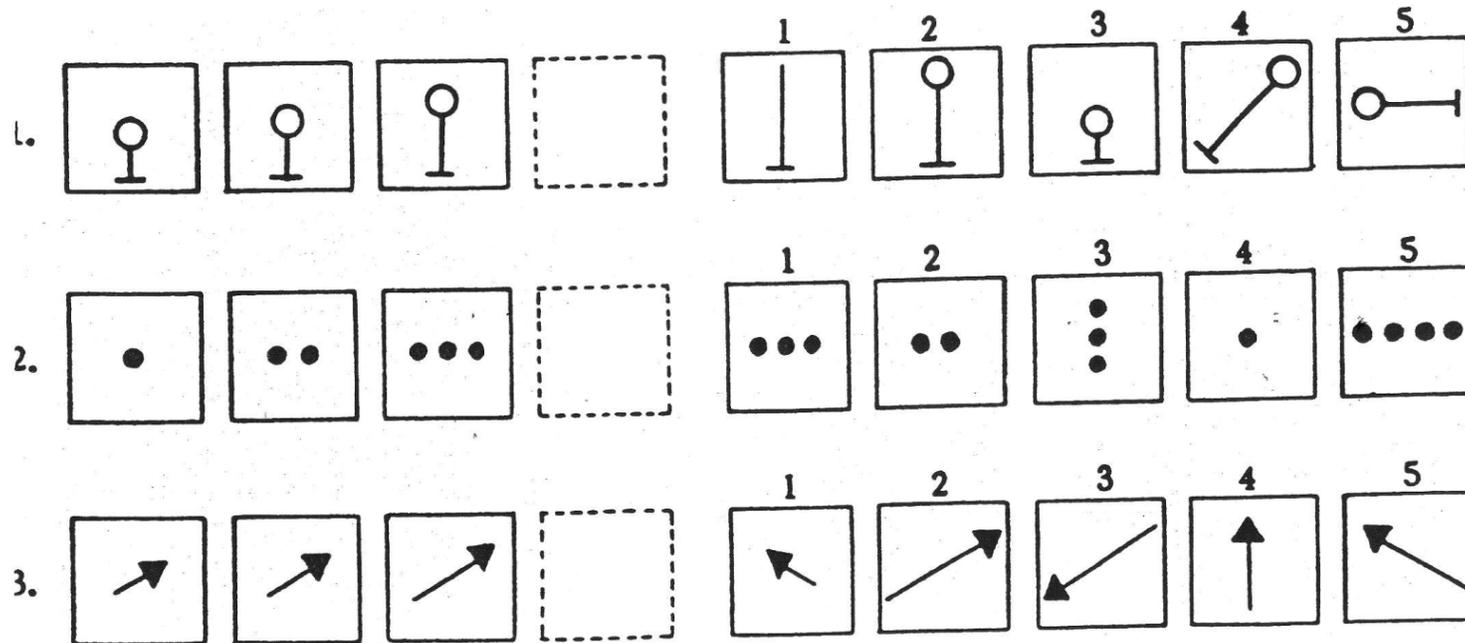
- La prova comprendeva problemi **consistenti** e **inconsistenti**.
- Metà dei problemi richiedevano **una operazione** e metà **due operazioni**.

1. Da *Eurospin*, una bottiglia grande di aranciata costa 2,20 euro. La stessa bottiglia di aranciata costa 20 centesimi in meno da *Lidl*. Quanto costa da *Lidl* una bottiglia di aranciata?
2. Da *Cisalfa*, una palla da pallacanestro costa 8 euro. Questo prezzo è di 3 euro inferiore rispetto al costo della stessa palla da pallacanestro da *Sportler*. Quanto costa da *Sportler* una palla da pallacanestro?

Metodo

MATERIALE

2. Intelligenza fluida (Cattell Culture Fair Intelligence Test; Cattell & Cattell, 1963)



Metodo

MATERIALE

3. Inibizione (Stroop color task; Stroop, 1935)

XXXXX	VERDE	ROSSO
XXXXX	GIALLO	VERDE
XXXXX	ROSSO	BLU
XXXXX	BLU	GIALLO
XXXXX	GIALLO	NERO
Condizione neutrale	Condizione congruente	Condizione incongruente

Effetto Stroop= RT condizione
neutrale- RT condizione incongruente

Metodo

MATERIALE

4. Aggiornamento (Carretti et al., 2014)

LISTA 2	LISTA 3
Zucca	Tappo
Sedia	Berretto
Coperta	Bottone
Torta	Giornale
Lavagna	Cucchiaino
Pentola	Oliva
Remo	Maniglia
Quaderno	Portafoglio

Metodo

MATERIALE

5. Comprensione del testo (MT; Cornoldi et al., 2017)

L'ORSO BIANCO

L'orso bianco vive nel Mar Glaciale Artico e in alcune terre ad esso vicine.

A volte, però compie lunghe migrazioni, che lo portano anche migliaia di chilometri lontano dal punto di partenza, alla ricerca delle zone dove le foche sono più numerose. È infatti un predatore insaziabile che deve nutrirsi moltissimo per accumulare enormi quantità di grasso.

Solo così potrà superare il lungo e rigido inverno, durante il quale è praticamente impossibile trovare qualche preda.

Rispondi alle seguenti domande facendo una croce sulla risposta giusta.

1. (IL) Per trovare più foche l'orso bianco:

- A** fa molta fatica
 - B** compie lunghi viaggi
 - C** corre molto veloce
 - D** si guarda bene attorno
-

Risultati (1)

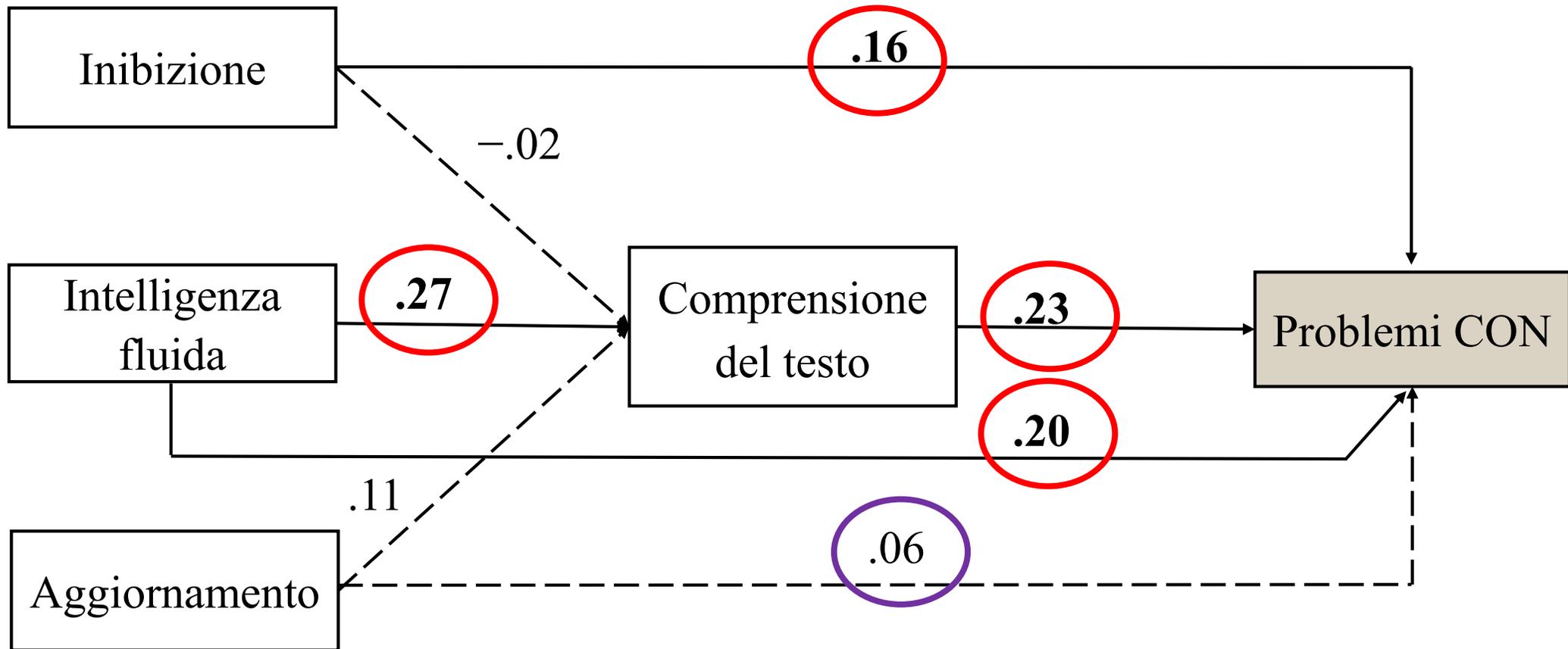
Misure	M	DS	
Problemi CON	3.30	0.89	$F(1,181) = 415.08,$ $p < .01, \eta^2 = .69$
Problemi INCON	2.58	2.38	
Problemi una operazione	2.70	0.95	
Problemi due operazioni	1.93	1.06	
Problemi totali	5.87	2.79	

Risultati (2)

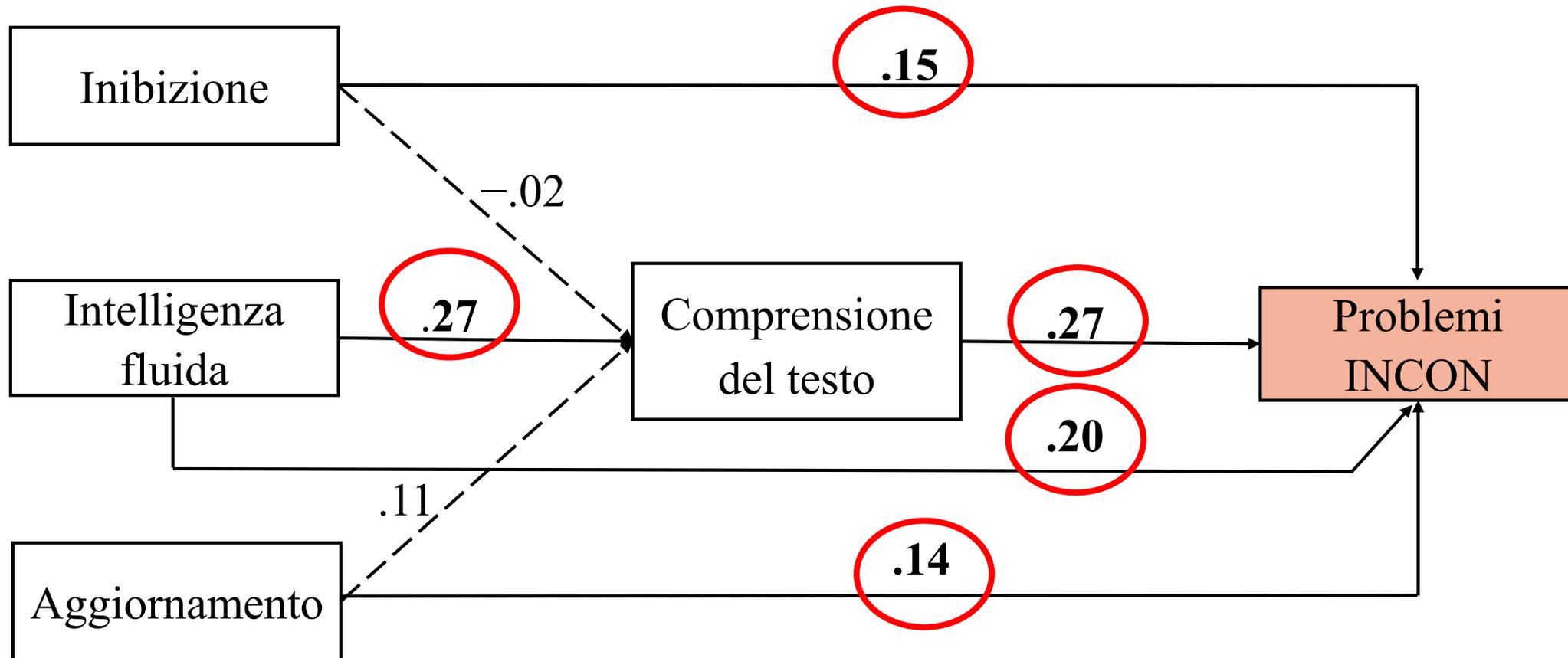
Misure	M	DS
Problemi CON	3.30	0.89
Problemi INCON	2.58	2.38
Problemi una operazione	2.70	0.95
Problemi due operazioni	1.93	1.06
Problemi totali	5.87	2.79

$F(1, 181) = 102.43,$
 $p < .01, \eta^2 = .36$

Risultati (3)



Risultati (4)



Discussione

I risultati dimostrano il ruolo fondamentale delle abilità cognitive:

- **Comprensione del testo**
- **Intelligenza fluida**
- **Inibizione** → coinvolta nella soluzione di problemi consistenti e inconsistenti.
- **Aggiornamento** → entrerebbe in gioco nella soluzione di problemi più complessi, la cui soluzione richiede la creazione di una rappresentazione mentale del problema.

Discussione

- “pericolo della parola chiave”
- La **rappresentazione mentale** della situazione problematica è cruciale per una corretta risoluzione (Mayer & Hegarty, 1996).

Verifica di matematica

Problemi con + e -

1. Quali parole ti aiutano nei problemi con il +

RIMANE	RESTA	IN TUTTO	COMPLESSIVAMENTE
TOTALE	IN PIÙ	MANCA	DIFFERENZA

2. Quali parole ti aiutano nei problemi con il -

IN TUTTO	RIMANE	IN MENO	MANCA	RESTA
DIFFERENZA	TOTALE	IN PIÙ	RIMANGONO	

ESERCITAZIONE

Immaginate di voler **sviluppare e valutare l'efficacia di un intervento** per migliorare le abilità di soluzione di **problemi inconsistenti** in bambini di scuola primaria.

Nel progettare l'intervento, tenete in considerazione quanto detto su:

- L'importanza della rappresentazione mentale;
- Il ruolo dell'updating;
- Il pericolo della parola chiave.

1. Su quali **componenti o processi cognitivi** si focalizza l'intervento e perché?
2. Quali **attività** (esercizi, giochi, strategie, istruzioni...) proponete per sviluppare le componenti o i processi cognitivi identificati? Fornite degli esempi concreti di tali attività.
3. Come sono **strutturate** le attività proposte (durata, modalità individuale o collettiva...)?
4. Come **valutate l'efficacia** di questo intervento?