Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 1

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

2 ottobre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Calcolare il dominio[1] delle seguenti corrispondenze.

a) $\mathrm{Id}\colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \rightsquigarrow n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

b) $d\colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \rightsquigarrow \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

c) $o\colon m \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow -m \in \mathbb{Z}$[2];

d) $i\colon q \in \mathbb{Q} \rightsquigarrow \dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$[3];

e) $\widetilde{r}\colon x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow +\sqrt{x}, -\sqrt{x} \in \mathbb{R}$[4];

f) descrivere a parole proprie le precedenti corrispondenze.

Suggerimento: coadiuvarsi con dei diagrammi di Eulero-Venn.

Esercizio 2. Considerate le corrispondenze dell’esercizio 1 aventi il dominio distinto dall’insieme di partenza: come si potrebbero modificare in modo che il dominio coincida con l’insieme di partenza?

Esercizi 3. Quali delle seguenti corrispondenze sono funzioni?

a) $\mathrm{Id}\colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \rightsquigarrow n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

---

[1] Per la soluzione si rimanda all’esercizio 3.

[2] Con il simbolo $\mathbb{Z}$ si intende l’*insieme dei numeri interi*. Ingenuamente si assume che la gentile lettrice\il gentile lettore sappia operare con questo insieme e coi suoi elementi.

[3] Con il simbolo $\mathbb{Q}$ si intende l’*insieme dei numeri razionali*. Ingenuamente si assume che la gentile lettrice\il gentile lettore sappia operare con questo insieme e coi suoi elementi.

[4] Con il simbolo $\mathbb{R}$ si intende l’*insieme dei numeri reali*. Ingenuamente si assume che la gentile lettrice\il gentile lettore sappia operare con questo insieme e coi suoi elementi.

b) $d\colon n \in 2\mathbb{N}_{\geq 0} \rightsquigarrow \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}_{\geq 0}$[5];

c) $o\colon m \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow -m \in \mathbb{Z}$;

d) $i\colon q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightsquigarrow \dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$;

e) $\widetilde{r}\colon x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \rightsquigarrow +\sqrt{x}, -\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

Suggerimento: coadiuvarsi con dei diagrammi di Eulero-Venn.

Esercizi 4.

a) Sia S un insieme. Dimostrare che $Id_S\colon x \in S \to x \in S$ si è una *funzione*, detta *identità di* S.

b) Siano S un insieme e T un suo sottoinsieme. Dimostrare che $i\colon t \in T \to t \in S$ è una *funzione*, detta *inclusione di* T *in* S.

c) Siano S e T insiemi, e sia $t \in T$; considerate le funzioni:

$$f_1\colon s \in S \to t \in T$$
$$f_2\colon s \in S \to t \in \{t\}$$

entrambe sono funzioni con valore costante t. Supposto che $T \neq \{t\}$: si ha che $f_1 \neq f_2$?

Esercizi 5. Calcolare l'insieme immagine delle seguenti corrispondenze; e determinare quali di esse sono funzioni.

a) $p\colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

b) $d\colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n+1 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$;

c) $\pm\colon m \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow -m, +m \in \mathbb{Z}$;

d) $pos\colon x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$;

e) $pos{+}\colon x \in \mathbb{R} \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}$.

Esercizi 6. Date le funzioni:

$$\forall n \in \{2,3\},\ p_n\colon x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$$

calcolare le anti-immagini degli elementi di $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Esercizi 7.

a) Sia $f\colon S \to T$ una funzione. Dimostrare che $\mathrm{Im}(f) = T$ se e solo se $f^{-1}(t) \neq \emptyset$ per ogni $t \in T$; in particolare, se solo se $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ per ogni $U \subseteq T$ non vuoto.

b) Quali funzioni degli esercizi 3 ed 5 sono suriettive?

c) Date le seguenti funzioni:

[5] Col simbolo $2\mathbb{N}_{\geq 0}$ si indica l'insieme ottenuto moltiplicando per 2 gli elementi di $\mathbb{N}_{\geq 0}$.

c.1) $p_0 \colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to 2n \in 2\mathbb{N}_{\geq 0}$,
c.2) $pos_0 \colon x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,
c.3) $pos{+}_0 \colon x \in \mathbb{R} \to x^2 + 1 \in \mathbb{R}_{\geq 1}$;

perché esse sono funzioni suriettive?

Esercizi 8. Quali funzioni degli esercizi 3, 5 e 7.c mettono in corrispondenza elementi distinti del dominio con uno stesso elemento del codominio?

Esercizi 9.

a) Siano S un insieme e T un suo sottoinsieme. Dimostrare che la funzione i descritta nell'esercizio 4.b è una funzione iniettiva. In simboli si userà scrivere
$$i \colon t \in T \hookrightarrow t \in S.$$

b) Studiare la iniettività e la suriettività delle funzioni degli esercizi 4.b e 4.c.

c) Sia $f \colon S \to T$ una funzione. Dimostrare che la proprietà:
$$\forall x \neq y \in S,\ f(x) \neq f(y)$$
è equivalente alla proprietà:
$$\forall x, y \in S,\ f(x) = f(y) \in T \Rightarrow x = y.$$

Esercizi 10.

a) Sia $f \colon S \to T$ una funzione iniettiva. Dimostrare che $g \colon s \in S \to f(s) \in \operatorname{Im} f$ è una funzione biettiva di S in $\operatorname{Im}(f)$.

b) Proseguendo l'esercizio 9.b: dire se e quali funzioni sono biettive.

Esercizi 11. Dimostrare che le seguenti funzioni sono biettive:

a) $s_r \colon n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to n + 1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$;

b) Ogni numero naturale (<u>0 incluso</u>) può essere scritto (univocamente) come $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_k \cdot 10^k + \ldots$ ove $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ e solo <u>finiti</u> di questi sono diversi da 0. Si studi la funzione
$$s \colon a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_k \cdot 10^k + \ldots \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to$$
$$\to (a_0 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_{2k} \cdot 10^k + \ldots, a_1 + a_3 \cdot 10 + \ldots + a_{2k+1} \cdot 10^k + \ldots) \in \mathbb{N}_{\geq 0} \times \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

c) $m \colon x \in [-1, 1] \to \dfrac{1}{2}x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

d) Siano $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *coprimi*[6]. Si studi la funzione $f \colon (a, b) \in \mathbb{N}_{\geq 0} \times \mathbb{N}_{\geq 0} \to p^a q^b \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Esercizio 12. Sia $S = \{x, y, z\}$ e si considerino le permutazioni di S:
$$f(x) = x,\ f(y) = z,\ f(z) = y;$$
$$g(x) = y,\ g(y) = x,\ g(z) = z.$$
Dimostrare che $f \circ g \neq g \circ f$.

[6] Dei numeri interi si definiscono *coprimi* se il loro *massimo comun divisore* è 1.