Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 2

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

2 ottobre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizi 1. Calcolare il modulo, il complesso coniugato e l'elemento inverso dei seguenti numeri complessi:

$$i, 1+i, \sqrt{2}-i, 2-\sqrt{3}i, -i+3, -2(1-i), \sqrt{-2+3i}, \frac{i-1}{i+1}.$$

Esplicitare la parte reale ed immaginaria dei numeri determinati.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti numeri complessi:

$$(1+i)^{-3}, \frac{1+2i}{1-2i}\cdot\left(1+\sqrt{5}i\right)^2-i, \left(1+\sqrt{3}i\right)^5+i.$$

Esercizio 3. Calcolare le radici quadrate dei seguenti numeri complessi:

$$2(1-i), 1-i, \sqrt{3+i}.$$

Esercizio 4. Calcolare le seguenti radici complesse:

$$\sqrt{1-\sqrt{3}i}, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[6]{1}, \sqrt{i}, \sqrt[3]{i}.$$

Esercizio 5. Considerata la seguente funzione:

$$f\colon z\in\mathbb{C}\to\overline{z}\in\mathbb{C},$$

dimostrare che:

a) f è una funzione biettiva;

b) determinare f^{-1}.

Esercizio 6. Calcolare le radici dei seguenti polinomi (di secondo grado):

$$2x^2 - 3x + 4, 2x^2 + 3x + 4, x^2 + x + 1, x^2 - x + 1, ix^2 + 1, x^2 + i.$$

Scomporli come prodotti di polinomi di primo grado.

Esercizi 7.

a) Si consideri la struttura algebrica $\mathbb{V} = (\{\bullet\}, f; \mathbb{R}, g)$, ove:

$$f(\bullet, \bullet) = \bullet$$
$$g(\alpha, \bullet) = \bullet, \text{ ove } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che $\mathbb{V}$ è uno spazio vettoriale reale.

b) Dimostrare che ogni campo, rispetto alle proprie operazioni, è uno spazio vettoriale su sé stesso.

c) Sull'insieme $\mathbb{R}^n$ si definiscano le operazioni:

$$+ \colon \; ((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (somma termine a termine)},$$
$$\cdot \colon \; (\alpha, (a_1, \ldots, a_n)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ (prodotto termine a termine)}.$$

Dimostrare che $(\mathbb{R}^n, +; \mathbb{R}, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

d) Sia $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile x. Dimostrare che $(\mathbb{R}[x], +; \mathbb{R}, \cdot)$, rispetto alle usuali operazioni di somma di polinomi $+$ e di prodotto di un polinomio per un numero reale $\cdot$, è uno spazio vettoriale.

e) Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ l'insieme dei polinomi in una variabile x e di grado massimo $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Analogamente all'esempio precedente, dimostrare che questi è uno spazio vettoriale.