Esercitazioni di “Geometria”
Foglio 3

Titolare del corso: Prof. Daniele Zuddas

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

9 ottobre 2024

“La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Siano $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Considerato $\mathbb{R}^2$ come spazio vettoriale reale di “dimensione 2”, calcolare:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha\,(a_1, a_2) + \beta\,(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 2. Siano $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2$ (spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali). Calcolare:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2.$$

Esercizio 3. In luogo del campo $\mathbb{R}$, nei precedenti esercizi si considerino il campo $\mathbb{Q}$ o il campo $\mathbb{C}$. I metodi risolutivi cambierebbero?

Esercizio 4. Svolgere i seguenti calcoli:

$$-2(1,-3)+4(-2,5), -4(1,2)+5(2,1), -7(1,0)+7\left(1,-\frac{2}{7}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$-3(1,0,2)+(3,2,1), \frac{4}{5}(-5,10,5)+\frac{2}{3}(3,-6,-9), \pi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)-\pi\left(\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{4}{6}\right) \in \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt[3]{2}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{4} & -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \end{pmatrix} - \sqrt[3]{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^3, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^2.$$

Esercizi 5.

a) Dimostrare che:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^n_n,\ (A \times B)^T = B^T \times A^T.$$

$$\forall diag(a_1, \ldots, a_n), diag(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n_n,\ diag(a_1, \ldots, a_n) \times diag(b_1, \ldots, b_n) = diag(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

b) Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_2,\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_3,$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3_3,\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_2;$$

calcolare i seguenti prodotti di matrici: $AB, BA, AC, BD, BE, CB, CC, DD, EE, DE, ED, ABD$.

Esercizi 6.

a) Qual è un polinomio p a coefficienti reali, di grado 3, avente zeri *semplici* in $-\sqrt{2}$, 0 e $\sqrt{2}$?

b) Ma tale polinomio p può avere coefficienti razionali?

c) Tale polinomio p esiste unico?

Esercizi 7.

a) Qual è un polinomio q a coefficienti reali, di grado 4, avente zeri *semplici* in -1, 0 e 1?

b) Ma tale polinomio q può avere coefficienti razionali?

c) Tale polinomio q esiste unico?

d) E se tale polinomio q avente uno zero *doppio* tra quelli dati, come cambierebbe la precedente risposta?

Esercizio 8. Dato il seguente polinomio $r(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

a) Scomporre $r(x)$ sul campo $\mathbb{C}$.

b) Scomporre $r(x)$ sul campo $\mathbb{R}$.

c) Scrivere in coordinate polari gli zeri di $r(x)$.