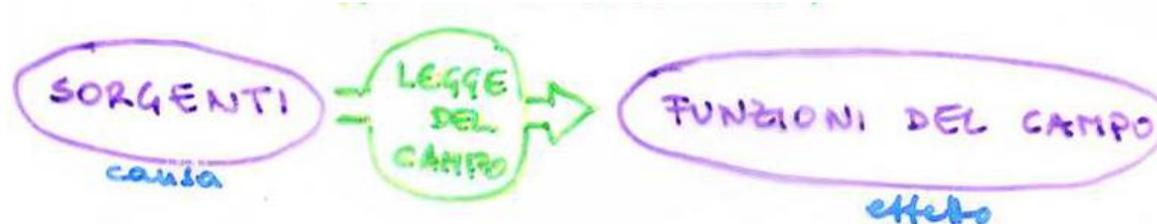


## CAMPO

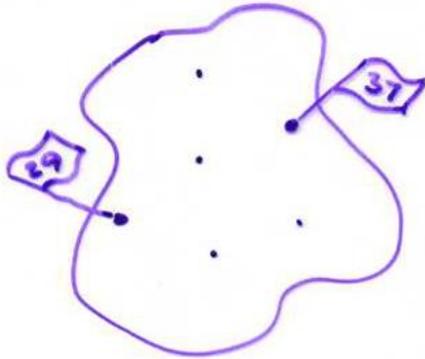
Un campo è uno stato fisico dello spazio o della materia contenuta (ad esempio, magnetico, gravitazionale, termico-elastico, acustico...) ed è descritto dalle grandezze fisiche che lo caratterizzano. Quando decidiamo di utilizzare alcune grandezze piuttosto che altre per descriverlo, realizziamo un modello matematico del campo. Ogni campo ha delle sorgenti (sorgente di calore, massa, carica elettrica). Queste sorgenti possono essere puntiformi o estese in una regione dello spazio. La distribuzione delle sorgenti è descritta da una funzione chiamata densità delle sorgenti. Problema di base: data la distribuzione e l'intensità delle sorgenti, calcolare il campo stesso, cioè la funzione  $f(r,t)$ . Per fare questo, abbiamo bisogno di una relazione sperimentale tra sorgente e campo, chiamata legge di campo (ad esempio, legge di Newton, leggi di Maxwell).



Di solito la legge di campo è una relazione tra le sorgenti e la variazione delle funzioni che descrivono il campo intorno a ciascun punto.

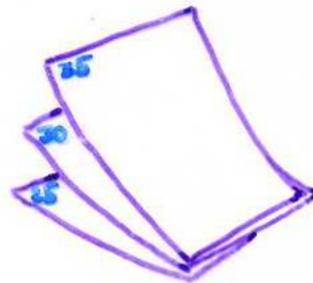


## CAMPO SCALARE



Un campo scalare esiste in una regione dello spazio se in ogni punto di quella regione e in ogni istante di tempo è definito un numero che indica la grandezza di una grandezza fisica o correlata. Avendo scelto un sistema di coordinate, il campo è descritto da una funzione chiamata potenziale di campo  $f=f(r,t)$

Esempi: campo termico, campo di densità, campo di potenziale gravitazionale. Superfici in cui la funzione potenziale ha lo stesso valore in ogni punto della superficie e in un tempo  $t_0$  :  $f(r, t_0)=c(t_0)$

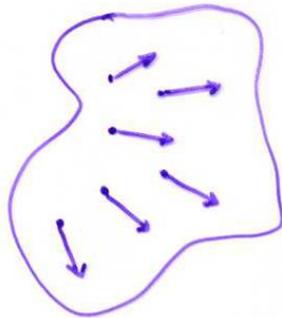


Sono chiamate superfici equipotenziali.



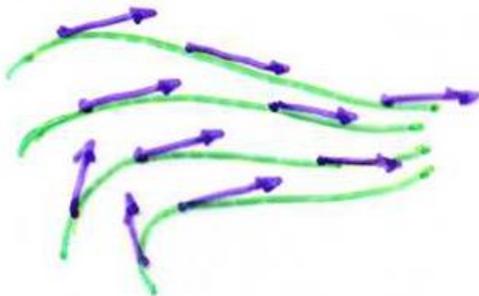
## CAMPO VETTORIALE

Un campo si dice vettoriale se in ogni punto della regione e in ogni istante è definito un vettore che indica una grandezza fisica:

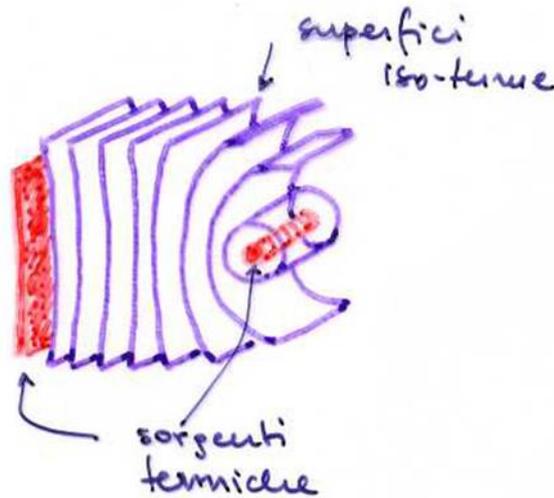


$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{r}, t) = \begin{bmatrix} v_1(\underline{r}, t) \\ v_2(\underline{r}, t) \\ v_3(\underline{r}, t) \end{bmatrix}$$

Esempi: campo elettrico, campo magnetico, campo di velocità.



Le linee di involuppo dei vettori di campo sono chiamate linee di flusso. I vettori sono sempre tangenti alle linee di flusso.



## GRADIENTE

Consideriamo le superfici equipotenziali di un campo termico  $T(r, t)$ . Per indicare la differenza di temperatura per unità di percorso nella direzione di massima variazione, si introduce il concetto di gradiente di temperatura. Esempi: gradiente geotermico:  $3^\circ$  per 100 m; gradiente di pressione (atm): 10KPa per 1000 m

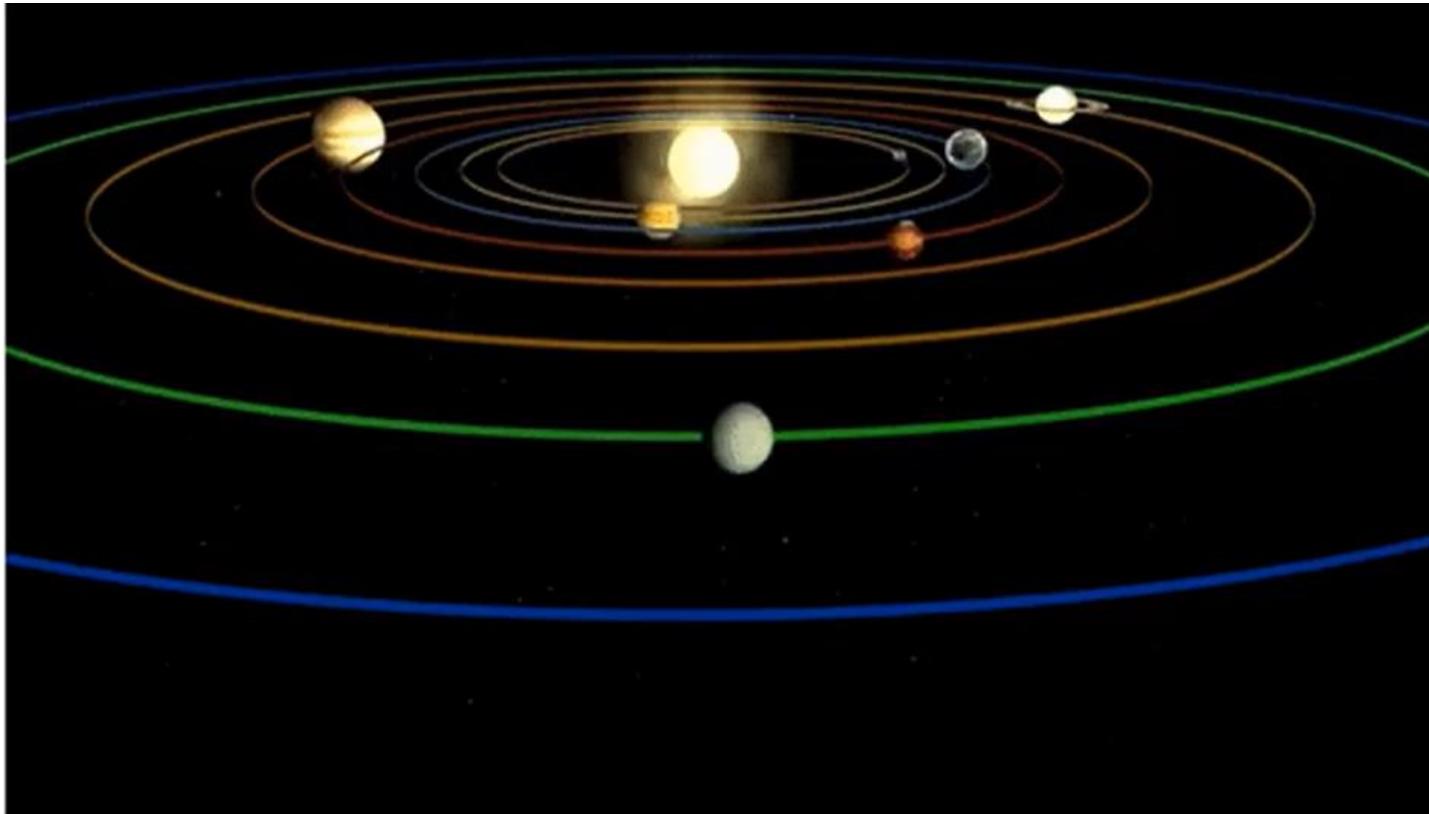
Il gradiente indica la variazione della grandezza scalare nella direzione in cui tale variazione, per unità di percorso, è maggiore. Il gradiente è un vettore.

ESEMPIO: il flusso di calore è proporzionale al gradiente di temperatura, ma con direzione opposta. La componente del  $\text{grad } T$  in ciascuna direzione è data dal tasso di variazione di  $T$  in quella direzione. Così la componente  $x$  sarà  $\delta T / \delta x$ ,  $y$  che sarà  $\delta T / \delta y$  e  $z$  che sarà  $\delta T / \delta z$ . Pertanto, in coordinate cartesiane : Tradotto con [www.DeepL.com/Translator](http://www.DeepL.com/Translator) (versione gratuita)

$$\text{Grad}T = \left( \delta T / \delta x, \delta T / \delta y, \delta T / \delta z \right)$$



# **LEGGE GRAVITAZIONE UNIVERSALE**





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

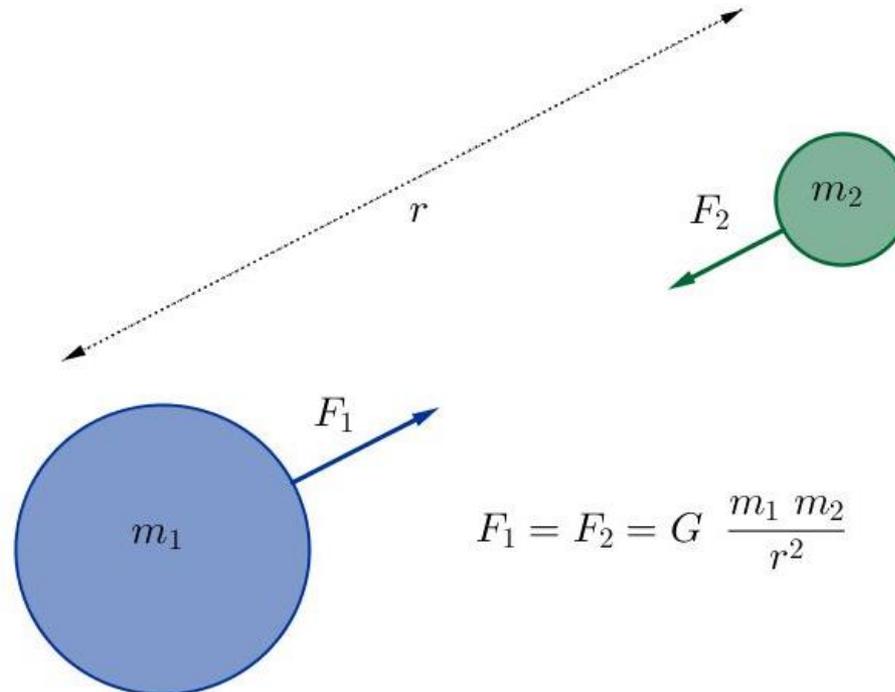
## **Campo di gravità: introduzione**

La gravità è una forza conosciuta fin dall'antichità. Molti fenomeni a cui assistiamo ogni giorno possono essere spiegati grazie ad essa: è la causa per cui rimaniamo a contatto con il suolo, ci incliniamo verso il centro della curva quando siamo in movimento e la Terra ruota intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica.

Isaac Newton, scienziato a cui dobbiamo le tre leggi della dinamica, enunciò la forza di gravità nella sua opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), in termini coerenti con le osservazioni disponibili all'epoca e in accordo con i principi della dinamica da lui stesso enunciati: questa affermazione è sufficiente a spiegare la maggior parte dei fenomeni che ancora oggi ci circondano.

## Campo di gravità: introduzione

La legge formulata da Newton afferma quanto segue: due corpi dotati di massa si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa.





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

*Sapendo che la massa della Terra è  $5,972 \cdot 10^{24}$  kg e che la massa della Luna è  $6,7 \cdot 10^{22}$  kg, calcolare la forza di attrazione che si ha tra di loro tenendo conto che distano a 384400 km.*

## *Dati:*

**Massa della Terra:**  $M_T = 5,972 \cdot 10^{24}$  kg

**Massa della Luna:**  $M_L = 6,7 \cdot 10^{22}$  kg

**Distanza Terra-Luna:**  $d = 384400$  km

**Costante di Gravitazione Universale:**  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N  $\cdot$  m<sup>2</sup> / kg<sup>2</sup>

## *Calcolare:*

**Forza di attrazione Terra-Luna:**  $F$  ?





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

## Svolgimento:

**Riportiamo il valore della distanza in metri utilizzando la notazione scientifica:**

$$d = 384400 \text{ km}$$

$$d = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$$

**Sostituendo i valori nella legge di Gravitazione Universale:**

$$F = G \frac{M_T \cdot M_L}{d^2}$$

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(3,844 \cdot 10^8 \text{ m})^2}$$



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

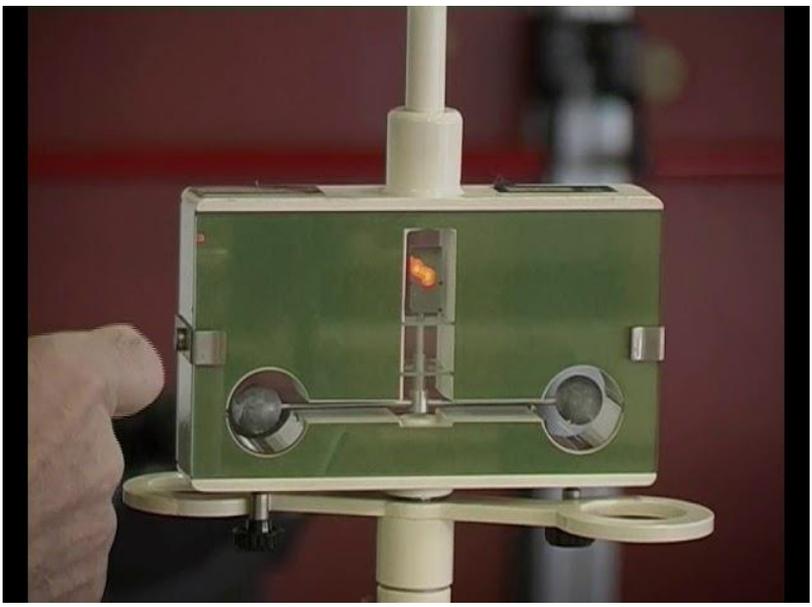
*Giovanni Costa*

$$F = \frac{(6,67 \cdot 5,972 \cdot 6,7) \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24} \cdot 10^{22}}{14,78 \cdot 10^{16} \text{ m}^2} \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

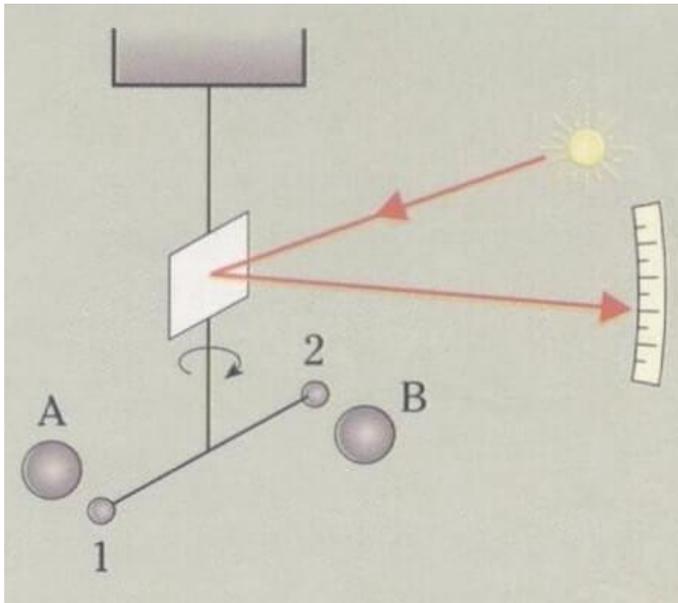
$$F = 1,805 \cdot 10^{20} \text{ N}$$



## **Bilancia di Cavendish**



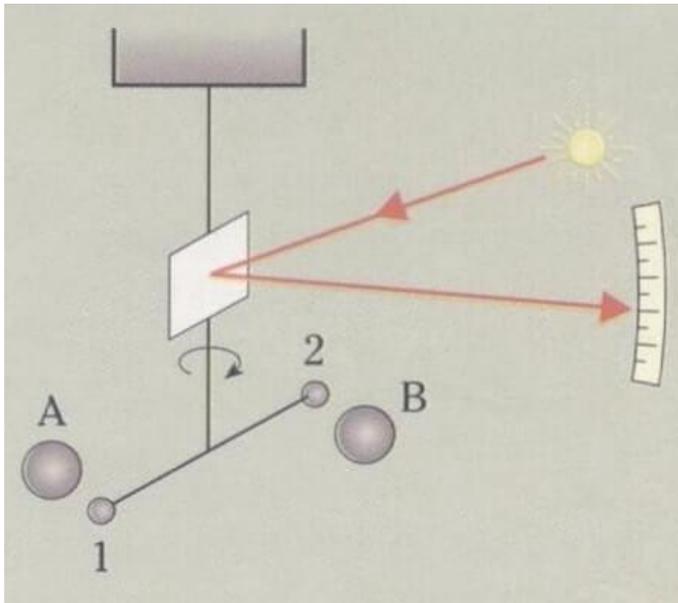
## Bilancia di Cavendish



Il fisico scozzese \*Henry Cavendish\* nel 1797-1798 realizzò in laboratorio un esperimento fondamentale che permise di calcolare il valore della costante di gravitazione universale  $G$  e della massa della Terra. Tale calcolo fu effettuato solo diversi anni più tardi sul finire del diciannovesimo secolo. L'esperienza di Cavendish prevedeva l'utilizzo di una bilancia di torsione ovvero due piccole sfere di piombo legate all'estremità di un'asta rigida lunga e leggera sospesa per il suo punto medio attraverso un sottile filo di quarzo.



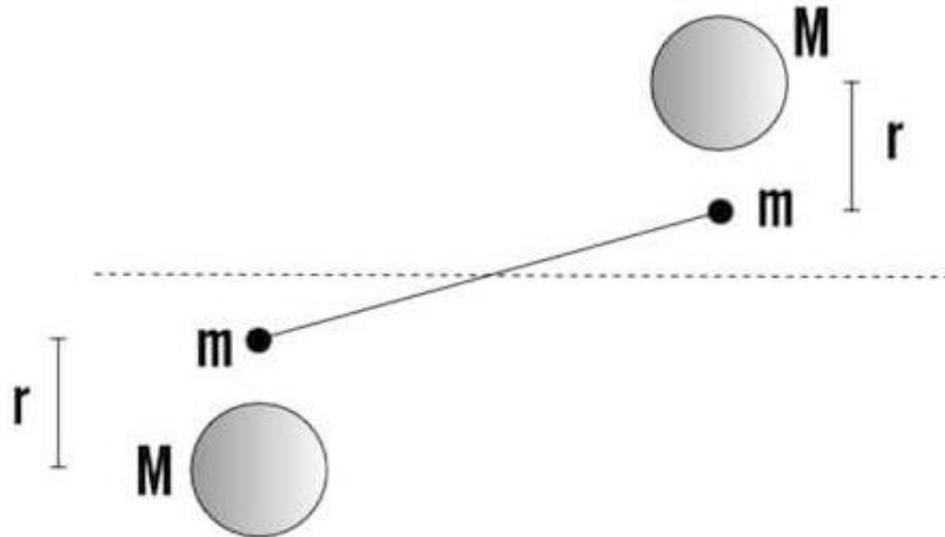
## Bilancia di Cavendish



Poiché per la legge di gravitazione universale le masse di piombo si attirano, l'asta contenente le due sfere subirà una forza e pertanto essa ruoterà. L'angolo di rotazione sarà proporzionale alla forza esercitata tra le sfere e da tale misura Cavendish risalì al calcolo che portò alla determinazione di  $G$  e della massa della Terra.

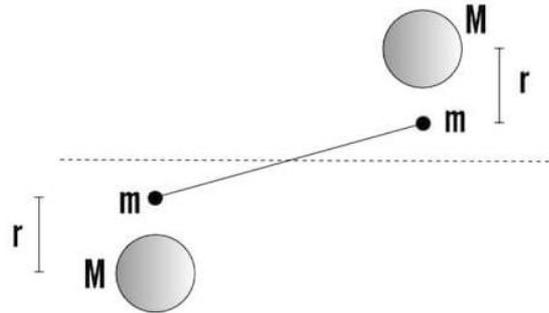


## Bilancia di Cavendish



In una bilancia di Cavendish le masse delle sfere sono rispettivamente di 10 kg e 10 g ( $M$  e  $m$  della figura seguente). Le due masse sono poste a 5 cm di distanza (distanza  $r$ ) e l'asta su cui sono poste le due masse più piccole è lunga 20 cm. Qual è la forza di attrazione tra la sfera grande e quella piccola? Quale momento deve esercitare la sospensione attraverso il filo per bilanciare queste forze?

## Bilancia di Cavendish



$$M = 10 \text{ kg}$$

$$m = 10 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$r = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$d = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

La forza di attrazione gravitazionale che si instaura tra le due masse e che quindi agisce sull'asta su cui sono sospese le piccole masse, facendone variare la rotazione, è pari a:

$$F_g = G \cdot (M \cdot m) / r^2$$

$$F_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) / (5 \cdot 10^{-2})^2$$

$$F_g = 26,7 \cdot 10^{-10} \text{ N}$$

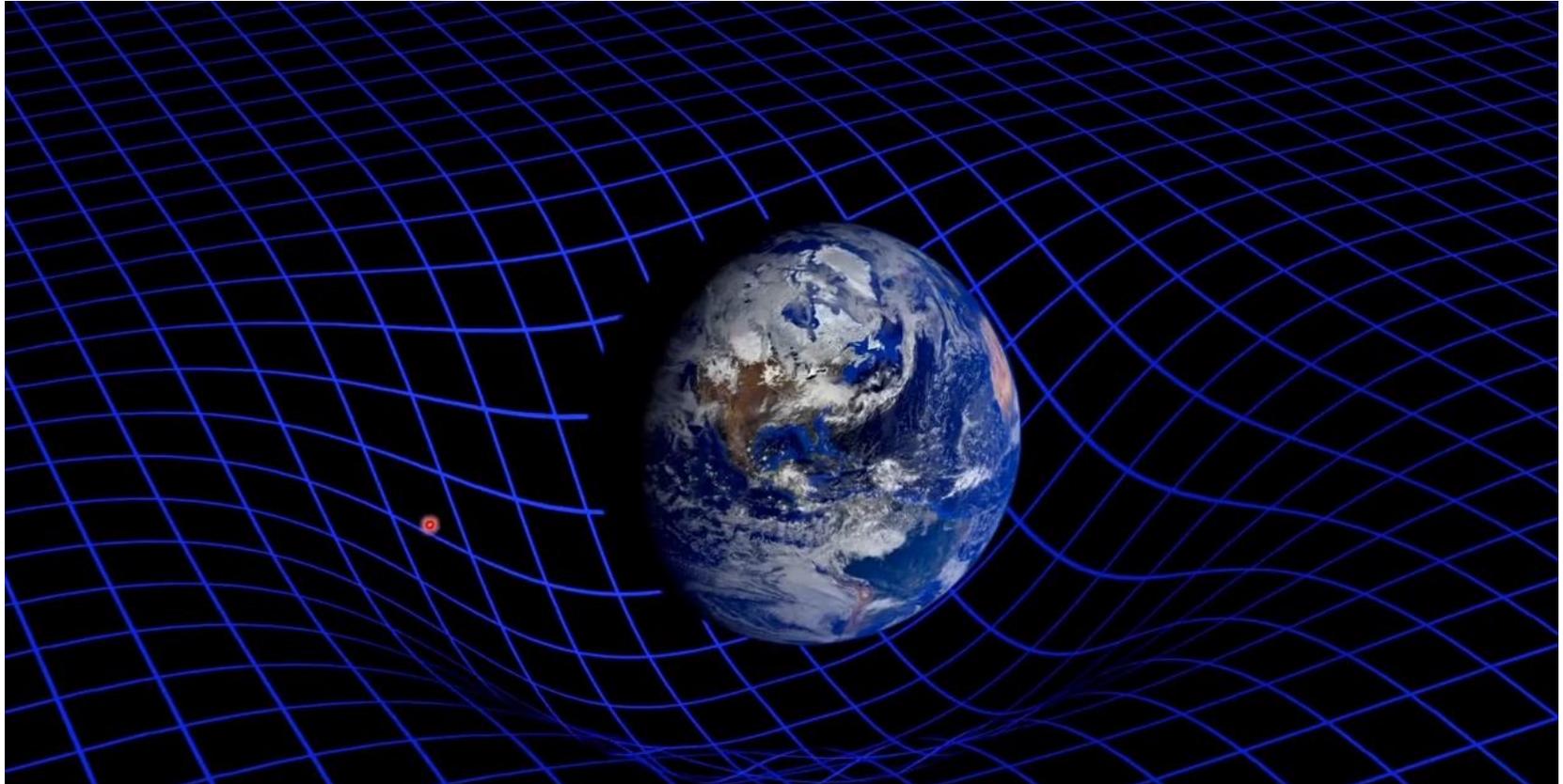
Il momento sarà pari al prodotto della forza di attrazione appena ricavata per il braccio  $d$  dell'asta:

$$M = 26,7 \cdot 10^{-10} \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 534 \cdot 10^{-14} \text{ N}\cdot\text{m}$$



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*





## Campo di gravità: introduzione

Il campo gravitazionale della Terra riflette il tipo di distribuzione della massa all'interno del nostro pianeta ed è strettamente legato alla forma della Terra. L'attrazione gravitazionale tra due oggetti (punti) di massa  $M$  e  $M_0$  a distanza  $r$  è data da

$$\underline{F} = G \frac{MM_0}{r^2} \hat{r}$$

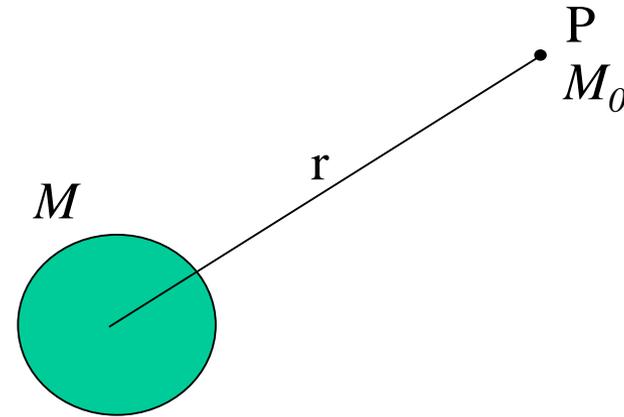
dove  $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  è la costante gravitazionale universale.

- *La determinazione sperimentale di  $G$  era estremamente difficile e fu ottenuta per la prima volta più di un secolo dopo la pubblicazione dei Principia da Lord Charles Cavendish (1731-1810). Da una serie di scrupolose misurazioni della forza di attrazione tra due sfere di piombo, Cavendish determinò nel 1798 il valore di  $G$  come  $6.754 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Un valore attuale è  $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$*
- *Non è ancora stato possibile determinare  $G$  con maggiore precisione, a causa delle difficoltà sperimentali. Sebbene altre costanti fisiche siano oggi note con un'incertezza relativa standard di molto inferiore a  $1 \cdot 10^{-6}$ , la costante gravitazionale è nota solo per  $1 \cdot 10^{-6}$*



## La forza per unità di massa

$$\underline{g} = \frac{F}{M_0} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$$



è l'accelerazione di un oggetto in caduta libera direttamente in  $M$ . La gravità dovuta alle diverse masse è la somma vettoriale nel punto di misurazione  $r_m$  of di gravità dovuta alle singole masse nei punti  $r_s$

$$g(\underline{r}_m) = \sum_s \underline{g}_s = \sum_s GM_s \frac{\underline{r}_s - \underline{r}_m}{(|\underline{r}_s - \underline{r}_m|)^3} = \int_V G\rho \frac{\underline{r}_s - \underline{r}_m}{(|\underline{r}_s - \underline{r}_m|)^3} dV_s$$

**NB: In fisica  $r$  è solitamente diretto dalla massa  $M$  all'osservatore, quindi nelle espressioni precedenti assumerebbe il segno meno. In geofisica è comunque conveniente definire positiva l'accelerazione di gravità verso il centro della Terra.**



## **FORZA PESO**

**L'attrazione di un corpo ed il pianeta terra viene definite come forza peso**

$$\text{FORZA} = F = ma$$

$$\text{FORZA PESO} = mg$$

$$\text{Gravità Terra} = m * 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{PESO oggetto} = m_{(\text{oggetto})} * 9.81 \text{ m/s}^2$$

**Massa > Kg      Peso = forza > Newton (N)      g = accelerazione Gravità m/s<sup>2</sup>**



## POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Un modo per rappresentare indirettamente il campo gravitazionale è il suo potenziale, che per una massa puntiforme è

$$U = \frac{GM}{r}$$

La gravità si ottiene dal suo gradiente:  $\underline{g} = -\underline{\nabla}U$     Ad esempio:  $g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

**NB: Per i fisici ci vorrebbe il segno meno.**

**Il campo gravitazionale è conservativo.**



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

*Un astronauta ha una massa di 75 kg. Per far in modo che il suo peso risulti un terzo rispetto a quello che ha sulla Terra, a che distanza dalla superficie terrestre dovrà fermarsi?*

***Dati:***

**Raggio della Terra:  $R_T = 6371 \text{ km}$**

**Massa astronauta:  $m = 75 \text{ kg}$**

**Peso nello spazio = 1/3 del peso sulla Terra**

**Per la legge di gravitazione universale il peso sulla superficie terrestre è:**

$$F_p = G \frac{M_T * m}{(R_T)^2}$$



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

**Mentre alla distanza  $h$  dalla Terra:**

$$\frac{1}{3} F_p = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(R_T)^2} = \frac{1}{(R_T + h)^2}$$

$$(R_T + h)^2 = 3 \cdot (R_T)^2$$

$$h = 0,73 \cdot 6371 \text{ km}$$

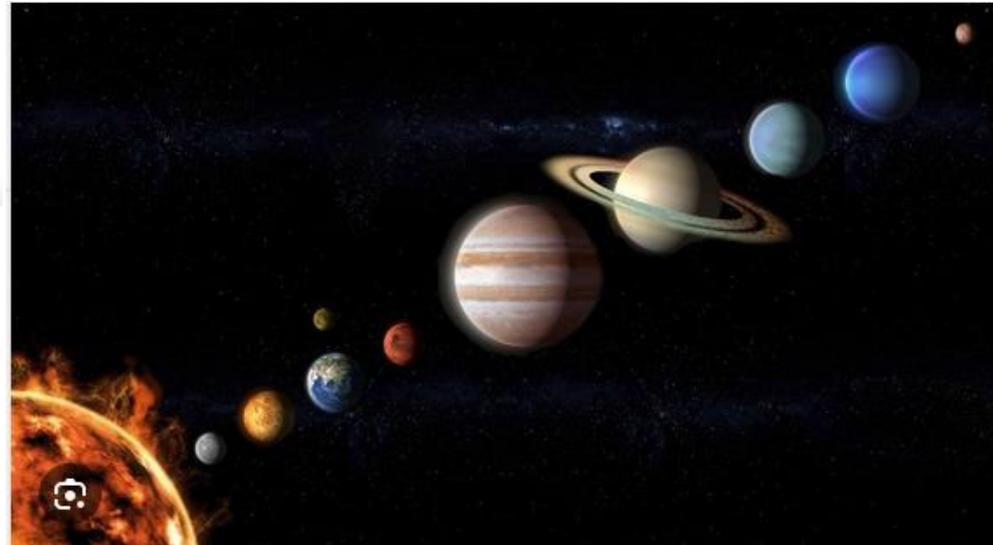
$$h = 4650 \text{ km}$$



# Fisica Terrestre 2024-2025

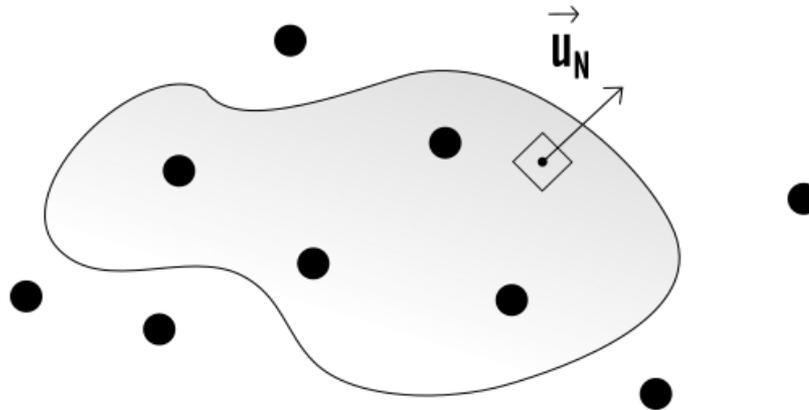
Giovanni Costa

	DIAMETRO (KM)	MASSA (TERRA=1)	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> ) (acqua=1)
MERCURIO	4878	0,055	5,43
VENERE	12104	0,82	5,24
TERRA	12756	1	5,52
MARTE	6794	0,107	3,9
GIOVE	142800	317,8	1,3
SATURNO	120540	94,3	0,7
URANO	51200	14,6	1,2
NETTUNO	49500	17,2	1,6
PLUTONE	2200	0,0025	2,1



## FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Consideriamo  $n$  masse all'interno di una superficie tridimensionale chiusa e consideriamo un elemento infinitesimo di superficie  $dS$ , definiamo il versore  $\vec{u}_N$  come il vettore perpendicolare alla superficie  $dS$  e orientato verso l'esterno



Si definisce flusso  $d\Phi$  infinitesimo di campo vettoriale  $\vec{F}$  attraverso la superficie  $dS$

$$d\Phi = \vec{F} \cdot \vec{u}_N dS$$



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

**Integrando il flusso su tutta la superficie  $dS$  otteniamo il flusso del campo vettoriale attraverso la superficie**

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \vec{u}_N dS$$

**Flusso di un campo gravitazionale:**

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{g} \cdot \vec{u}_N dS$$



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

**La legge di Gauss implica che il potenziale gravitazionale all'esterno di un corpo esteso (sfera) con massa totale  $M$  è uguale a quello dovuto a una massa puntiforme posta nel baricentro del corpo esteso. Pertanto, se la Terra fosse perfettamente sferica e non rotante con una distribuzione di densità dipendente solo dal raggio  $\rho = \rho(r)$ , il potenziale gravitazionale esterno sarebbe semplicemente**

$$U = \frac{GM}{r}$$

**Potenziale newtoniano**

**con la distanza  $r$  tra il centro della Terra e la massa della Terra  $M$ . La gravità sarebbe uguale in ogni punto della superficie terrestre. Il valore dell'accelerazione gravitazionale sulla superficie terrestre varia però - anche se di meno di un centesimo - con un valore medio di circa  $9.8 \text{ ms}^{-2}$  ( $981 \text{ cms}^{-2} = 980 \text{ gal}$ ).**



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

**La Terra, infatti, si differenzia da sferica a un trecentesimo. È appiattita ai poli e rigonfia nelle zone equatoriali, molto simile a un ellissoide di rotazione. L'appiattimento della Terra è dato da**

$$f = \frac{a-b}{a}$$

**dove a e b sono rispettivamente il raggio polare e quello equatoriale. Il valore più recente di f è dato da  $f = 1 / 298,247$ .**

**Il raggio dell'ellissoide di rotazione è dato (al primo termine in f) da**

$$r = a(1 - f \sin^2 \varphi)$$

**dove  $\varphi$  è la latitudine,  $a=6378.14\text{km}$ ,  $b=6356.75 \text{ km}$ .**



## DEVIAZIONE NELLA SIMMETRIA SFERICA

Anche la deviazione del campo gravitazionale esterno del potenziale newtoniano è dell'ordine del trecentesimo e meno ancora. Prima dell'avvento dei satelliti artificiali non si era riusciti (con misure terrestri) a determinare la prima correzione  $J_2$  del campo gravitazionale newtoniano

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 P_2(\cos \Theta) \right] \quad \text{con} \quad J_2 = \frac{C - \bar{A}}{Ma^2}$$

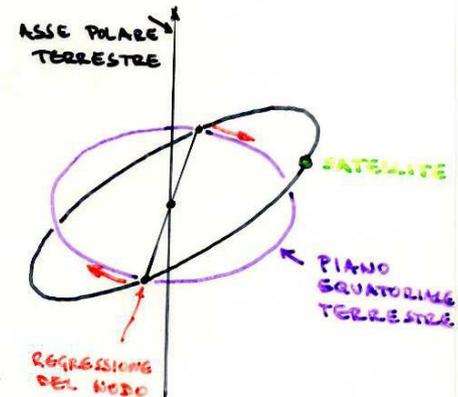
$C$  = il momento inerziale rispetto agli assi polari

$\bar{A}$  = è il momento inerziale medio rispetto agli assi equatoriali

$$P_2(\cos \Theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \Theta - \frac{1}{2} \quad \text{è il secondo polinomio di Legendre e } \Theta \text{ è la colatitude : } \Theta = \pi/2 - \phi$$

Il valore attuale è  $J_2 = 1082.65 \times 10^{-6}$

$J_2$  misura la deviazione del campo gravitazionale reale della Terra dalla simmetria sferica. Il suo contributo fa sì che un satellite artificiale ruoti intorno alla Terra su un piano orbitale che ruota a sua volta in modo retrogrado, fermo restando la sua inclinazione rispetto al piano equatoriale della Terra: orbita di regressione.





## Caso generale

**Il potenziale gravitazionale può essere sviluppato in funzioni sferiche, le cosiddette autofunzioni della sfera (somme di seni e coseni, raggruppati in un certo modo, delle variabili latitudine e longitudine).**

$$U = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_2^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \Theta) + \sum_2^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n P_n^m(\cos \Theta) \times [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] \right\}$$

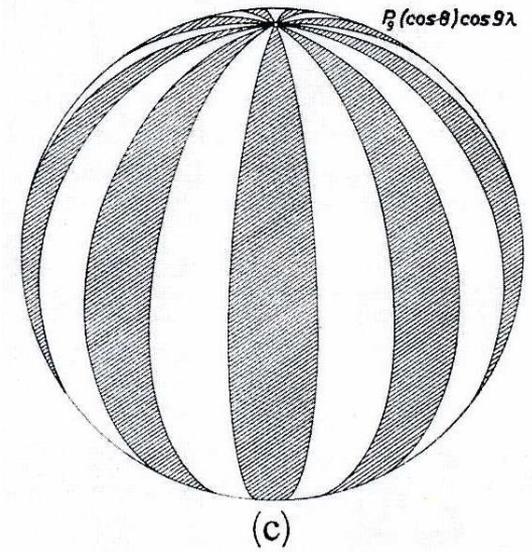
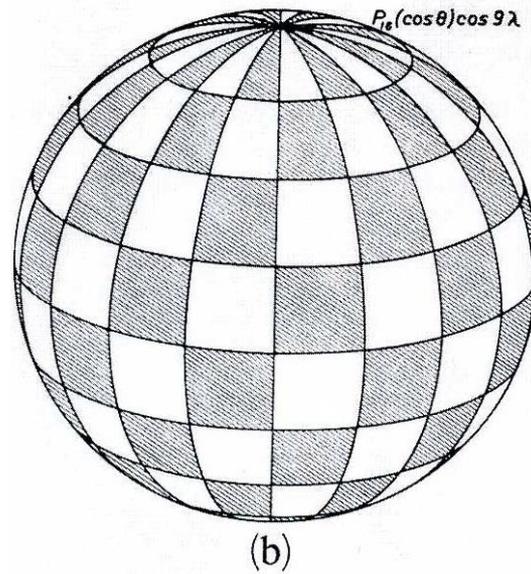
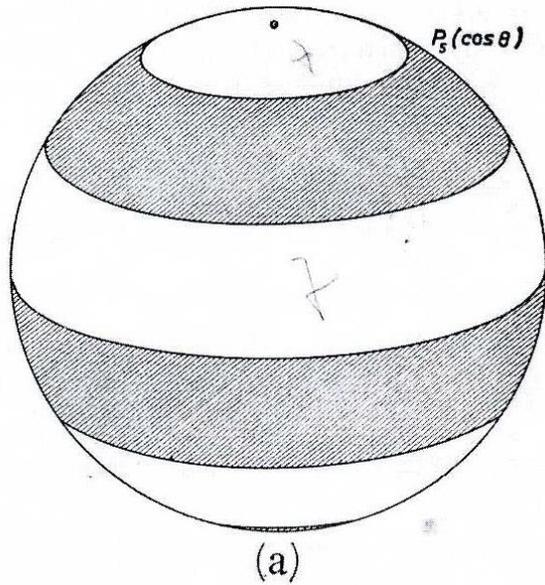
**con  $P_{nm}(\cos \Theta)$  polinomi di Legendre associati (di ordine  $n$  rispetto a  $\cos \Theta$  e  $\sin \Theta$ ) and  $J_n, A_{nm}, B_{nm}$  sono i momenti gravitazionali (da determinare sperimentalmente). Si noti che i termini del primo ordine in  $\Theta$  ( $n = 1$ ) non compaiono, avendo scelto il baricentro della Terra come origine del sistema di riferimento!**

**All'inizio degli anni '60 erano noti una decina di momenti zionali  $J_n$  (che generano perturbazioni secolari nelle orbite dei satelliti artificiali) e un momento dieci tesserali  $A_{nm}, B_{nm}$  creare invece variazioni periodiche di breve durata.**



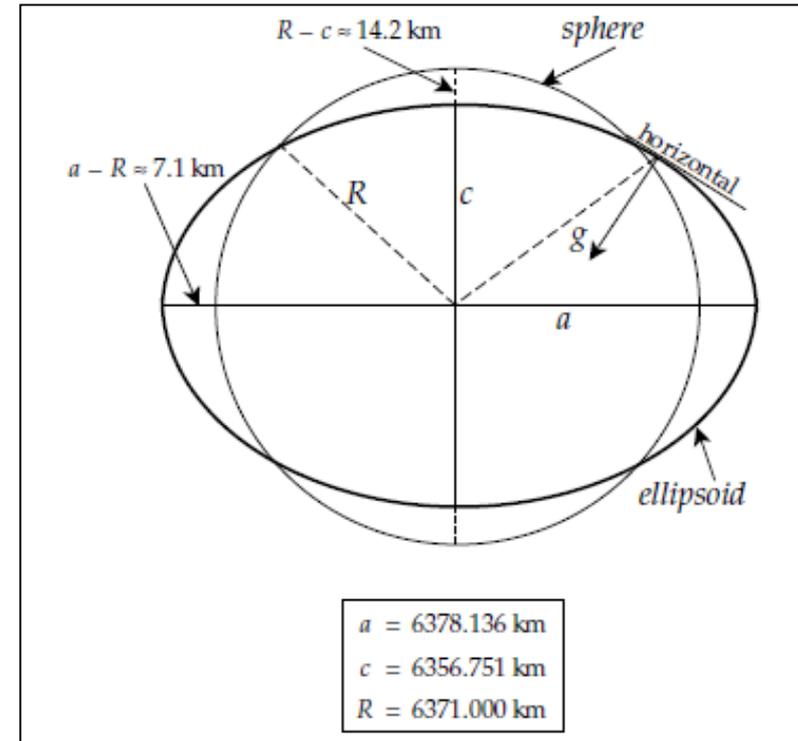
# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



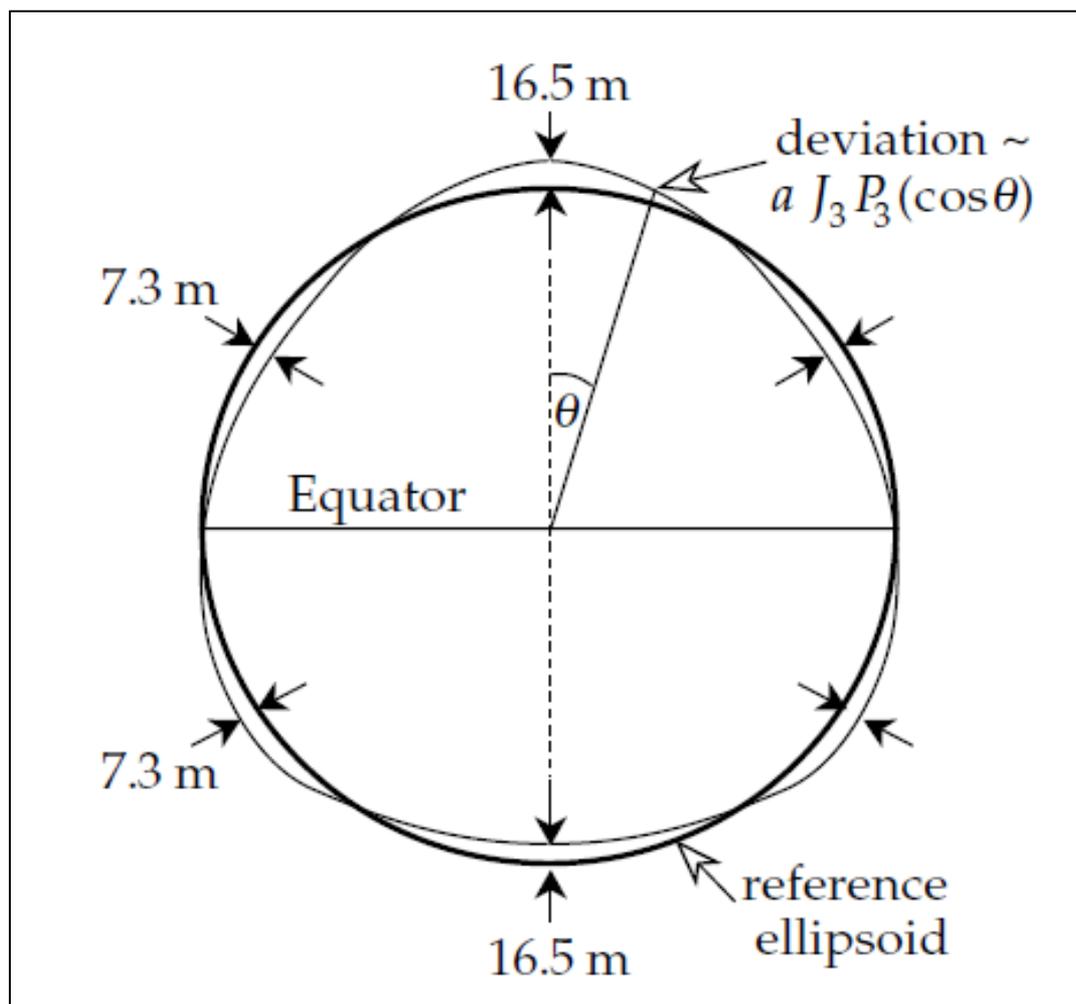
## La figura della Terra

- La migliore approssimazione matematica alla figura è un ellissoide oblato, o sferoide. La determinazione precisa delle dimensioni della Terra (ad esempio, i suoi raggi polari ed equatoriali) è l'obiettivo principale della scienza della geodesia. Richiede una conoscenza esatta del campo gravitazionale terrestre, la cui descrizione è l'obiettivo della gravimetria.



- Le moderne analisi della forma della Terra si basano su osservazioni precise delle orbite dei satelliti terrestri artificiali. Questi dati vengono utilizzati per definire l'ellissoide oblato più adatto, chiamato Ellissoide Internazionale di Riferimento.

- Nel 1980 l'Associazione Internazionale di Geodesia ha adottato un Sistema di Riferimento Geodetico (GRS80).







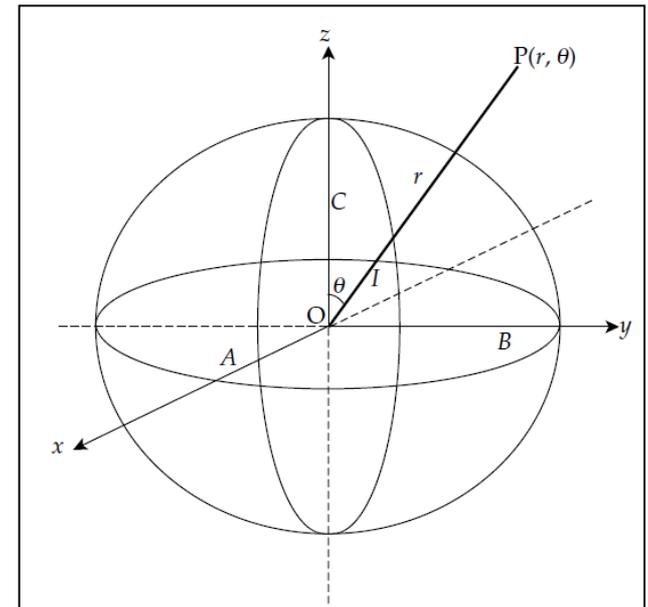
## INERTIAL MOMENT

Per lo studio della struttura interna della Terra è di grande interesse il valore medio del momento di inerzia

$$I = \frac{A+B+C}{3} \approx \frac{C+2\bar{A}}{3}$$

che insieme alla densità media della Terra

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi a^2 b}$$



e dati sismologici, permette di determinare la distribuzione della densità all'interno della Terra.



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Per un pianeta a densità costante (sfera omogenea) il momento d'inerzia adimensionale è il risultato di

$$I^* = \frac{I}{MR^2} = 0.4$$

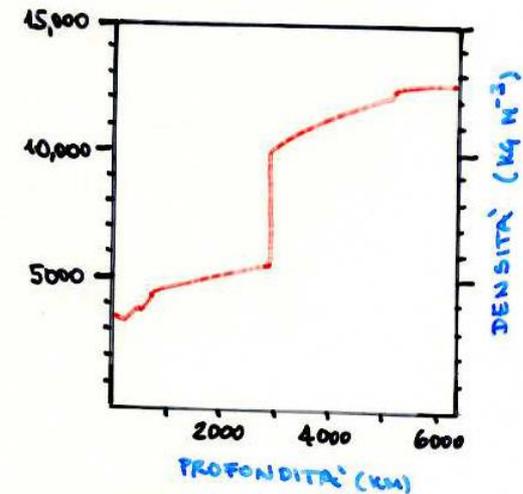
Se la densità all'interno del pianeta cresce dall'esterno verso l'interno,  $I^*$  assume valori inferiori a 0,4; viceversa se la densità diminuisce con la profondità, avrà un valore maggiore di 0,4. In base alle osservazioni per la Terra è  $I^* = 0,33076$ , che corrisponde a una notevole concentrazione della massa terrestre nelle aree centrali del pianeta.

## Cause di crescita della densità con la profondità:

1. Compressione dovuta agli strati sovrastanti
2. Aumentano con la profondità degli elementi pesanti
3. Possibili transizioni di fase ad alta pressione

## Cause della diminuzione della densità con la profondità:

1. Aumento della temperatura verso l'interno della Terra
2. Fusione Separazione (parziale) dei componenti con la densità inferiore



chiaramente sono più efficaci le cause di crescita della densità con la profondità.

In caso di forti inversioni di densità, sulla regione di bassa densità agirebbe il cosiddetto “galleggiamento di Archimede” che riporta le regioni ad alta densità sotto quelle a bassa densità.



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

## **POTENZIALE ROTAZIONALE E POTENZIALE TOTALE**

**Per la Terra che ruota intorno ai suoi assi con velocità angolare  $\omega$ , dobbiamo anche considerare la forza centrifuga in un punto a distanza  $r$  dagli assi di rotazione  $\omega$  da:**

$$\underline{F} = \omega^2 \underline{r} \cdot m$$

**Il campo di forza è conservativo e il suo potenziale è::**

$$U_R = \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

## Gravità

### Accelerazione centripeta

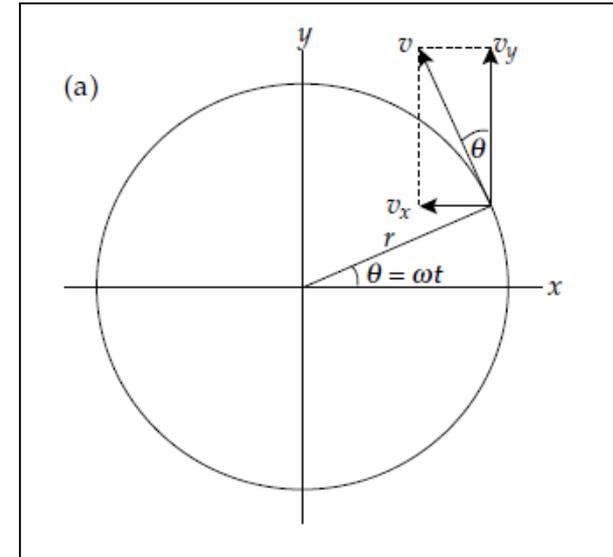
- La prima legge del moto di Newton afferma che ogni oggetto continua nel suo stato di riposo o di moto uniforme in linea retta, a meno che non sia costretto a cambiare tale stato dalle forze che agiscono su di esso.
  - Il mantenimento di uno stato di moto è dovuto all'inerzia del corpo. Un sistema in cui questa legge è valida è detto sistema inerziale.
  - Il moto in cerchio implica che sia attiva una forza che modifica continuamente lo stato di moto rettilineo. Newton riconobbe che la forza era diretta verso l'interno, verso il centro del cerchio, e la chiamò forza centripeta (che significa “alla ricerca del centro”).
  - Sostenendo che il percorso curvo di un proiettile in prossimità della superficie terrestre fosse dovuto all'effetto della gravità, che lo faceva cadere costantemente verso la Terra, Newton ipotizzò che, se la velocità del proiettile fosse stata esattamente quella giusta, esso non avrebbe mai potuto raggiungere la superficie terrestre.
- Newton ipotizzò che la Luna fosse tenuta in orbita attorno alla Terra proprio da una forza centripeta di questo tipo, originata dall'attrazione gravitazionale della Terra.



## Gravità

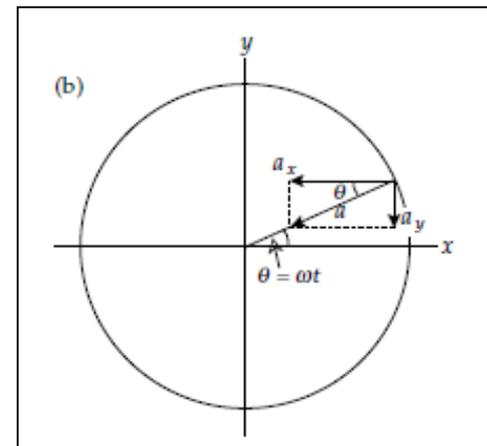
La forma matematica dell'accelerazione centripeta per il moto circolare con velocità angolare costante  $\omega$  intorno a un punto può essere derivata come segue: definire gli assi cartesiani ortogonali  $x$  e  $y$  rispetto al centro del cerchio. La velocità lineare  $v$  in ogni punto in cui il vettore raggio forma un angolo  $\theta = (\omega t)$  con l'asse  $x$  ha componenti:

$$\begin{aligned} v_x &= -v \sin(\omega t) = -r\omega \sin(\omega t) \\ v_y &= v \cos(\omega t) = r\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad [Eq 17]$$



Le componenti  $x$  e  $y$  dell'accelerazione si ottengono differenziando le componenti della velocità rispetto al tempo. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega v \cos(\omega t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y &= -\omega v \sin(\omega t) = -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad [Eq 18]$$



Queste sono le componenti dell'accelerazione centripeta, che è diretta radialmente verso l'interno e ha la grandezza  $\omega^2 r$



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

## Gravità

### Accelerazione centripeta

- Il passeggero di un'auto che percorre una curva tende a essere spinto verso l'esterno. È trattenuto in posizione dal telaio del veicolo, che fornisce l'accelerazione centripeta necessaria per consentire al passeggero di percorrere la curva in auto
- L'inerzia del corpo del passeggero lo fa proseguire in linea retta e lo spinge verso l'esterno contro la fiancata del veicolo.
- Questa forza verso l'esterno è chiamata forza centrifuga. Si genera perché l'automobile non rappresenta un sistema di riferimento inerziale.
- La forza centrifuga sembra abbastanza reale per il passeggero dell'auto, ma viene definita una pseudo-forza, o forza inerziale. A differenza della forza centripeta, che deriva dall'attrazione gravitazionale, la forza centrifuga non ha un'origine fisica, ma esiste solo perché viene osservata in un quadro di riferimento non inerziale.



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

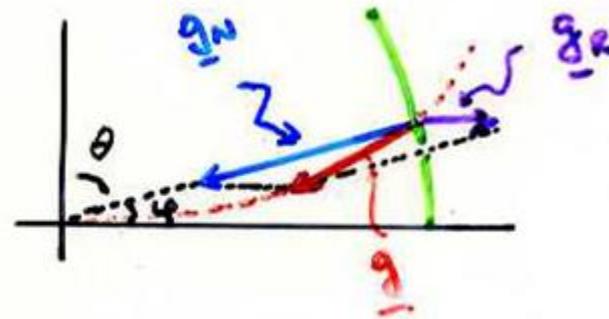
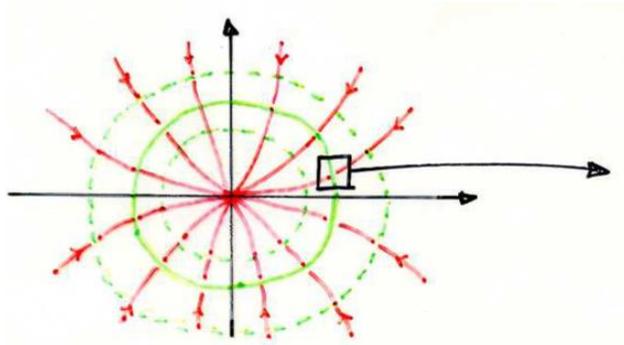
L'accelerazione gravitazionale che agisce su un corpo sarà minore di quella che agisce su un corpo situato sulla Terra che non ruota.

$$g = g_n - \omega^2 a \cos^2 \varphi$$

Il potenziale gravitazionale totale è la somma del potenziale di campo della forza newtoniana e della forza centrifuga.

$$U = U_N + U_R = \frac{GM}{r} [1 - \dots] + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \vartheta$$

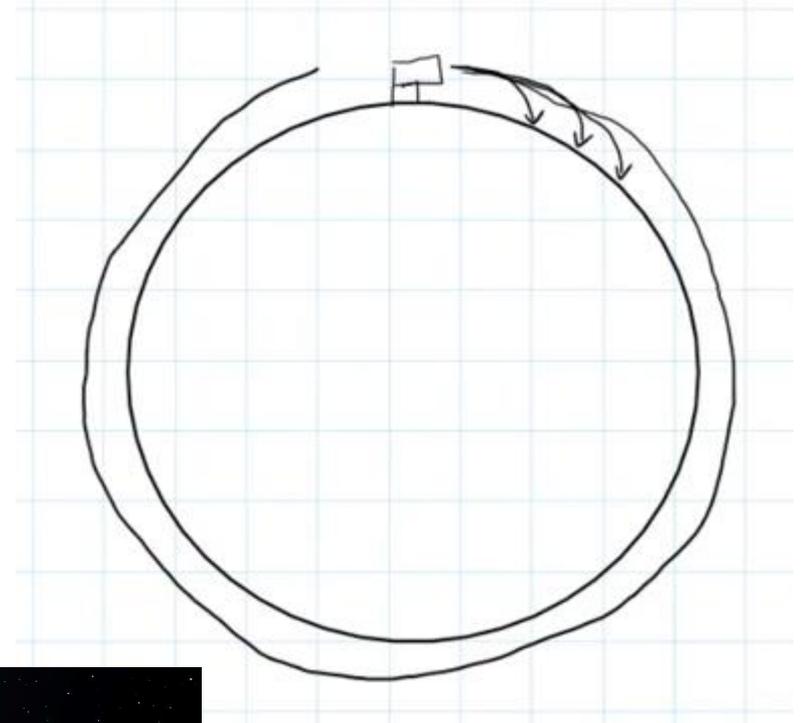
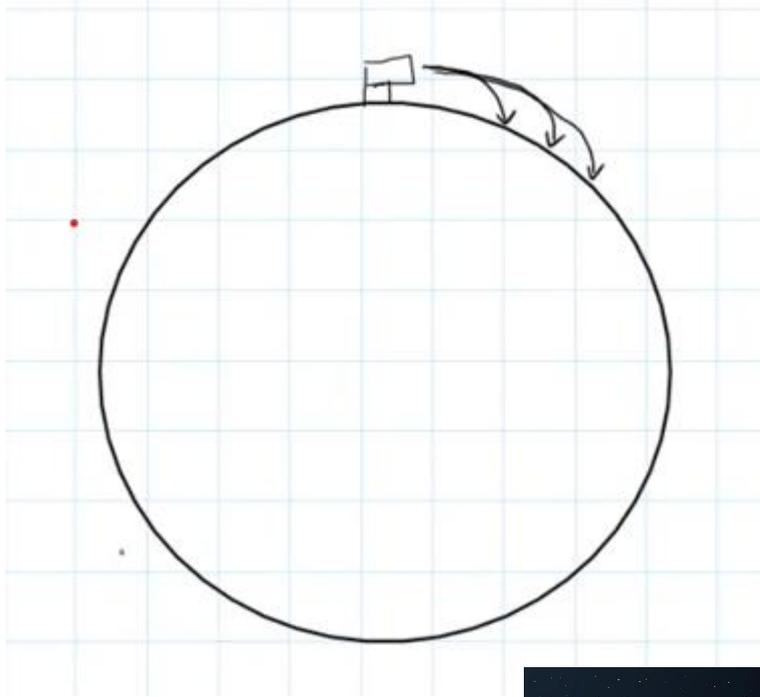
La concavità delle linee di forza del campo totale è diretta verso l'asse di rotazione e le superfici equipotenziali hanno forma di ellissoide chiuso





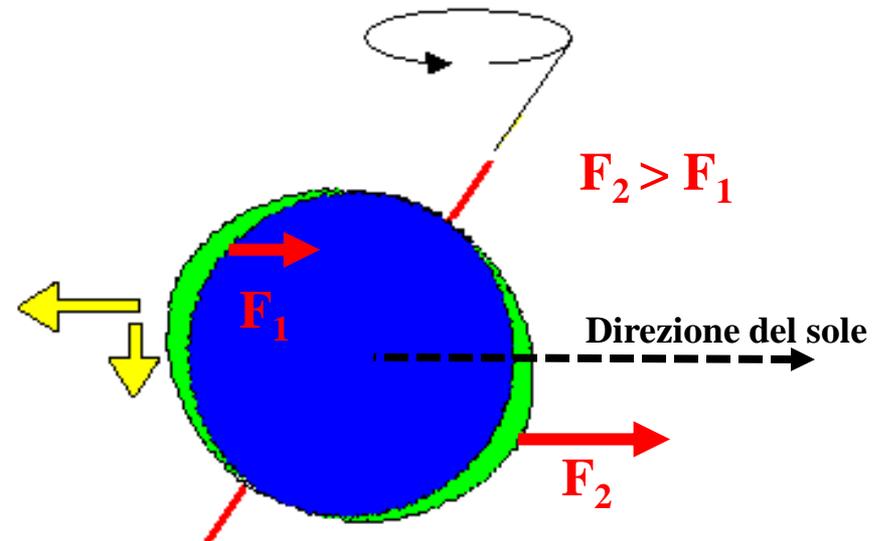
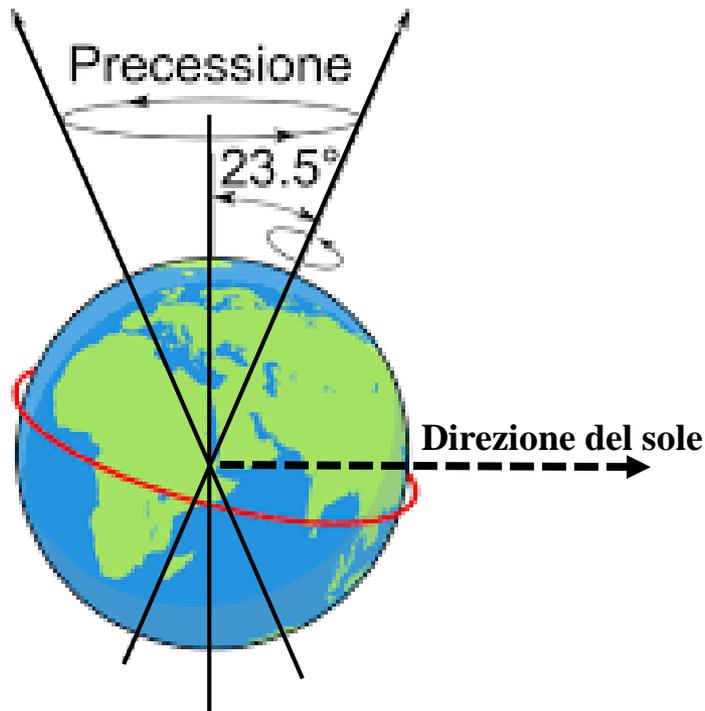
# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



## La precessione

La precessione dell'asse terrestre è l'interazione tra la rotazione terrestre  $\omega_T$  e la rivoluzione intorno al sole  $\omega_S$ , che avvengono secondo due assi inclinati di circa  $23,5^\circ$  l'uno rispetto all'altro. Il non parallelismo tra i due assi, insieme all'adagiamento della Terra, genera un momento di flessione/torsione che tenderebbe a renderli paralleli, dando origine al fenomeno della precessione ( $T \approx 26000$  anni!).





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

## Le dimensioni della Terra

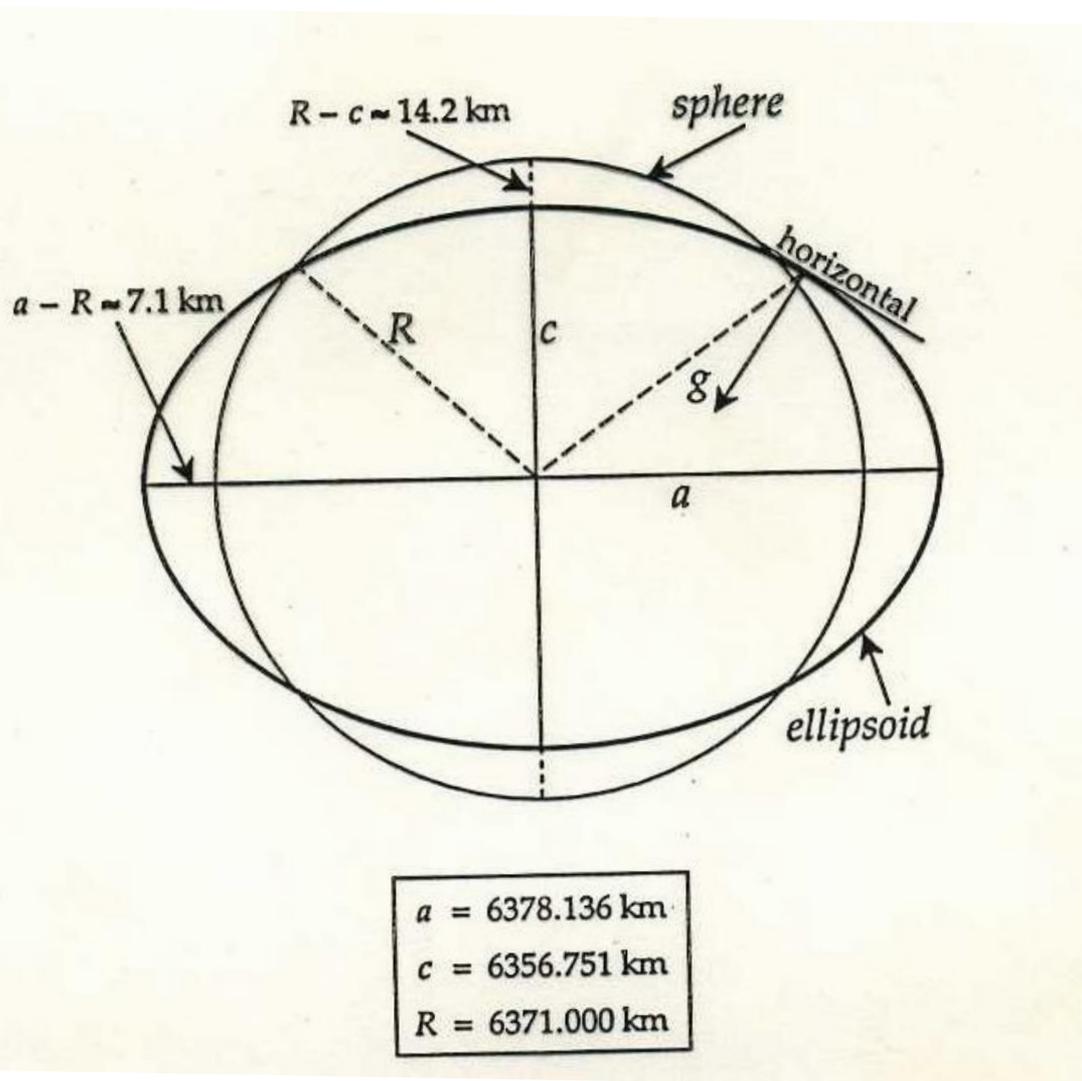
Raggio Equatoriale (a)	Km 6.378,4
Raggio Polare (b)	Km 6.356,9
Differenza (a - b)	Km 21.5
Schiacciamento ( $a = [a - b]/a$ )	1/297
Circonferenza equatoriale	Km 40.076,6
Lunghezza del Meridiano	Km 40.008,9
Superficie	Km <sup>2</sup> 509.950,414
Volume	Km <sup>3</sup> 1.083.000.000
Monte Everest	m 8.882
Fossa di Emden	m -10.793



$$g_n = 9.80665 \text{ ms}^{-2} (980.665 \text{ cms}^{-2} = 980.665 \text{ gal}).$$

# Fisica Terrestre 2024-2025

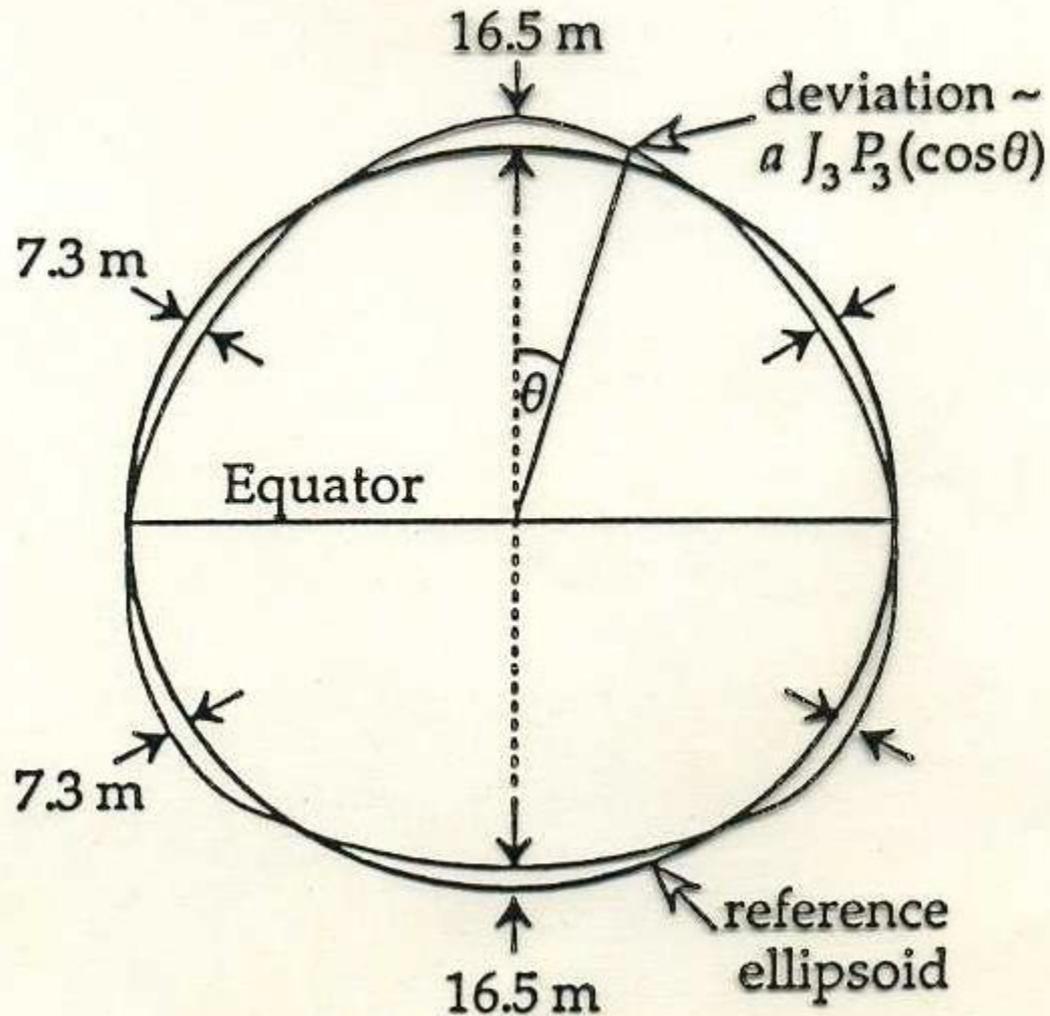
Giovanni Costa





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

**Table 3.1** Standard gravity values at various latitudes.

---

<i>Latitude</i>	$\gamma$	<i>Latitude</i>	$\gamma$
0°	978.03185	50°	981.06948
5°	978.07107	55°	981.50655
10°	978.18755	60°	981.91695
15°	978.37780	65°	982.28813
20°	978.63611	70°	982.60872
25°	978.95472	75°	982.86890
30°	979.32402	80°	983.06068
35°	979.73289	85°	983.17816
40°	980.16897	90°	983.21773
45°	980.61905		

---



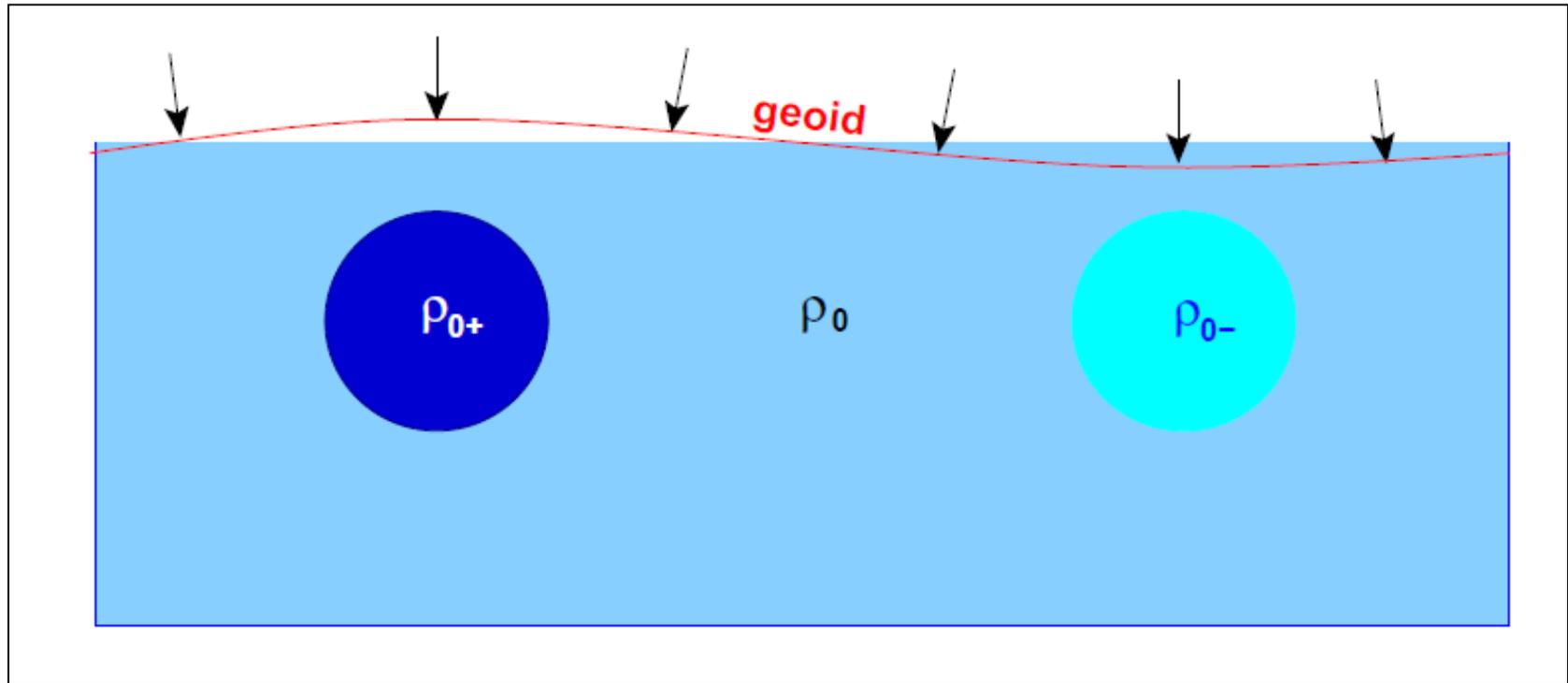
# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

## **IL GEOIDE**

La Terra non è una sfera perfetta né un ellissoide rotante. Ad esempio, le montagne e le fosse oceaniche rappresentano variazioni di molti chilometri. La superficie equipotenziale che delimita la massa terrestre è chiamata geoide e differisce meno dall'ellissoide di riferimento. Sulle coste oceaniche, il geoide coincide con il livello del mare. Sui continenti il geoide può essere visualizzato dal livello medio su cui potrebbe disporsi l'acqua in una rete di stretti canali scavati attraverso i continenti. Il geoide è una superficie di riferimento per la navigazione, il rilevamento e l'altimetria. In un punto la verticale non è diretta rispetto al centro della Terra, ma è perpendicolare alla superficie equipotenziale locale e, se vicina al livello del mare, è perpendicolare al geoide. La figura del geoide deriva da dati satellitari, in particolare da misure di altimetria radar. Queste misure hanno definito il geoide marino con una precisione di circa 10 cm. Le misure satellitari e gravimetriche sono in accordo di circa 50 cm, il che indica che la teoria e le ipotesi sono corrette. Tradotto con [www.DeepL.com/Translator](http://www.DeepL.com/Translator) (versione gratuita)

## Geoide



Il geoide può essere elevato al di sopra dell'ellissoide da:

- A) una collina o una montagna con centro di gravità esterno all'ellissoide provoca un'attrazione verso l'alto;
- B) eccesso di massa al di sotto dell'ellissoide



## **ELLISSOIDE DI RIFERIMENTO**

La Terra dovrebbe avere la forma di un ellissoide di rotazione se fosse una massa fluida con densità che aumenta con la profondità e che ruota intorno all'asse polare. Anche la sua superficie, essendo liquida, è necessariamente una superficie equipotenziale. Questo ellissoide è chiamato ellissoide di riferimento e rappresenta la superficie equipotenziale di un modello sferoidale della Terra con variazione laterale reale della densità e con un potenziale centrifugo. La forza gravitazionale è ovunque perpendicolare alla sua superficie e può essere calcolata matematicamente. La formula adottata dall'Associazione Internazionale di Geodesia nel 1967 è la

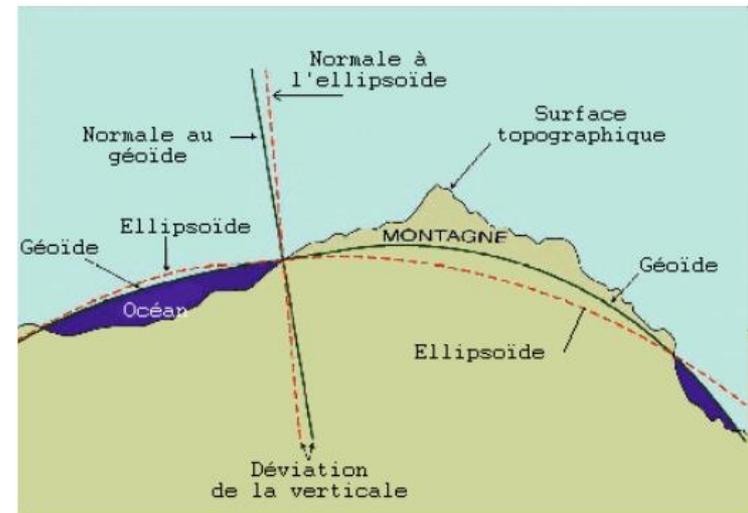
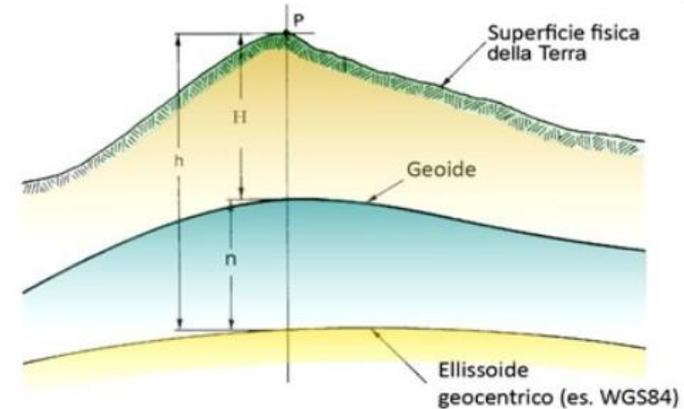
$$g(\varphi) = g_e (1 + a \sin^2 \varphi + \beta \sin^4 \varphi)$$

where  $g_e=978.03185$  gal,  $a=5.278895 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta=2.3462 \cdot 10^{-5}$

Circa il 40% della variazione di gravità con la latitudine è dovuta alla differenza tra ellissoide e sfera (cioè all'adulazione), invece il 60% è dovuto alla rotazione della Terra. L'errore massimo nella formula è di  $4\mu\text{gal}$ . La gravità calcolata con questa formula è detta gravità normale.

## SUPERFICI TOPOGRAFICA, GEOIDICA ED ELISSOIDICA

- La superficie geodica è quella che percepiamo studiando l'attrazione gravitazionale.
- La superficie ellissidica è una astrazione matematica, una semplificazione che noi adottiamo per sostituire la vera Terra con un modello che siamo in grado di descrivere analiticamente.
- La superficie topografica è quella che noi vediamo.





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

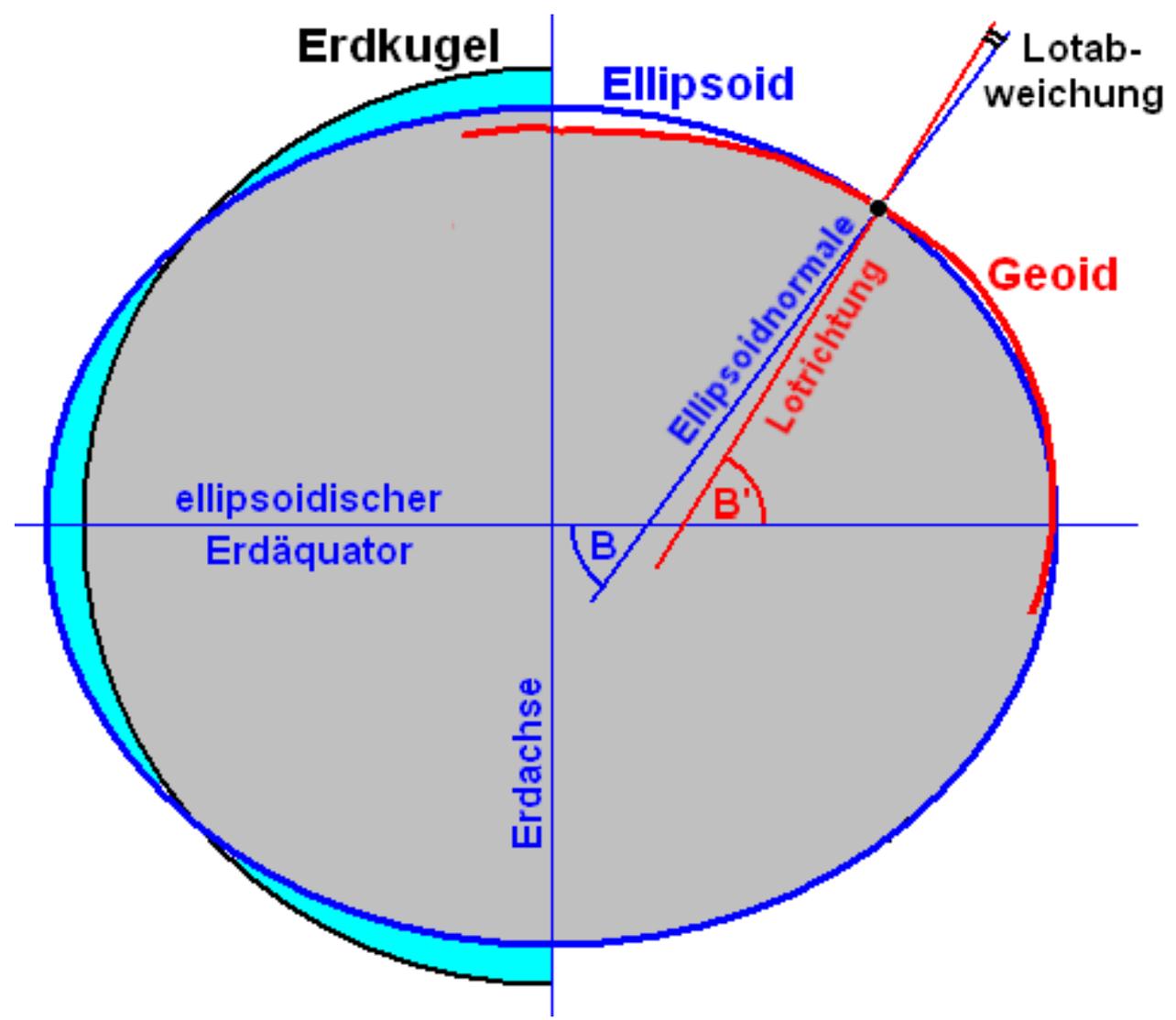
## **ELLISSOIDI DI RIFERIMENTO PRINCIPALI**

Ellissoide	Semiassse maggiore a	Schiacciamento a
EVEREST (1830)	6.377.276 m	1/300.8
BESSEL (1841)	6.377.397 m	1/299.2
CLARKE (1866)	6.378.206 m	1/294.9
CLARKE (1880)	6.378.301 m	1/293.5
HELMERT (1906)	6.378.140 m	1/298.3
HAYFORD (1909)	6.378.388 m	1/297.0
KRASSOVSKY (1942)	6.378.245 m	1/298.3
FISCHER (1960)	6.378.160 m	1/298.3
WGS84 (1987)	6.378.137 m	1/298.3



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

## Satellite Geodesy

- La moderna tecnologia satellitare ha migliorato notevolmente la determinazione dell'ellissoide terrestre.

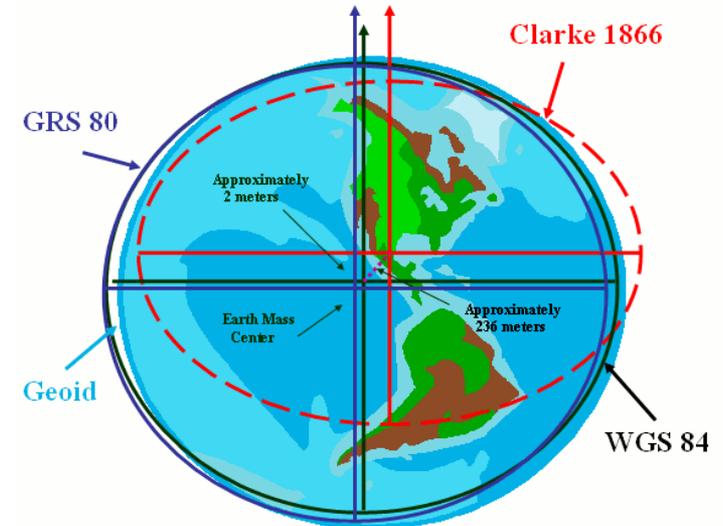
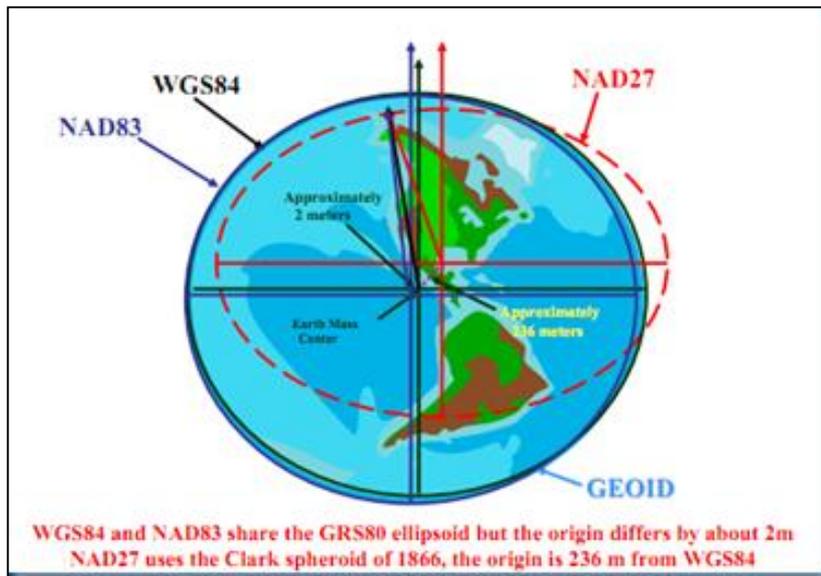
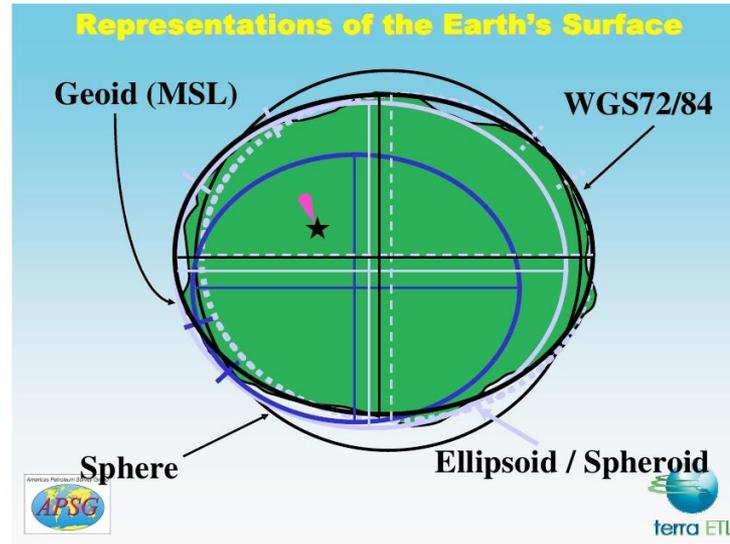
Ellipsoid name	Semimajor axis ( $a$ in meters)	Reciprocal of flattening ( $1/f$ )
Airy 1830	6 377 563.396	299.324 964 6
Helmert 1906	6 378 200	298.3
International 1924	6 378 388	297
Australian National	6 378 160	298.25
GRS 1967	6 378 160	298.247 167 427
GRS 1980	6 378 137	298.257 222 101
WGS 1984	6 378 137	298.257 223 563

- Dall'inizio degli anni Sessanta la conoscenza del geoide: le caratteristiche del campo gravitazionale su una scala più grande di 1000 km sono discernibili in modo più efficace studiando le perturbazioni delle orbite satellitari rispetto a quanto sarebbe possibile dalle osservazioni di superficie. Con i progressivi miglioramenti, le tecniche satellitari sono state utilizzate per distinguere caratteristiche sempre più fini, anche se per l'esplorazione delle anomalie locali si devono ancora utilizzare le osservazioni di superficie sulla terraferma, a volte in combinazione con i dati satellitari. Tradotto con [www.DeepL.com/Translator](http://www.DeepL.com/Translator) (versione gratuita)



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

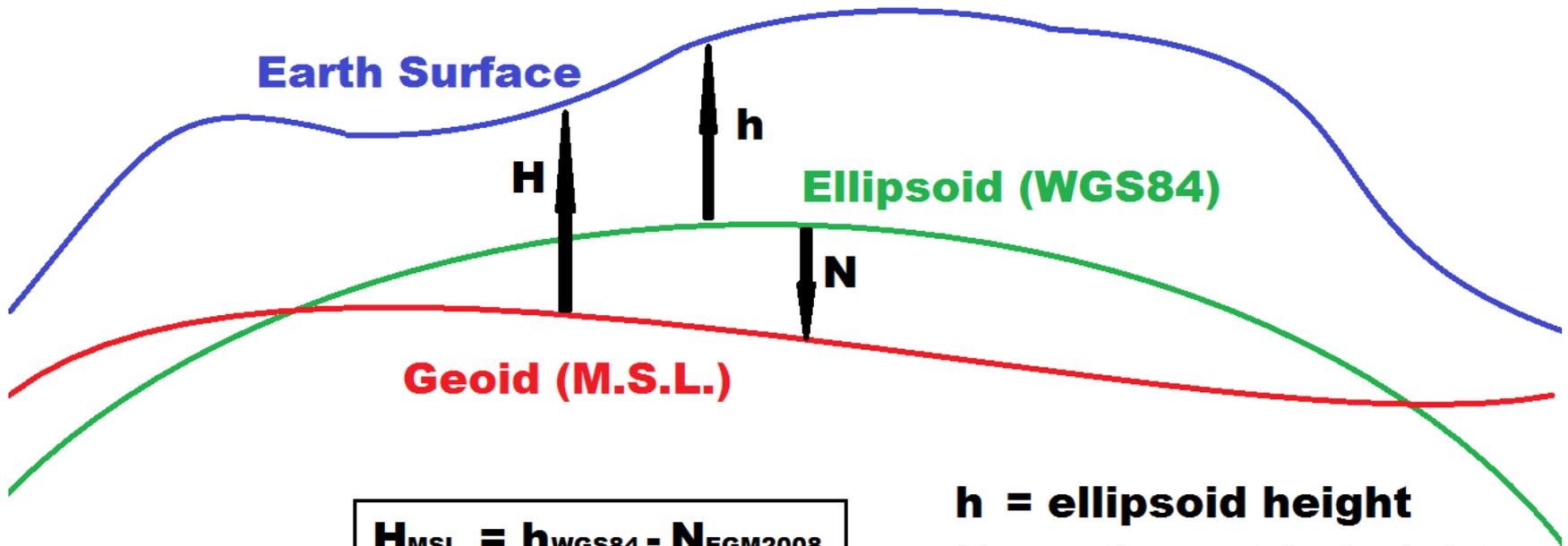




# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

## Eye4Software Hydromagic - EGM 2008



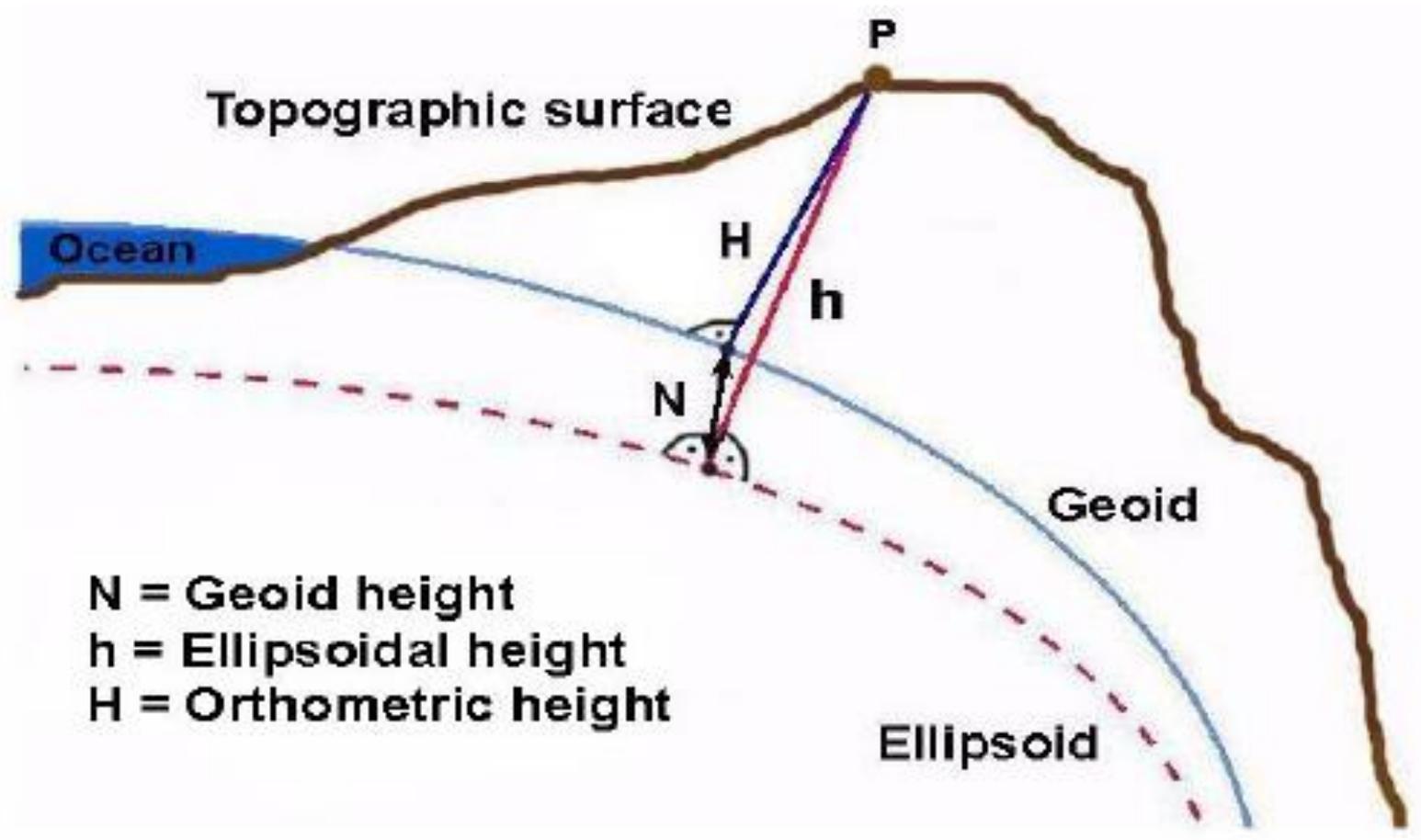
$$H_{MSL} = h_{WGS84} - N_{EGM2008}$$

- h = ellipsoid height**
- H = orthometric height**
- N = geoid height**



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



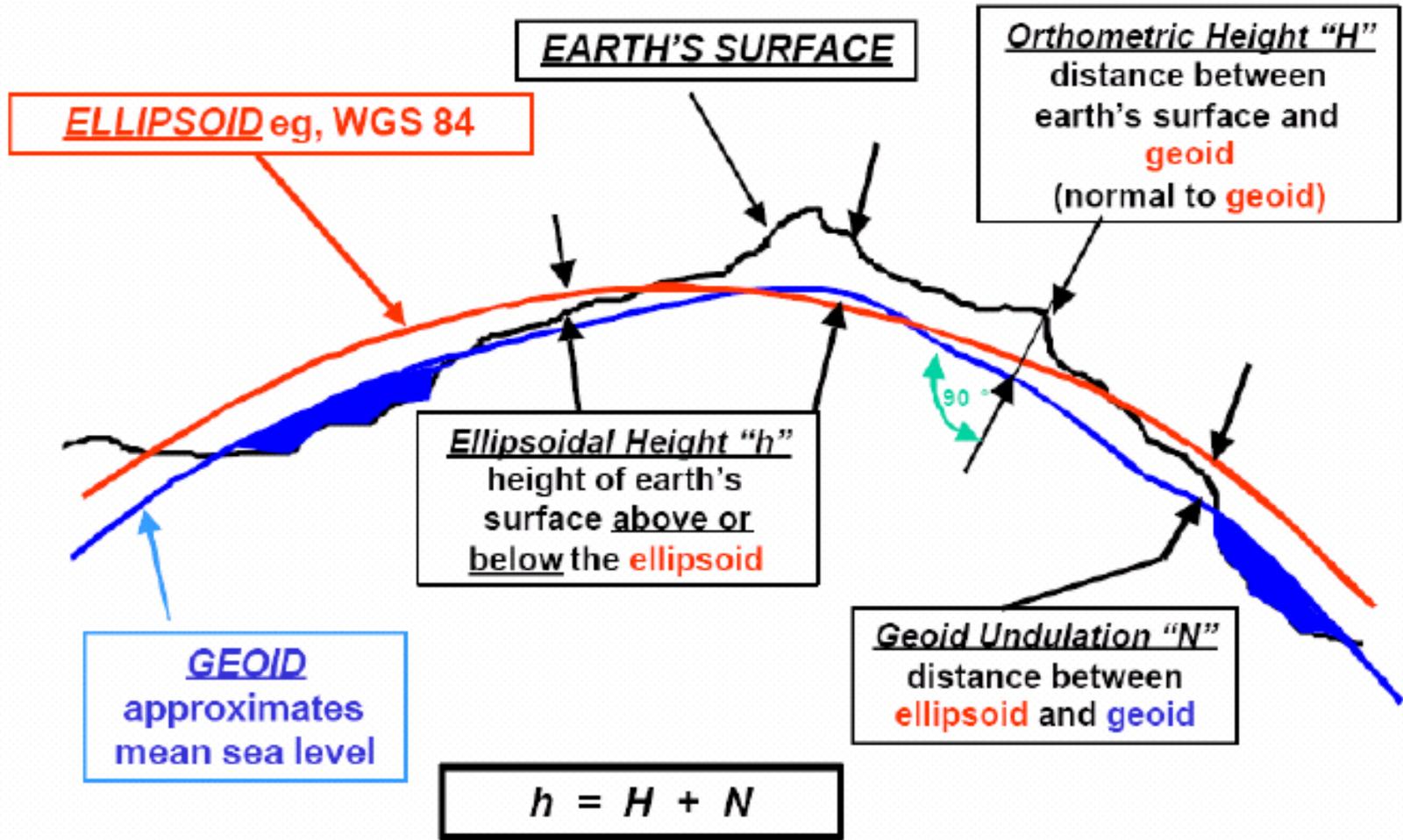
**N = Geoid height**  
**h = Ellipsoidal height**  
**H = Orthometric height**

**Ellipsoid**



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

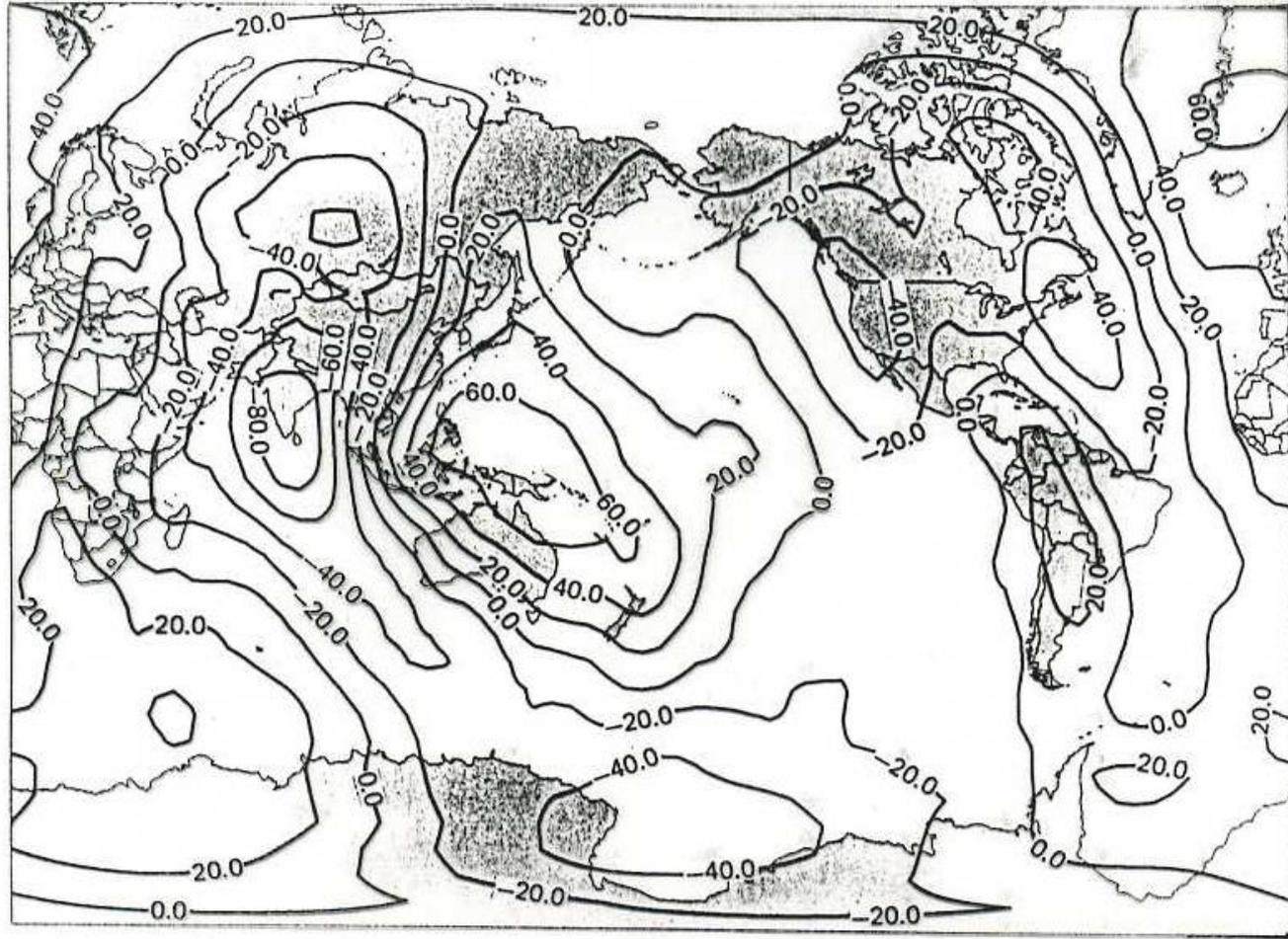




# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

(a)



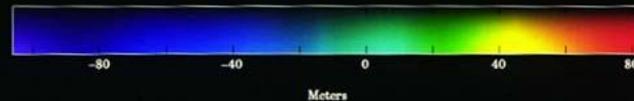
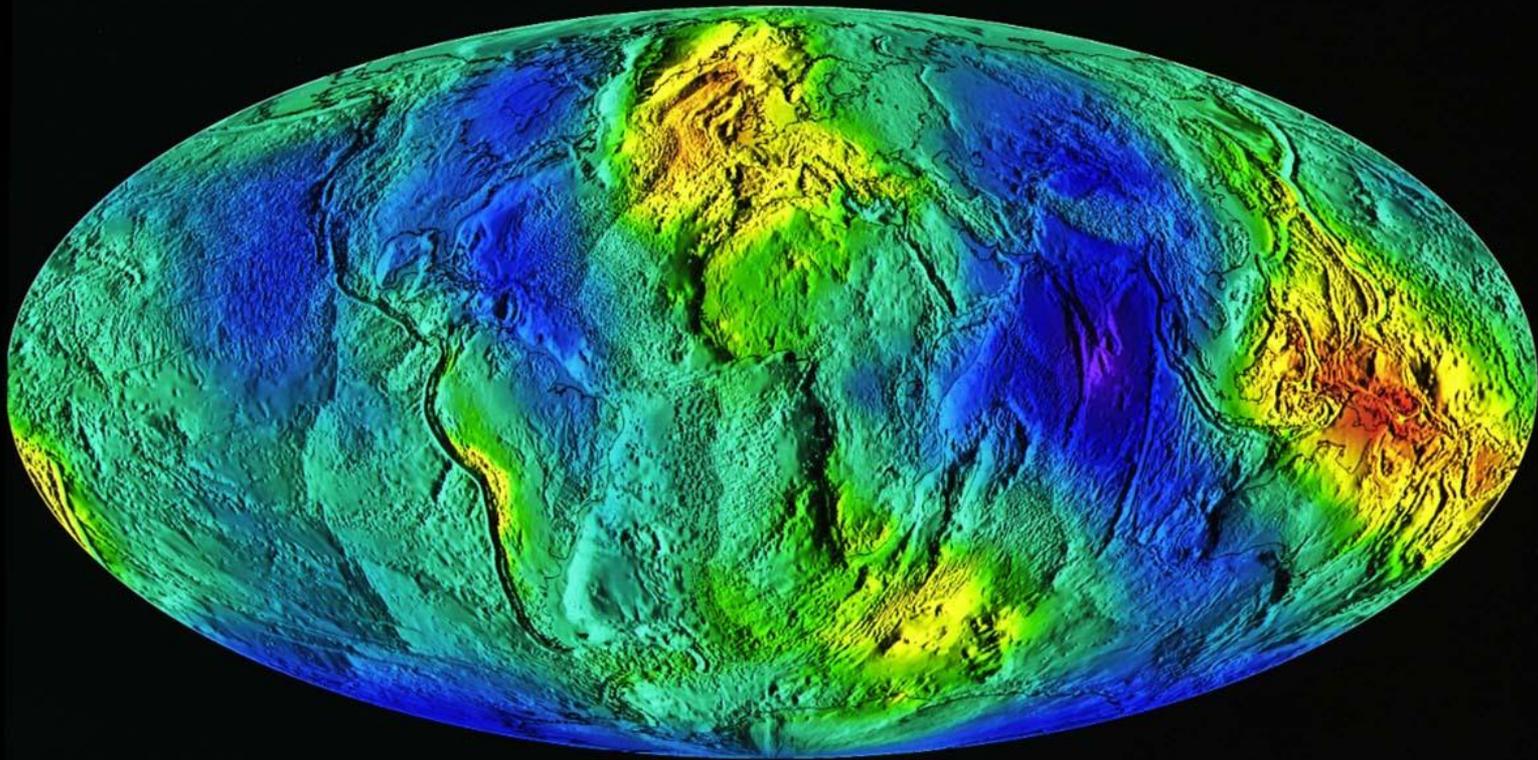
anomalie del geoida  
in altezza sopra  
(positive) o sotto (negative)  
s' ellinoide di riferimento  
(in metri)



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

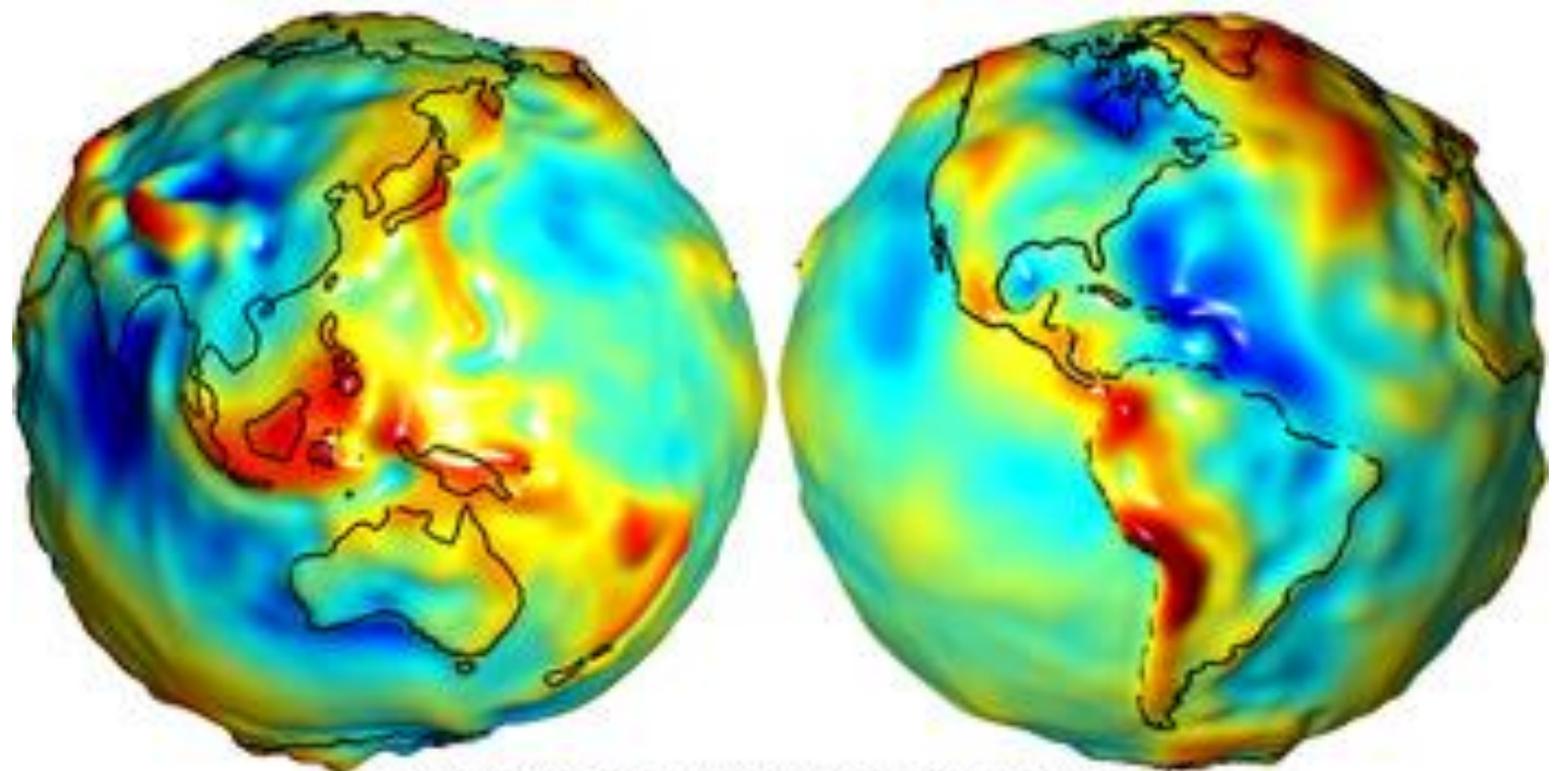
**GEOID OF THE EARTH  
over shaded topographic relief**





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



Earth's Gravity Field Anomalies (milligals)

-50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

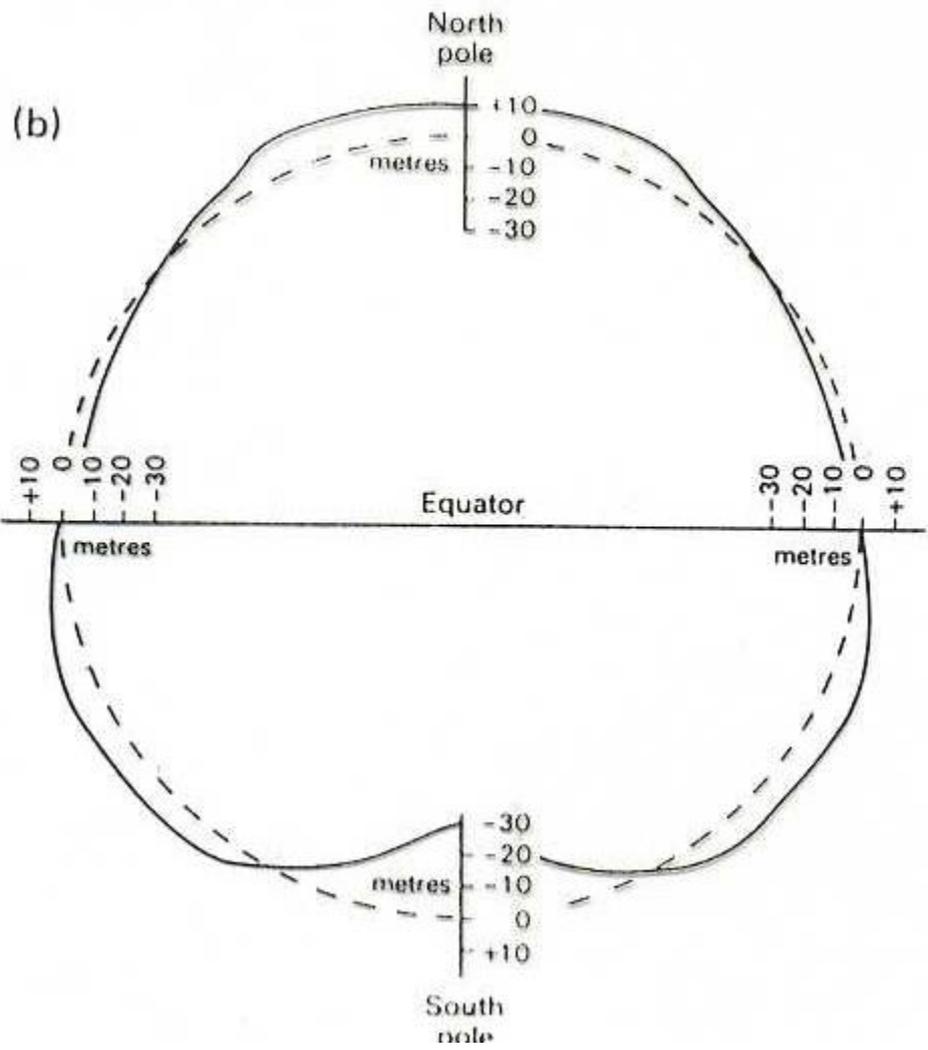


Figura media della Terra  
 calcolata assumendo la  
 Terra sferica attorno  
 all'asse di rotazione.  
 Tratteggiato: è ellinoide  
 con schiacciamento  $1/298.25$

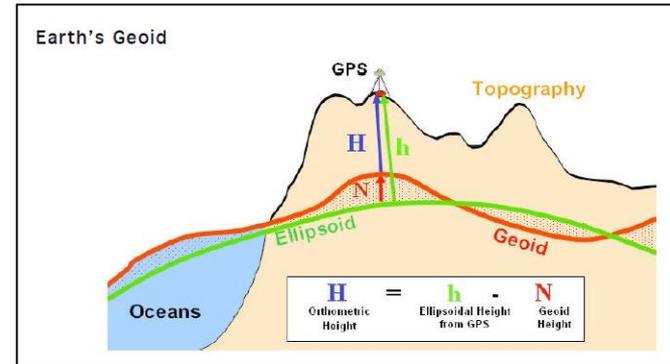
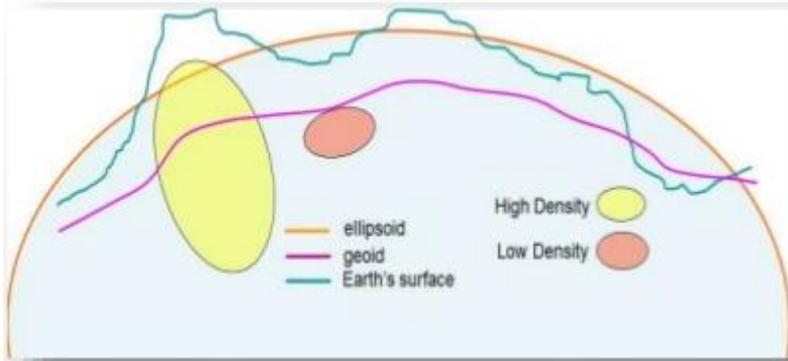


# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

The gaps between the geoid and International Ellipsoid are about 10 m and not more than 70 m , in agree with the deviations from idrostatic equilibrium are of the order of  $f^2$ .

A geoid negative anomaly is in a region with a deficit of mass (depression in the ocean floor), instead a positive anomaly in a region with an excess of mass (mountain on the ocean floor).



The anomaly  $\Delta h$  is linked to the anomaly of the gravitational potential measured on the ellipsoid:

$$g\Delta h = \Delta V$$

where  $g$  is the gravitational acceleration on the ellipsoid.

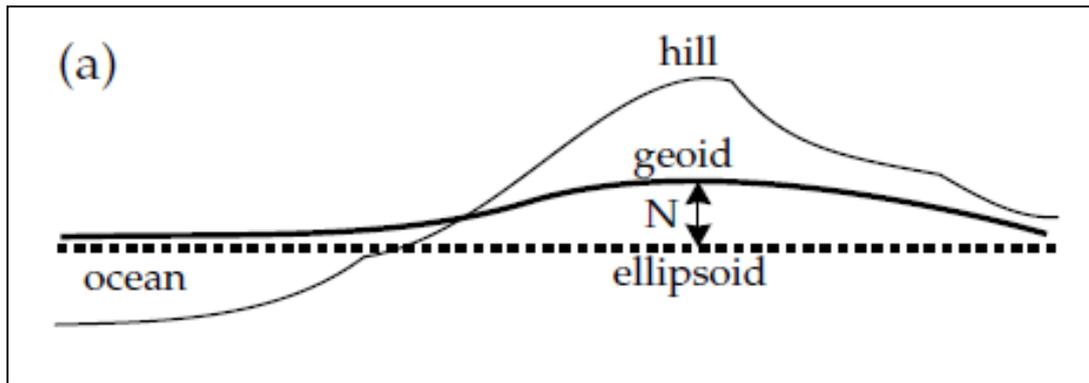
The deviations are due to the inhomogeneous in the Earth stratification and also are not in hydrostatic equilibrium.

Erosion, tectonic movements, accumulation and melting ice are the cause of slow and continuous variations of the shape of the geoid.

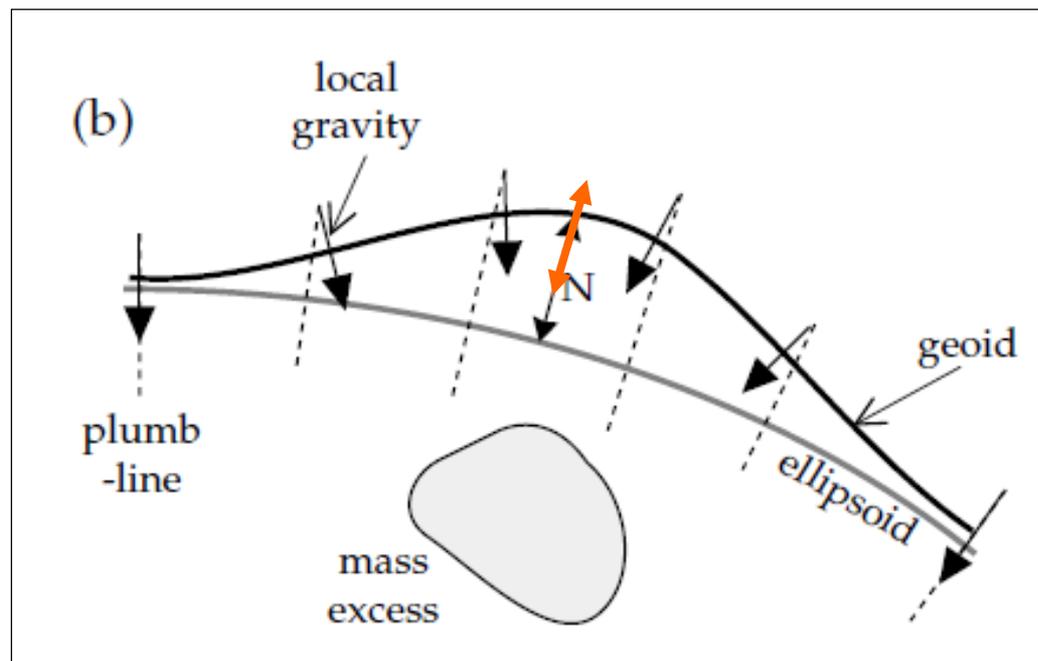


# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



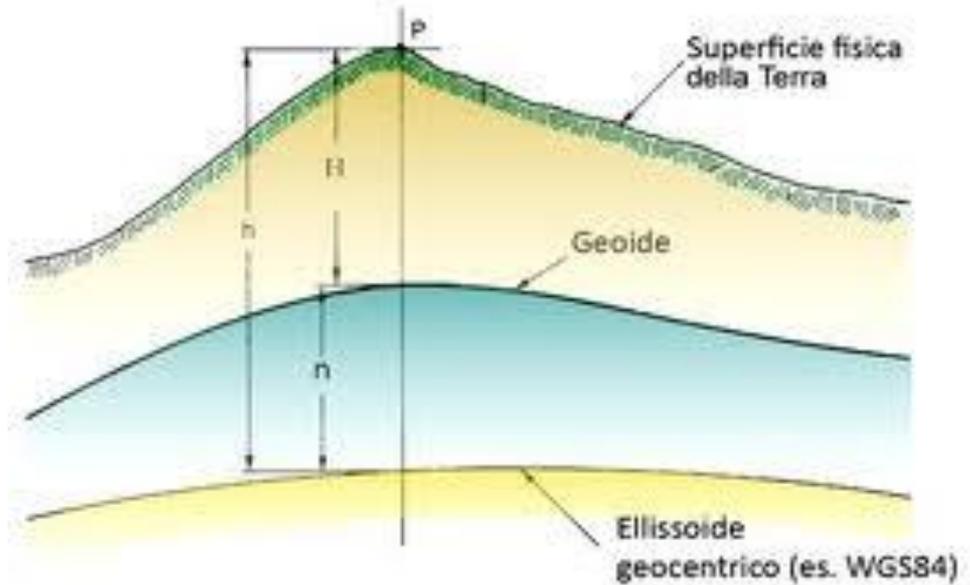
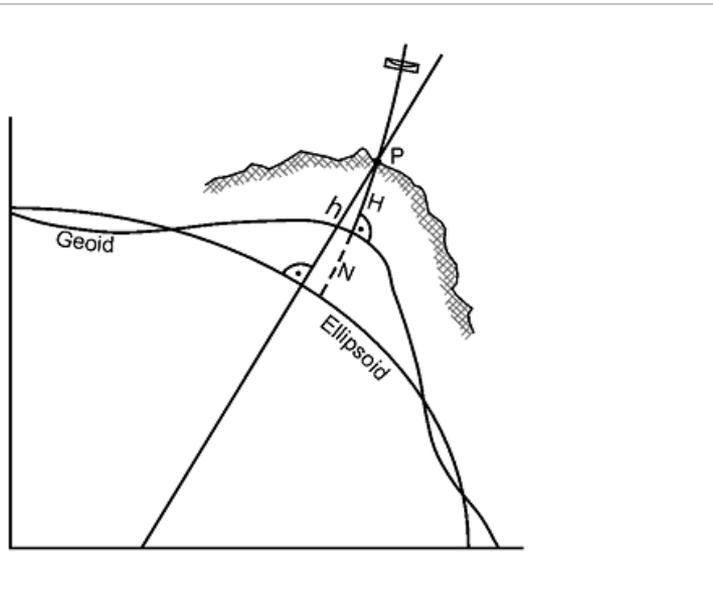
Geoid ondulation: displacement between the geoid and the ellipsoid



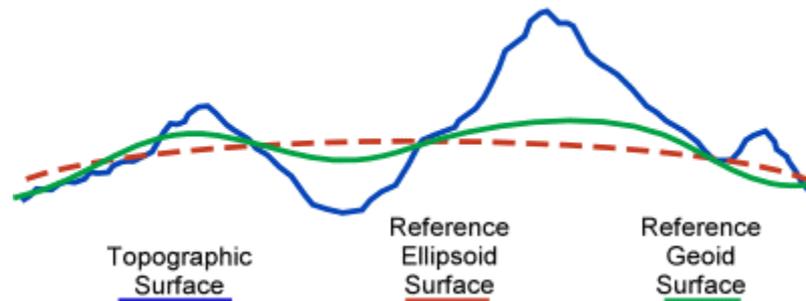


# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



Surface Comparison

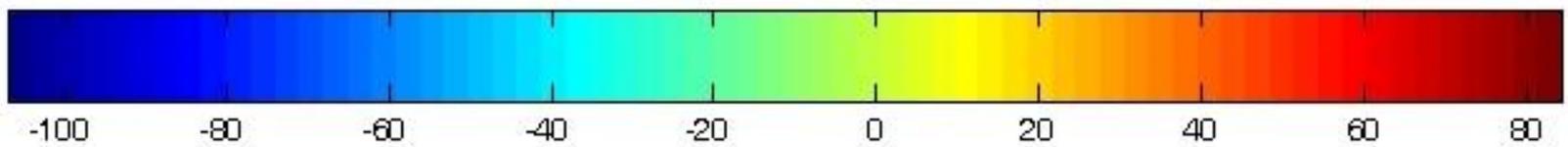
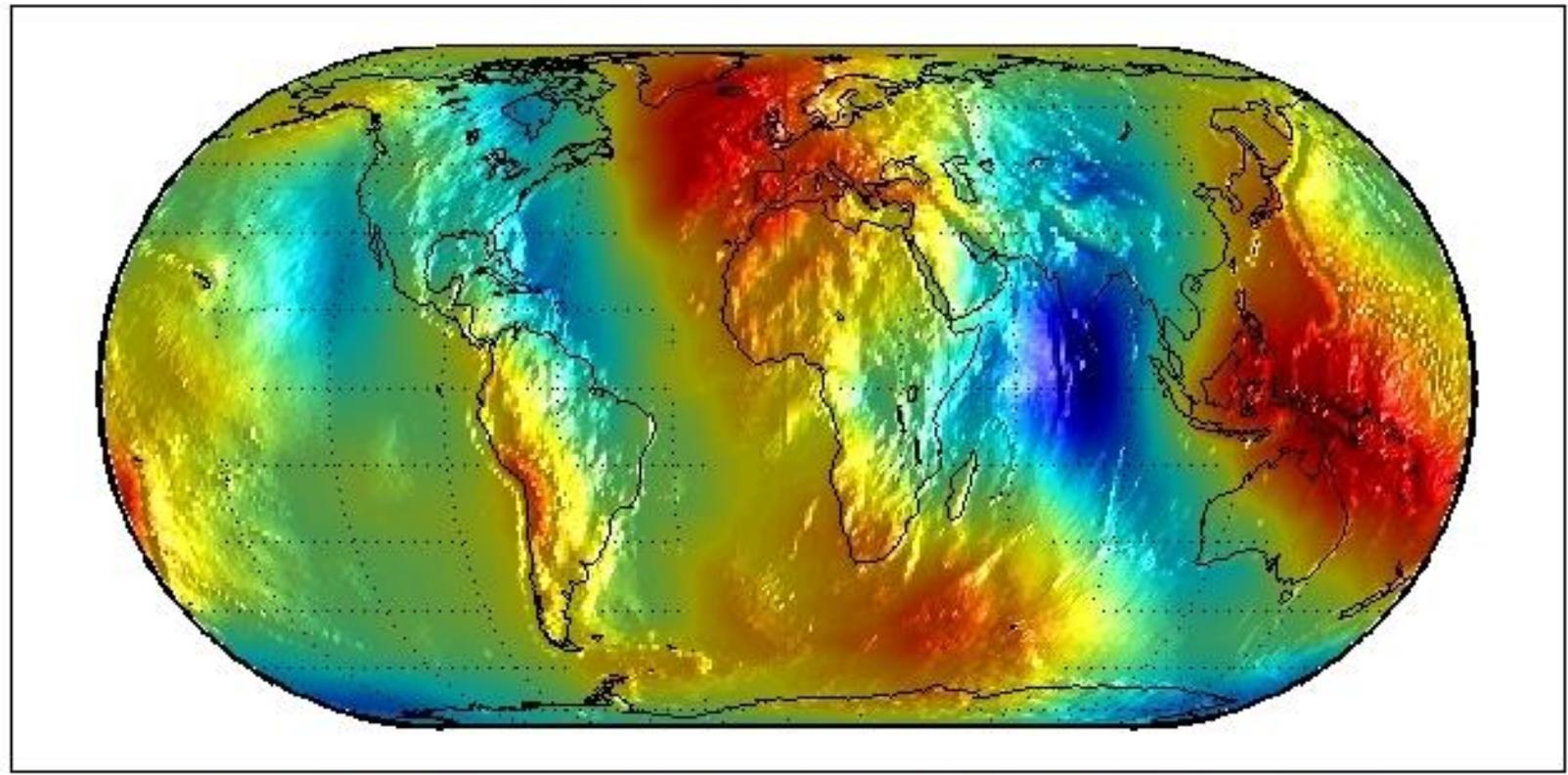






# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



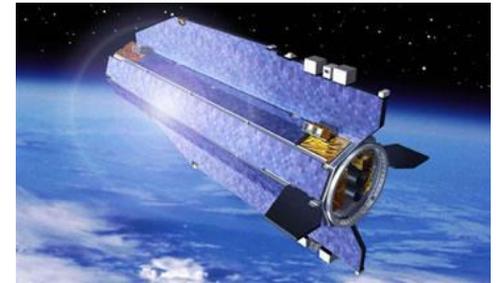
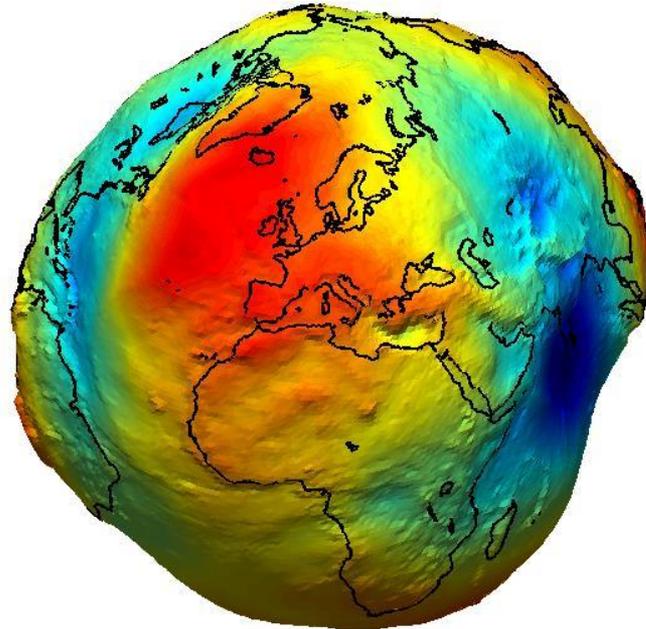
EGM96 altezza del geoida rispetto all'ellissoide



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

Just two years after its launch, the ESA's GOCE satellite has gathered enough data to create a map of the Earth's gravitational field, with a precision never before achieved. The scientific community now has access to more accurately model 'geoid' ever produced, which will allow us to better understand the functioning of our planet.

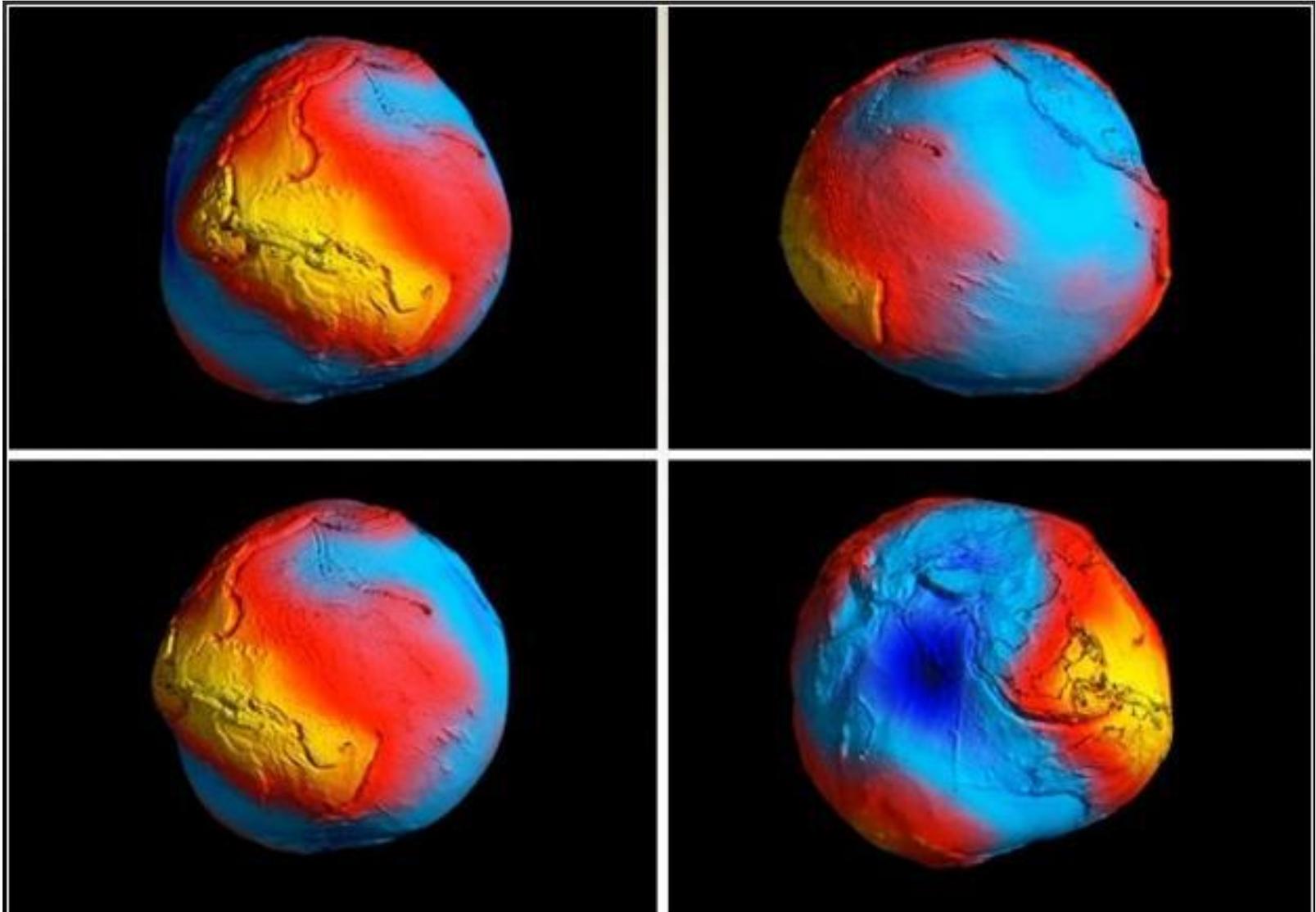


The map created by Goce shows the points of the Earth where there are gravitational alterations: in red, areas with gravitational pull above average, in blue ones where the gravitational pull is lower.



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

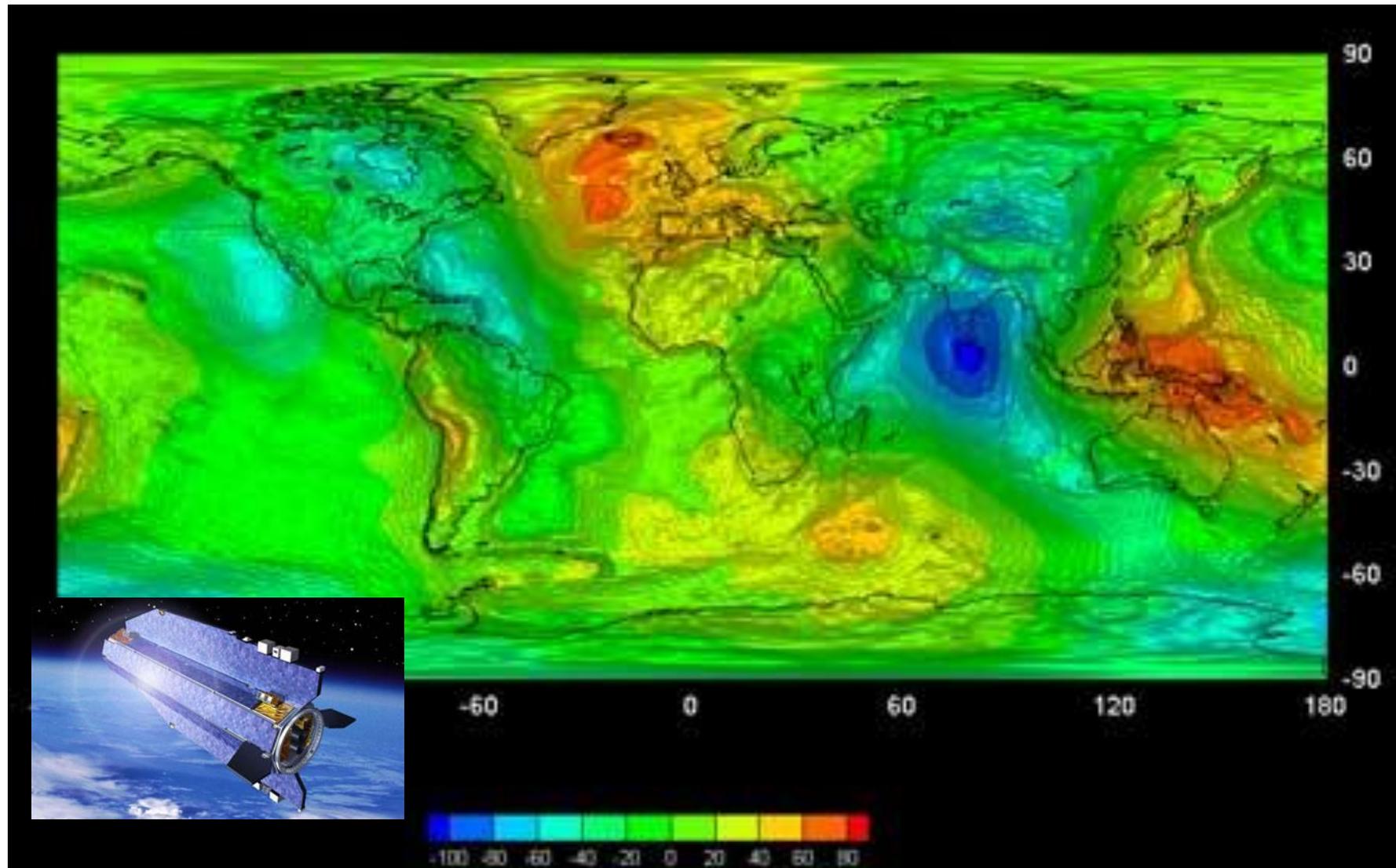
*Giovanni Costa*





# Fisica Terrestre 2024-2025

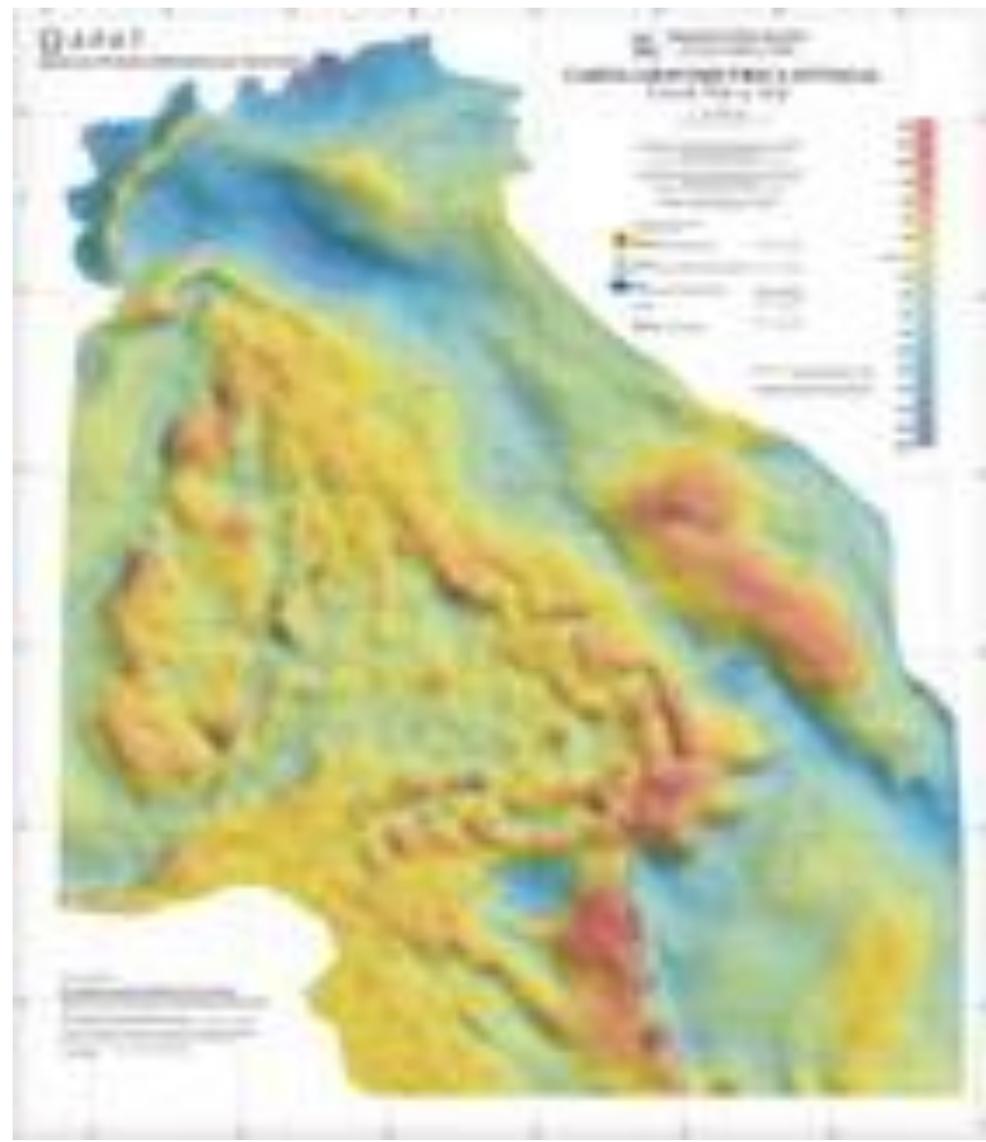
Giovanni Costa





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

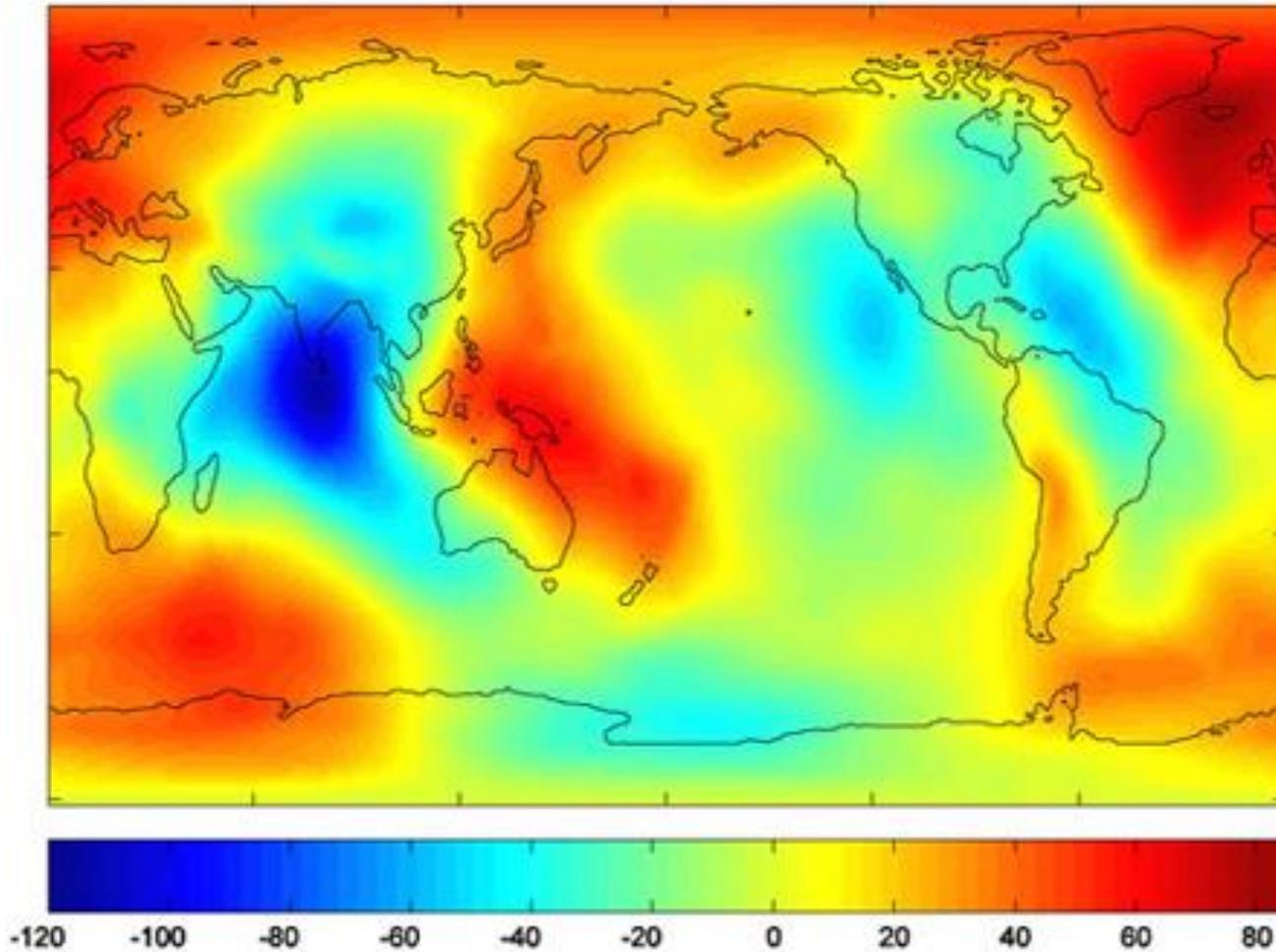
*Giovanni Costa*





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

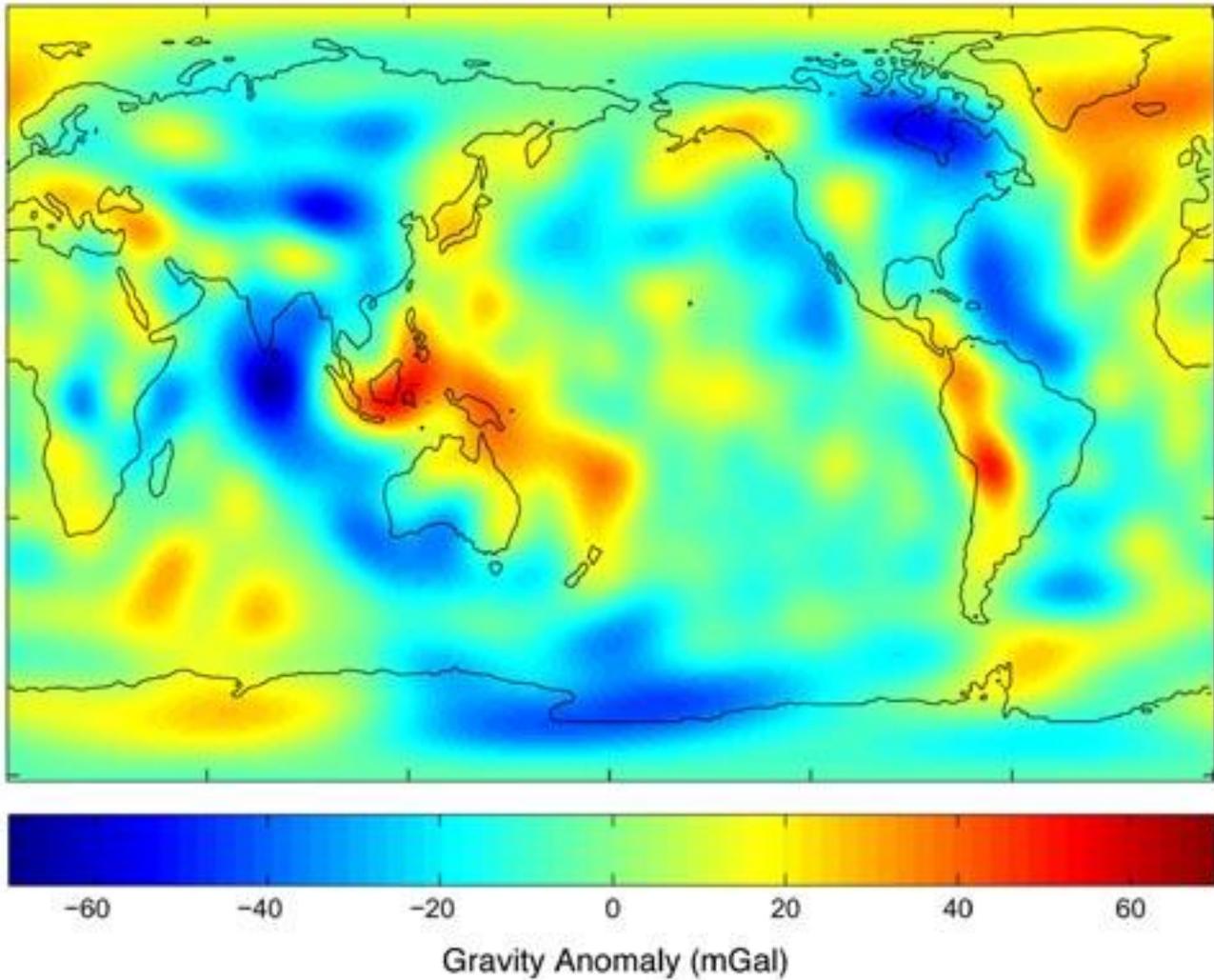


**Geoid (meters), from GRACE satellite data**



# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

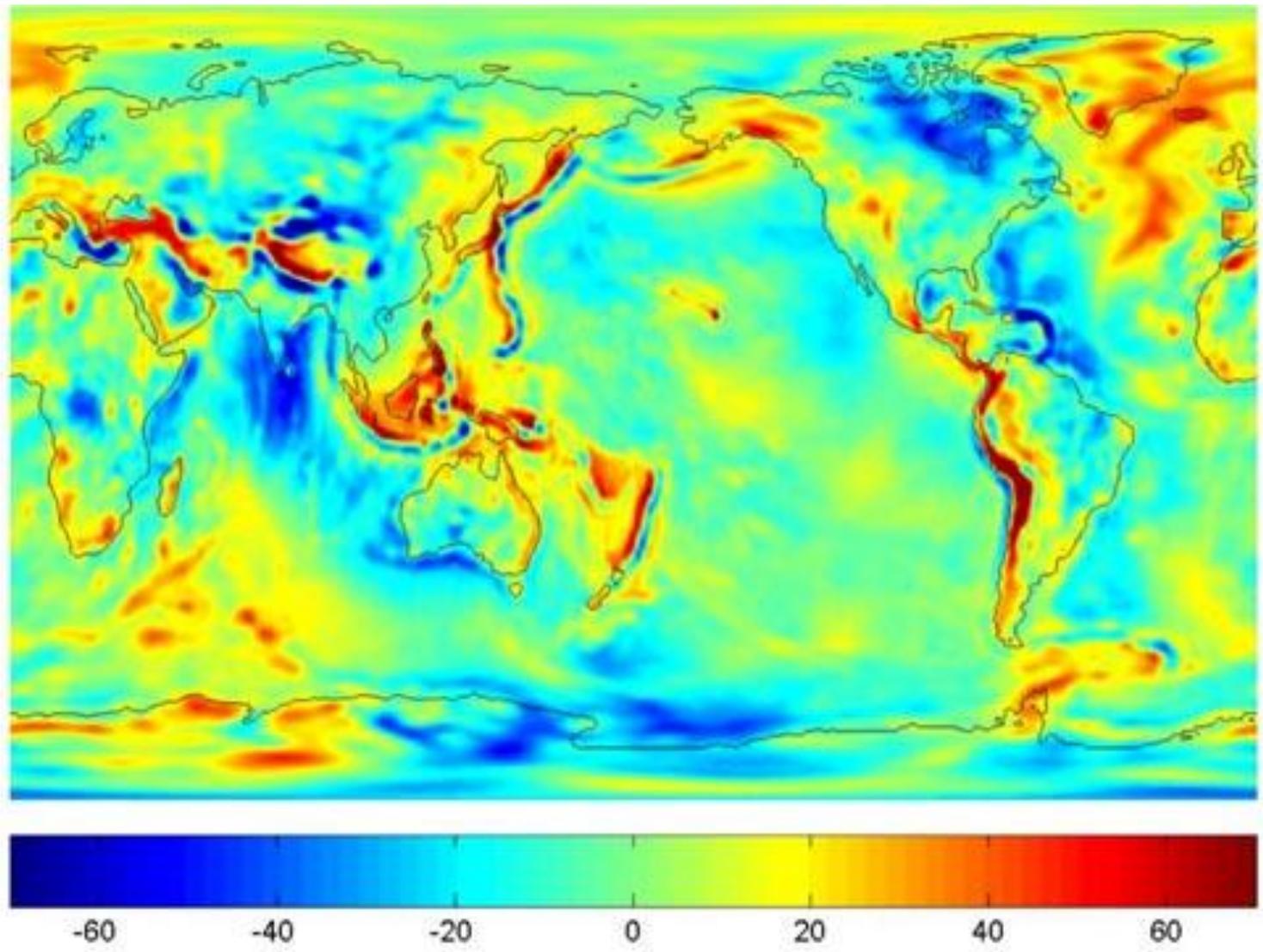


**Gravity anomalies (mGal), from GRACE satellite data**



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*

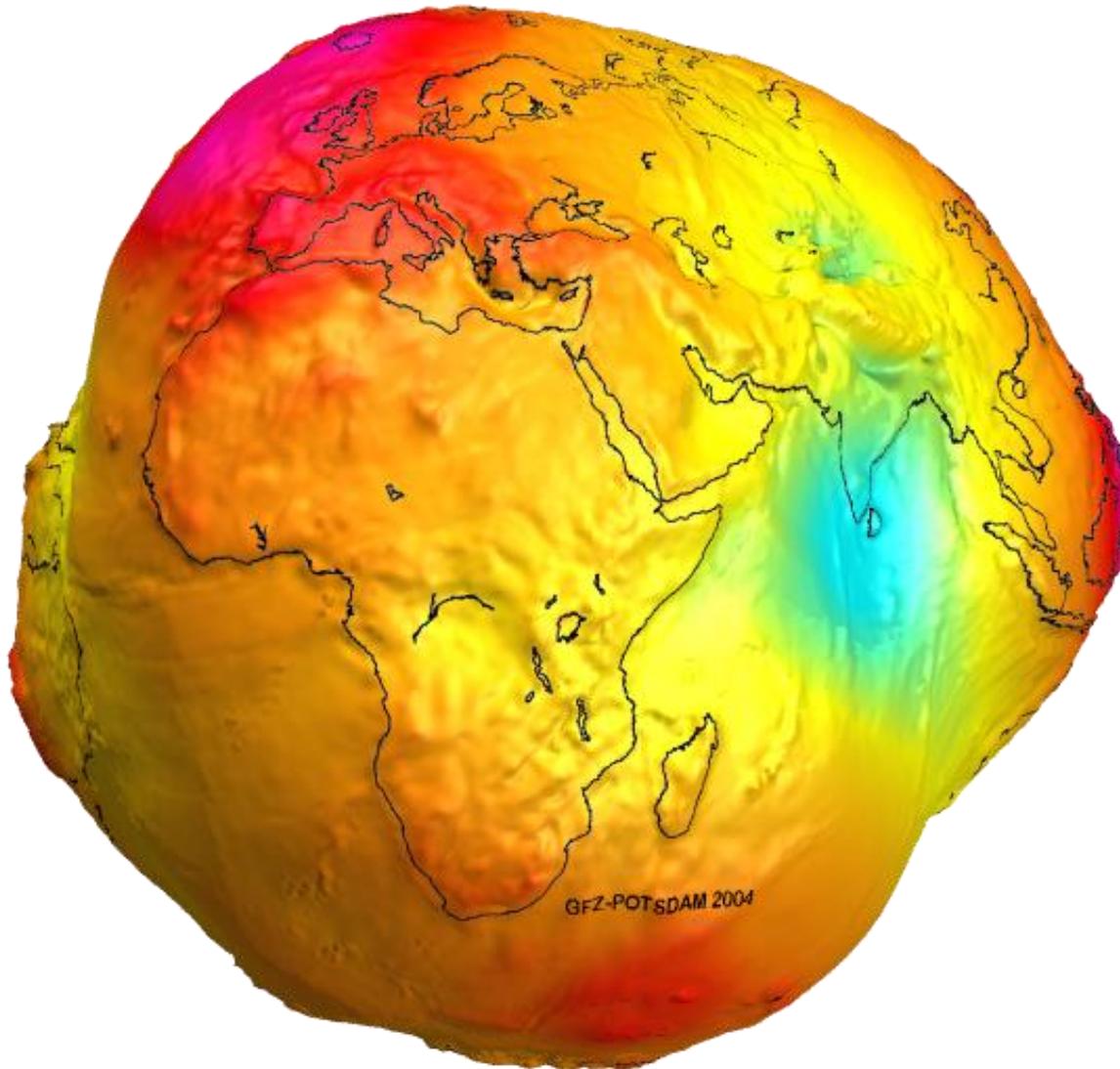


**Gravity anomalies (mGal), from GRACE satellite data**



# *Fisica Terrestre 2024-2025*

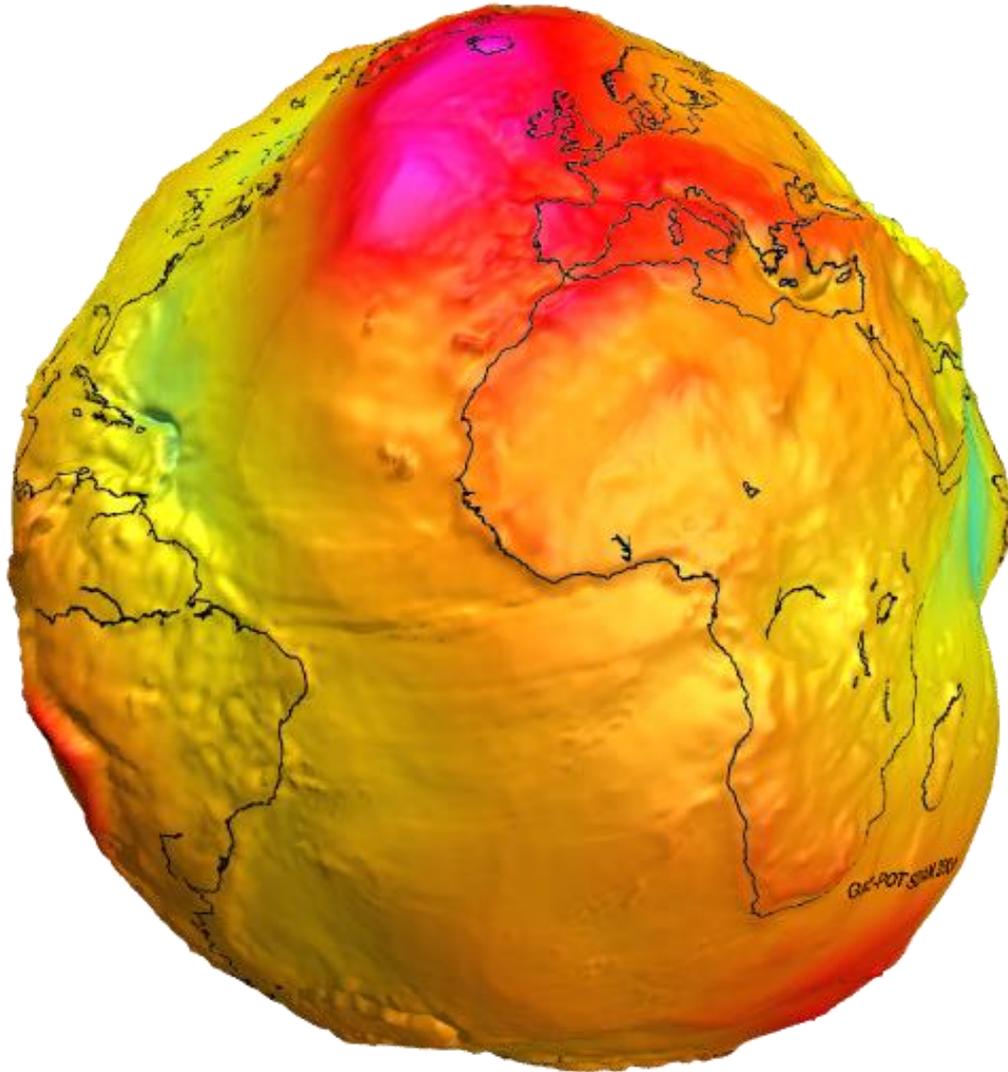
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

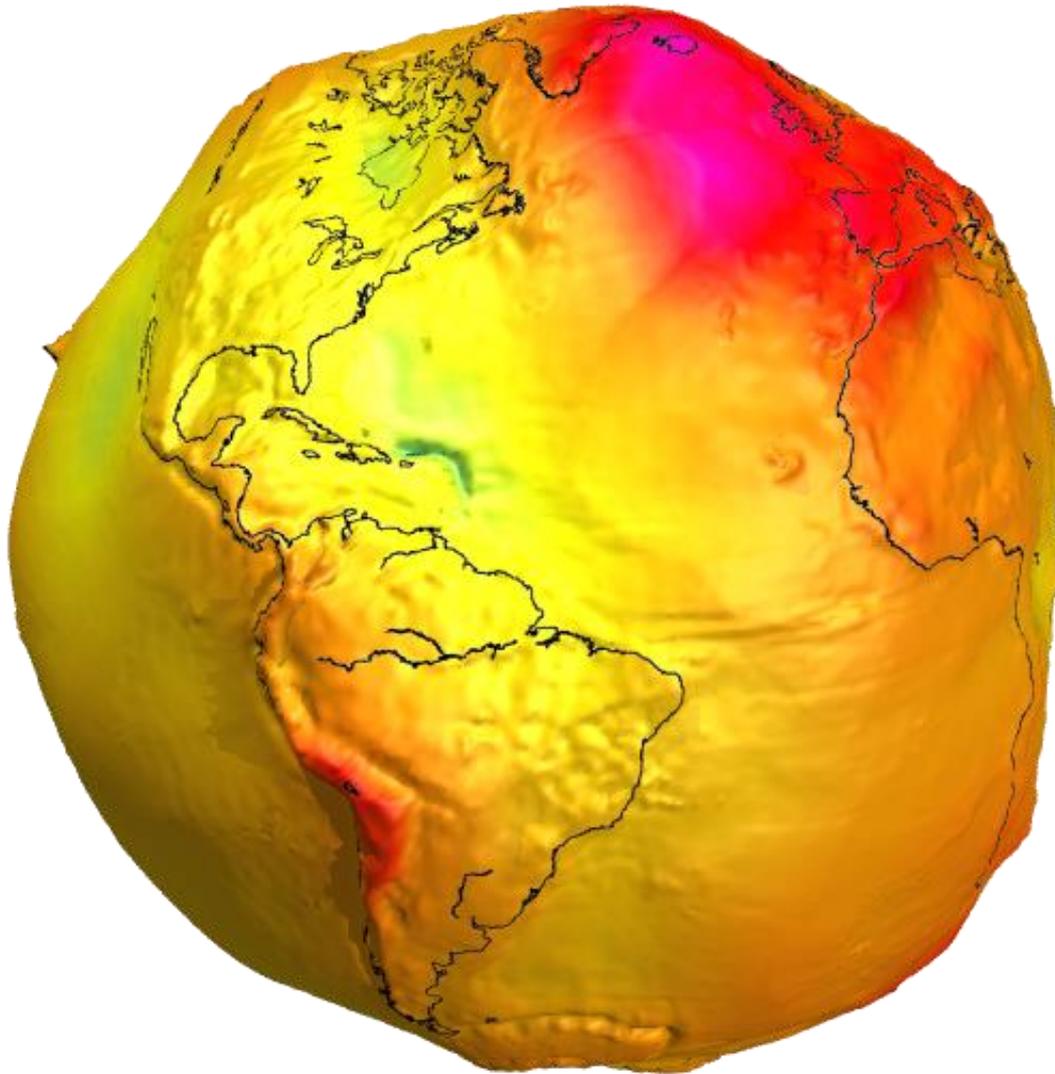
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

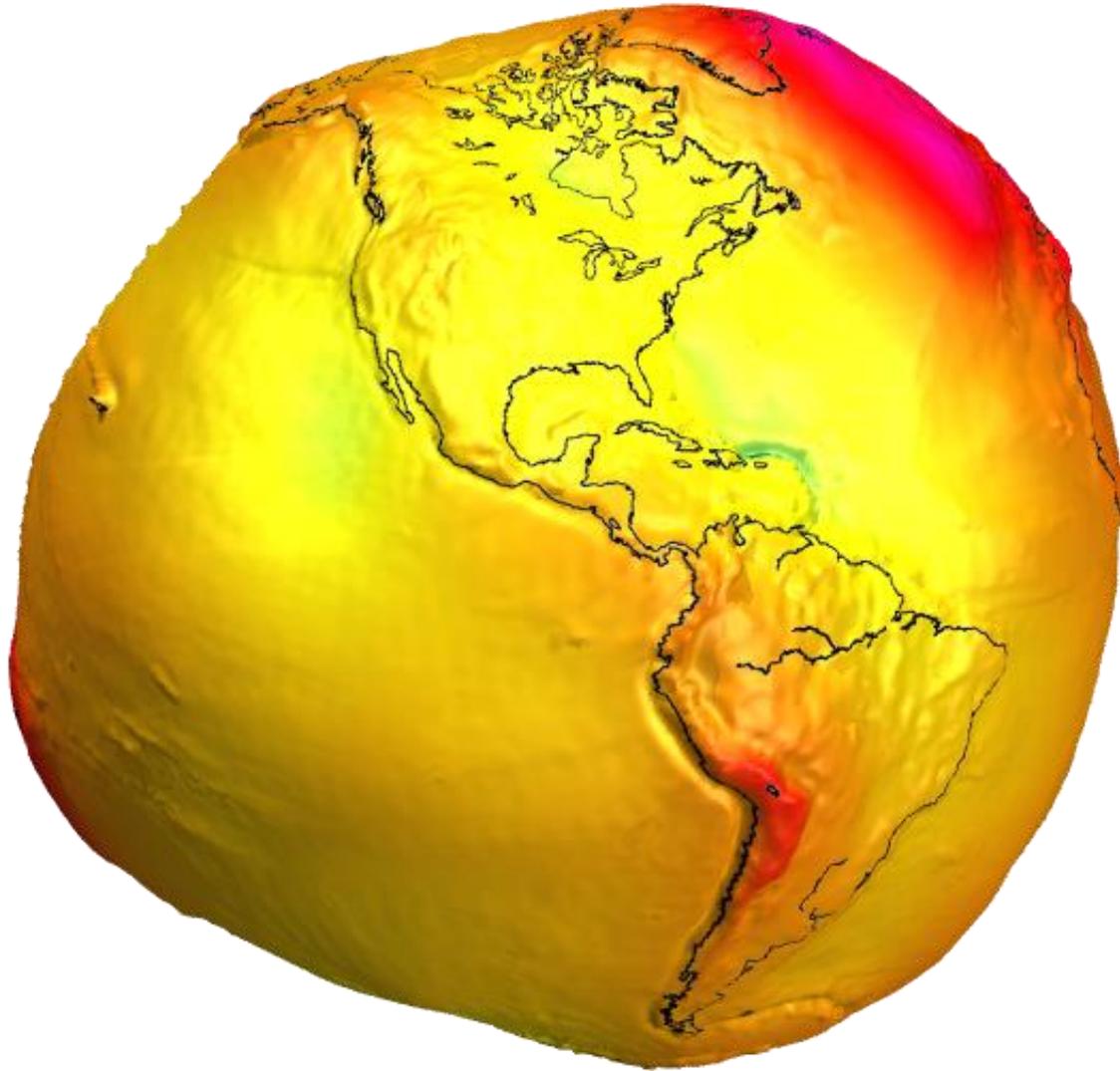
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

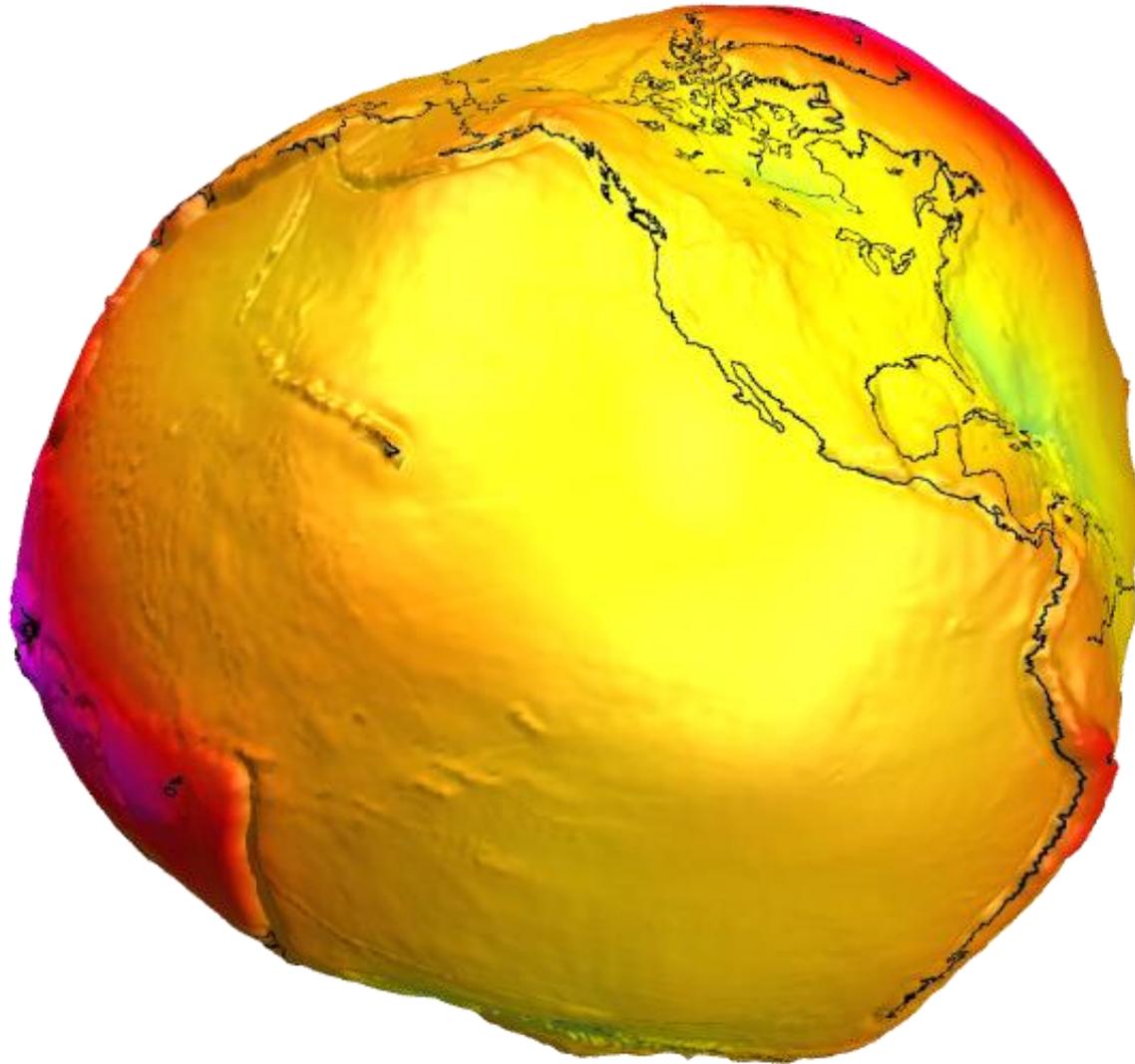
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

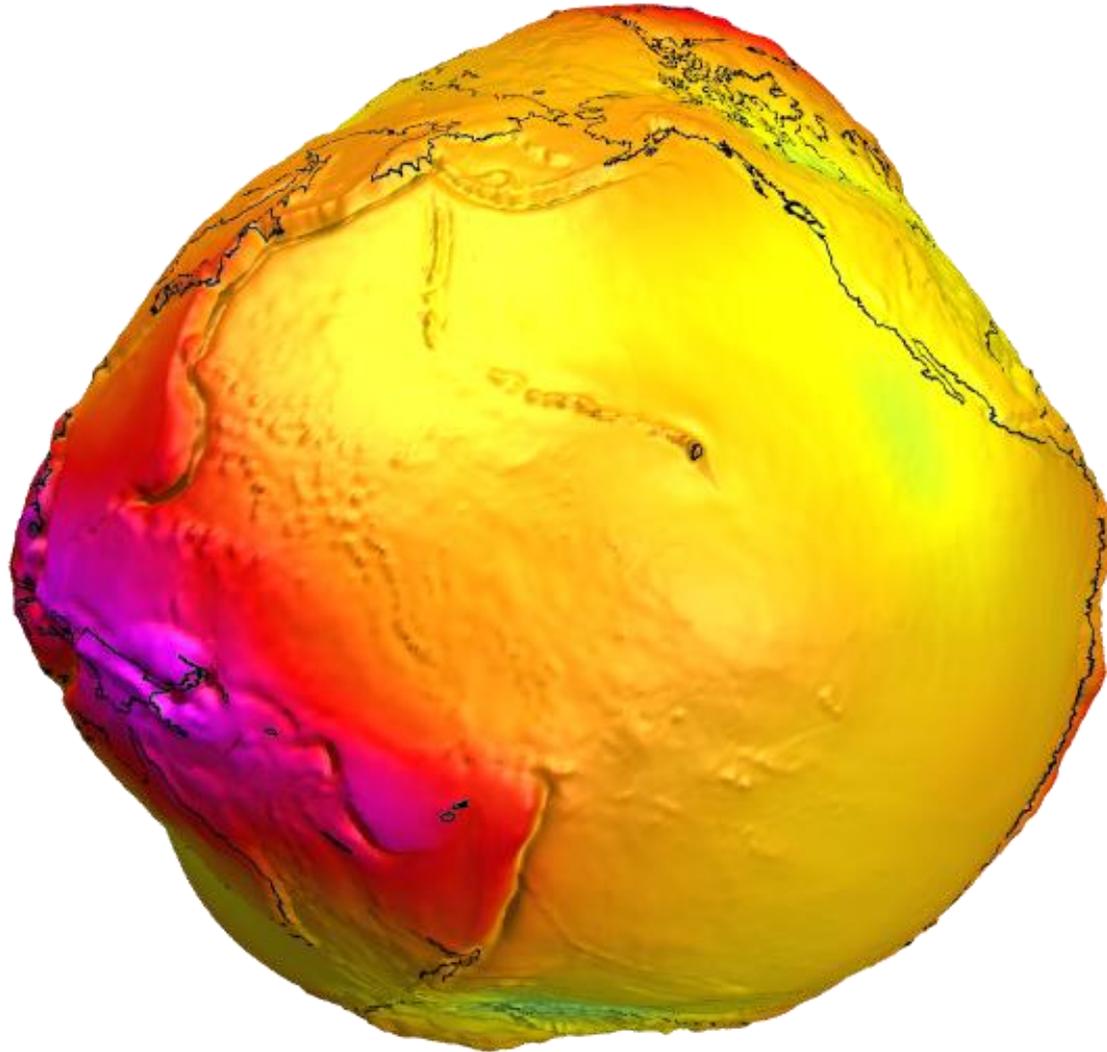
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

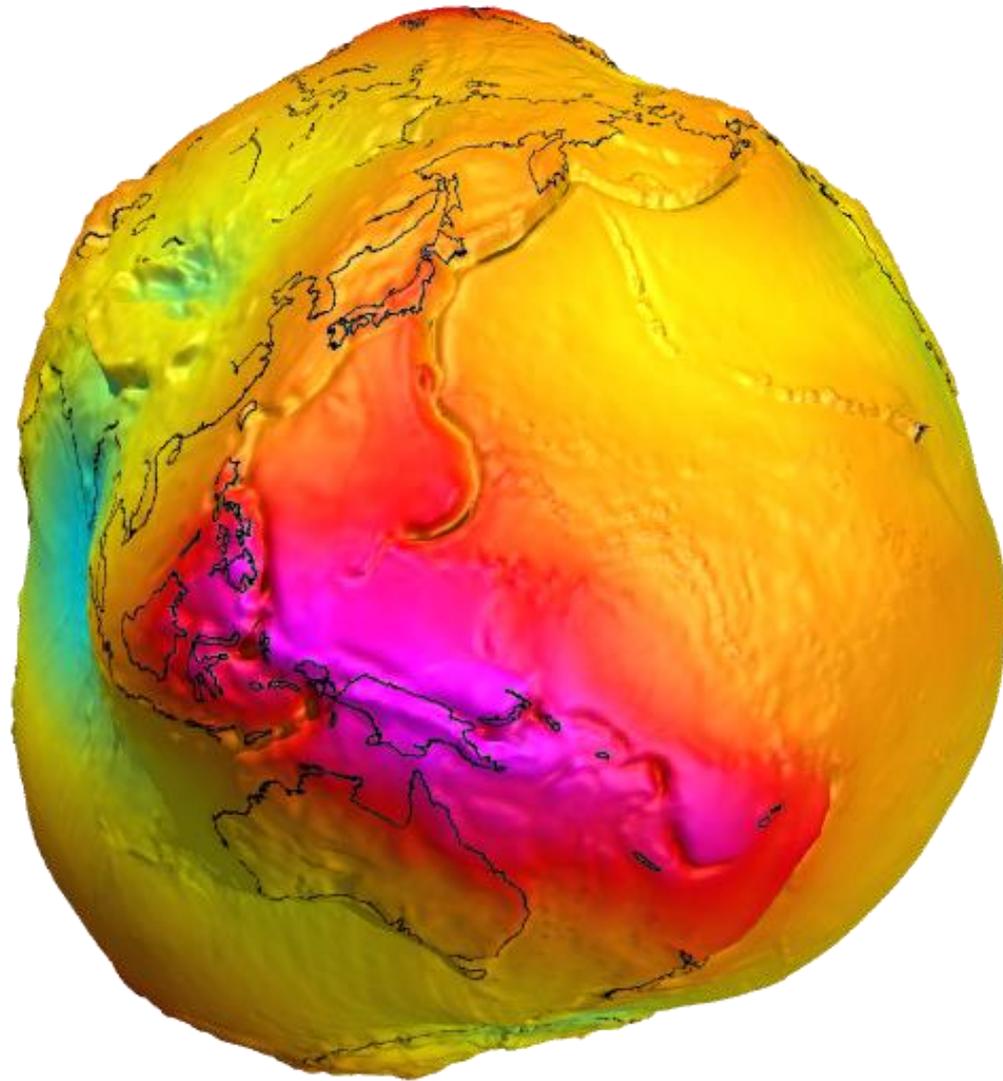
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

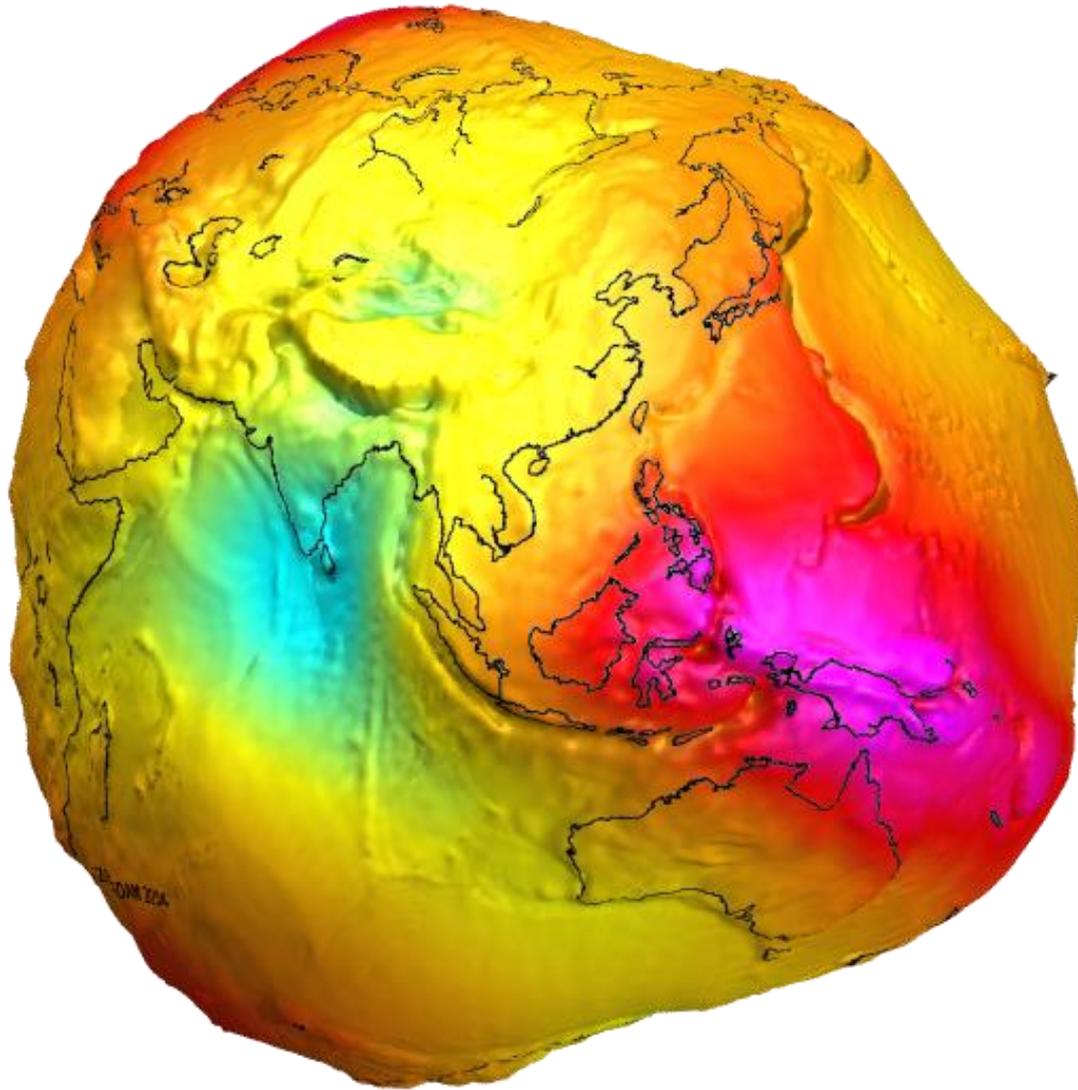
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

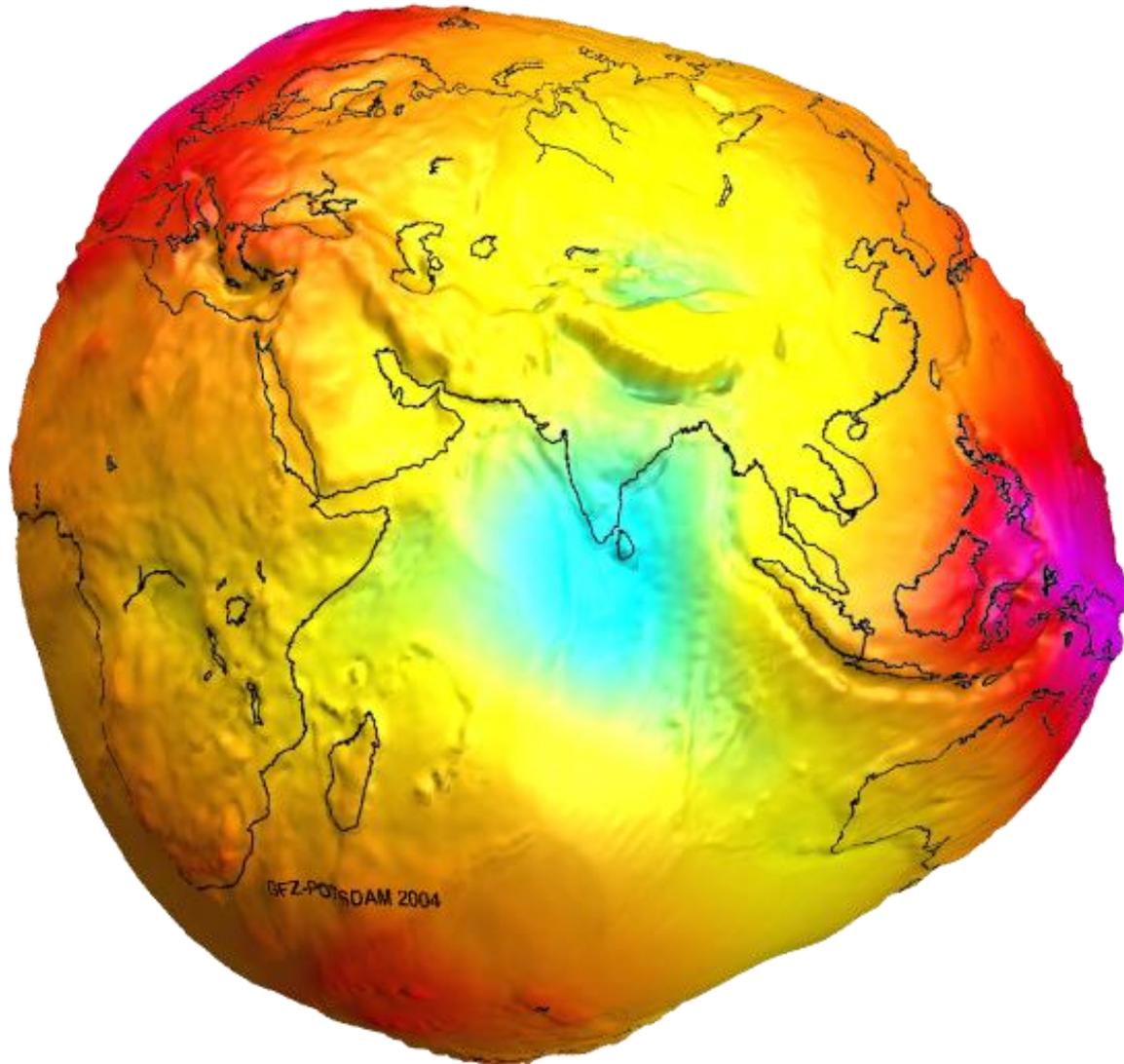
*Giovanni Costa*





# *Fisica Terrestre 2024-2025*

*Giovanni Costa*





# Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Effects on the gravity of the upper mantle convection (Mckenzie et al. 1980).

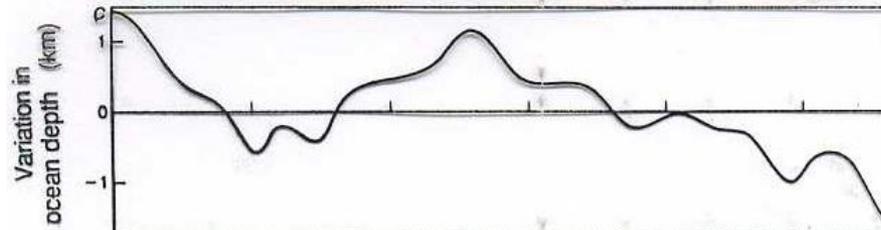
Convention cells



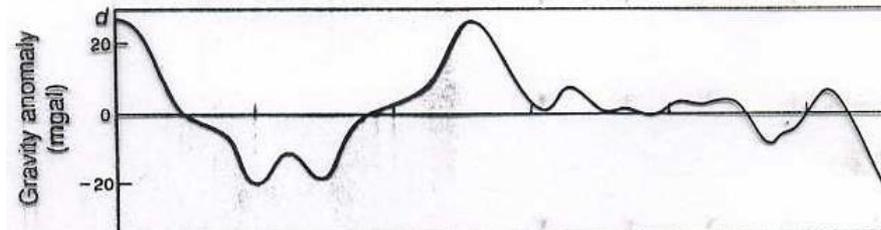
temperature (100° intervals)



ocean floor depth variation



gravity anomaly due to convection



Anomaly in geoid height due to convection

