

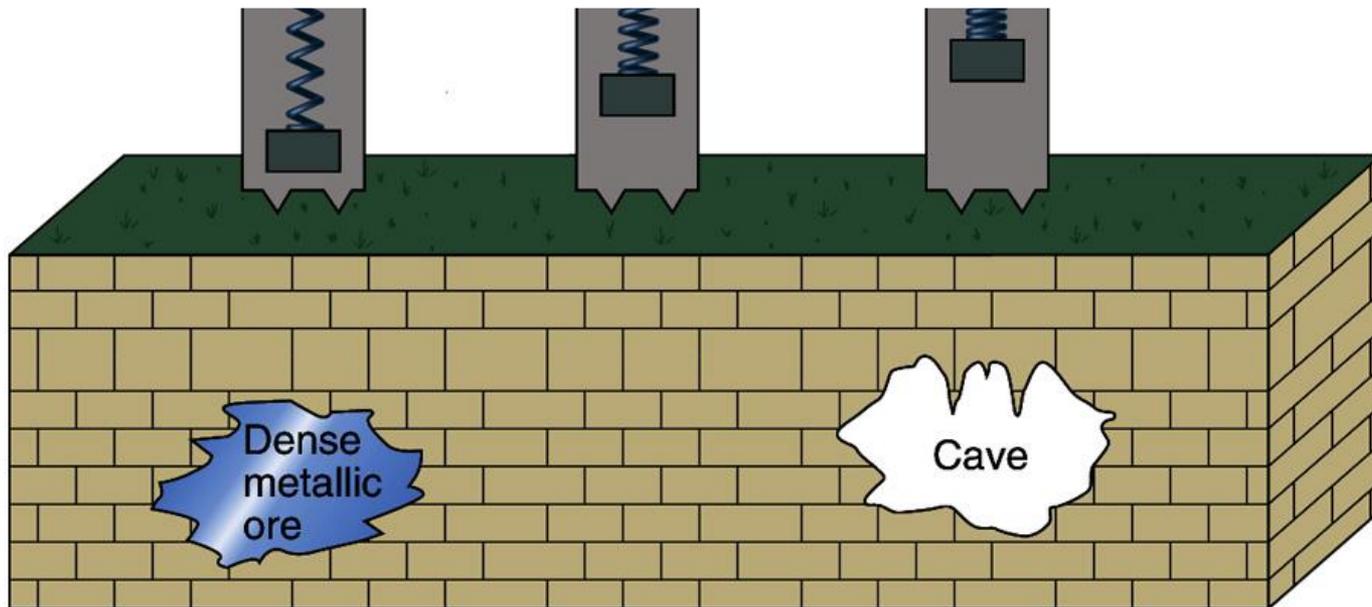


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

differences in density of materials (rocks) in Earth's interior produces small differences in local gravity field (**anomalies**)

*can be measured with a **gravimeter** (attraction of spring to mass)*



**dense material
attracts
and extends spring**

**mass uniform
and spring
is neutral**

**void (cave) has no
mass to attract
spring**



MISURE DI GRAVITA'

Il valore della gravità in un punto di misura può essere determinate mediante l'osservazione di fenomeni influenzati da g , ad esempio il moto di un pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

oppure la caduta libera di un corpo:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

I metodi che utilizzano tali fenomeni vengono detti dinamici e forniscono misure assolute (valore della gravità nel punto).

Le misure assolute sono alquanto laboriose, richiedono tempo ed un controllo accurato sulle possibili cause di errore, Vengono pertanto effettuate per grandi variazioni di g (500 mgal) e lunghissime distanze.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Gli strumenti adatti ad una rapida misura della gravità sono da ricercare nei metodi **statici, che prevedono l'osservazione di un Sistema in equilibrio.**

I gravimetri statici consentono soltanto **misure relative della gravità (differenza rispetto una misura **g** iniziale). Le misure sono rapide e possono avere accuratezze elevate (μgal).**



GRAVIMETRO ASSOLUTO

Uno dei gravimetri assoluti più accurate (10 μgal) è quello dell'Istituto Metrologico Colonnetti di Torino, che si basa sulla caduta libera simmetrica: un corpo viene lanciato in alto e ricade. Per determinare g bisogna misurare due tempi ed una lunghezza.

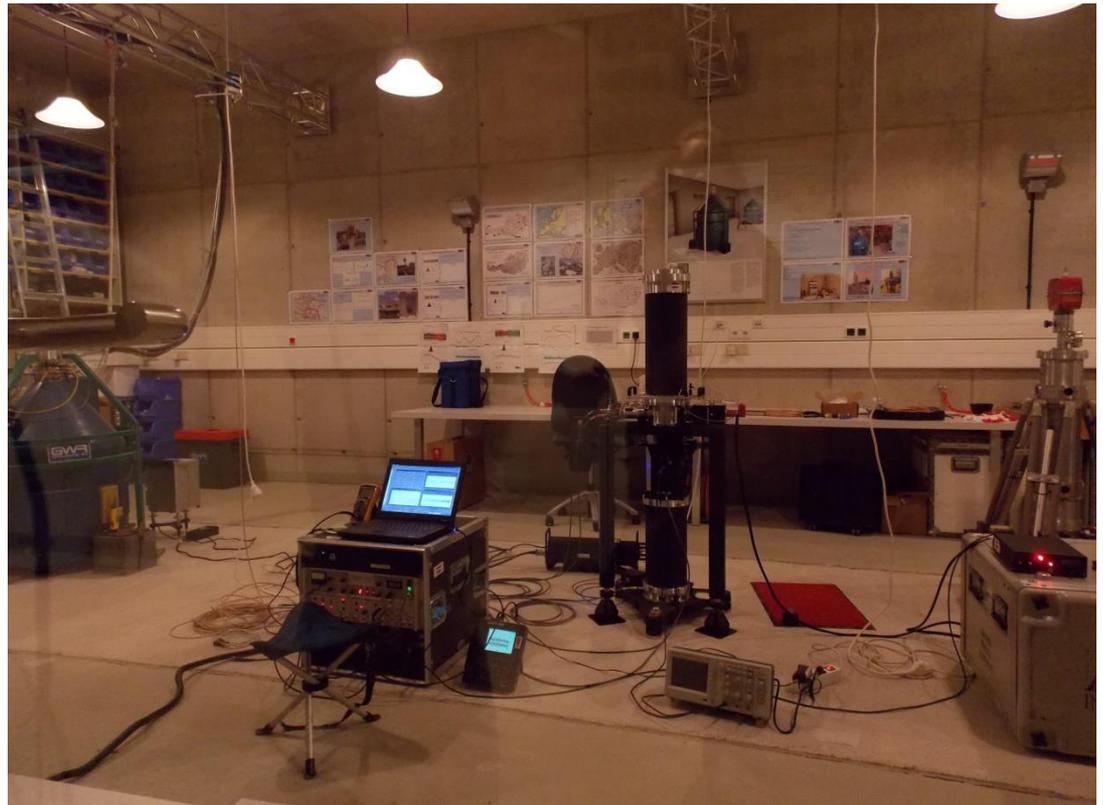


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



Medicina, (I)





Fisica Terrestre 2024-2025

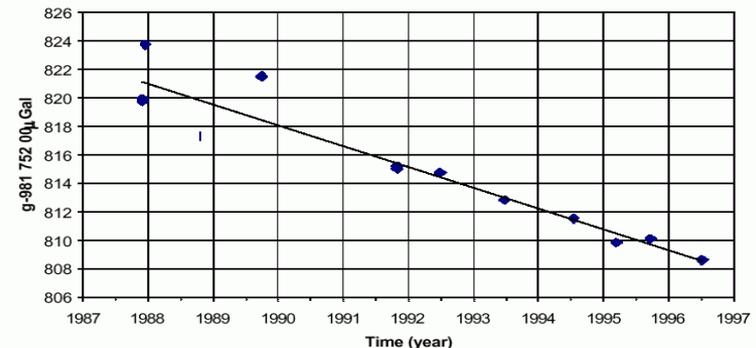
Giovanni Costa

Absolute measurement of gravity



Glacial Rebound Studies – Churchill, Canada

CHURCHILL ABSOLUTE GRAVITY TIME SERIES
(FIT TREND OF $-1.45 \mu\text{Gal}/\text{year}$)

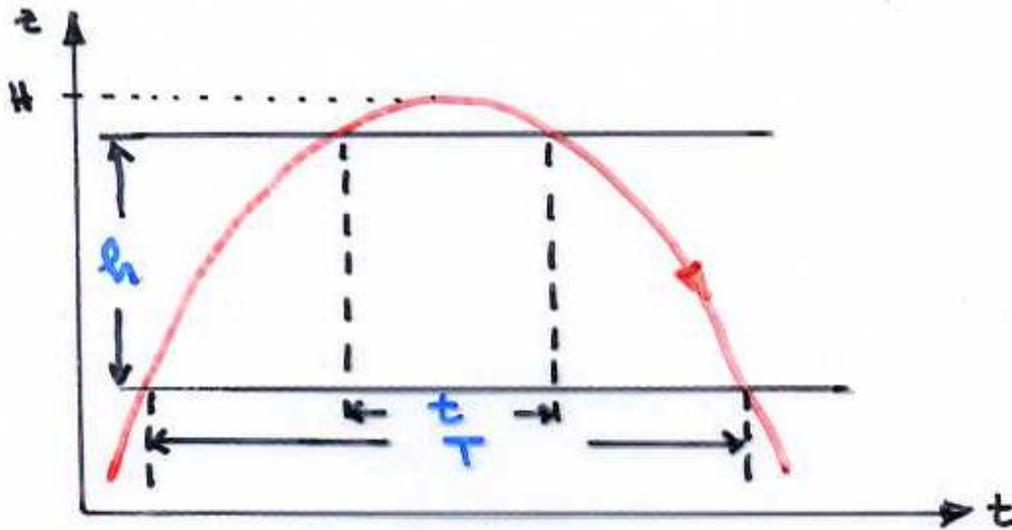


The measurement of an absolute value of gravity is difficult and requires complex apparatus and a lengthy period of observation !



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



$$H = \frac{1}{2}g \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$H - h = \frac{1}{2}g \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

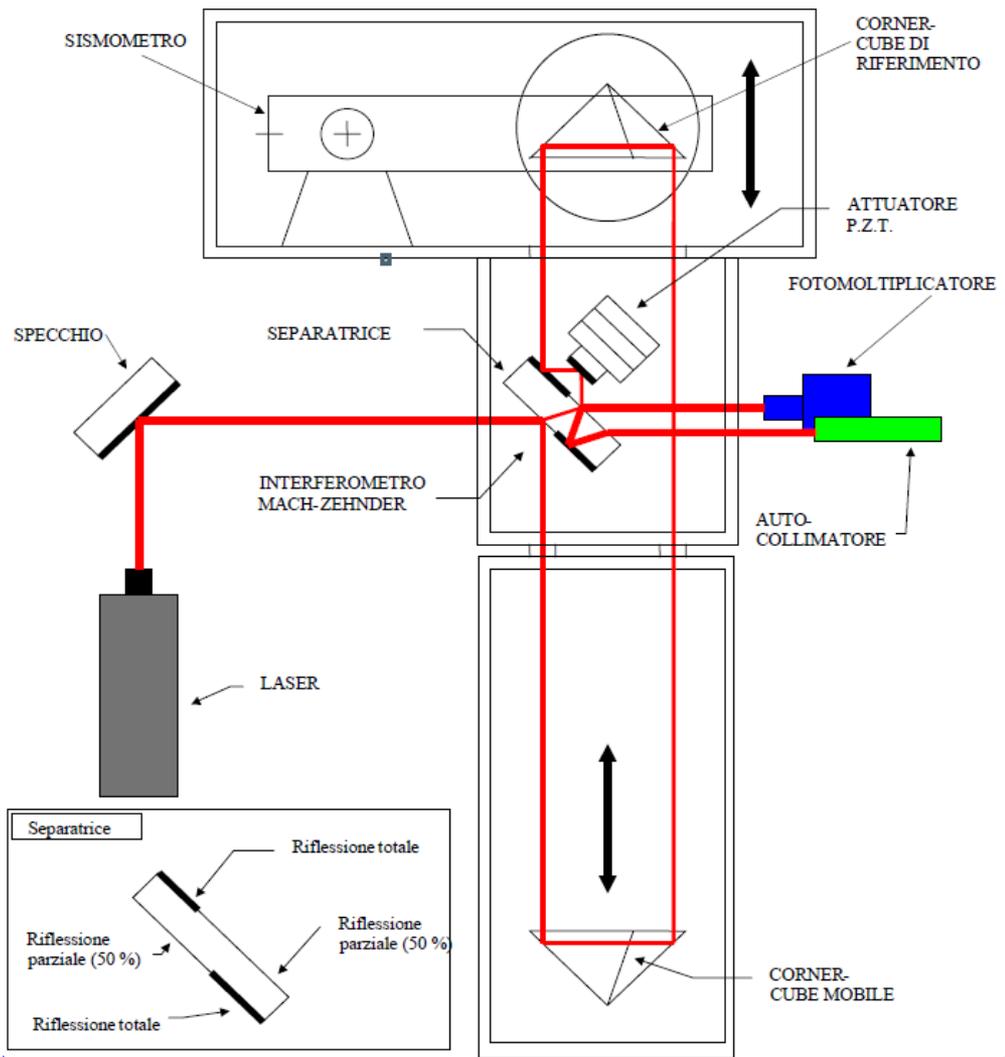
$$h = \frac{1}{8}g(T^2 - t^2)$$

$$g = \frac{8h}{T^2 - t^2}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



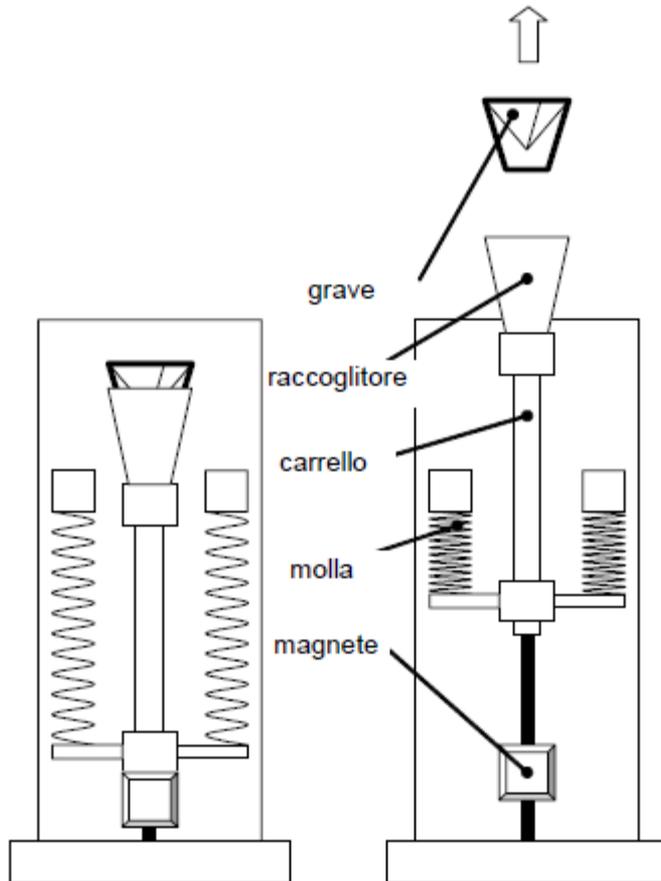
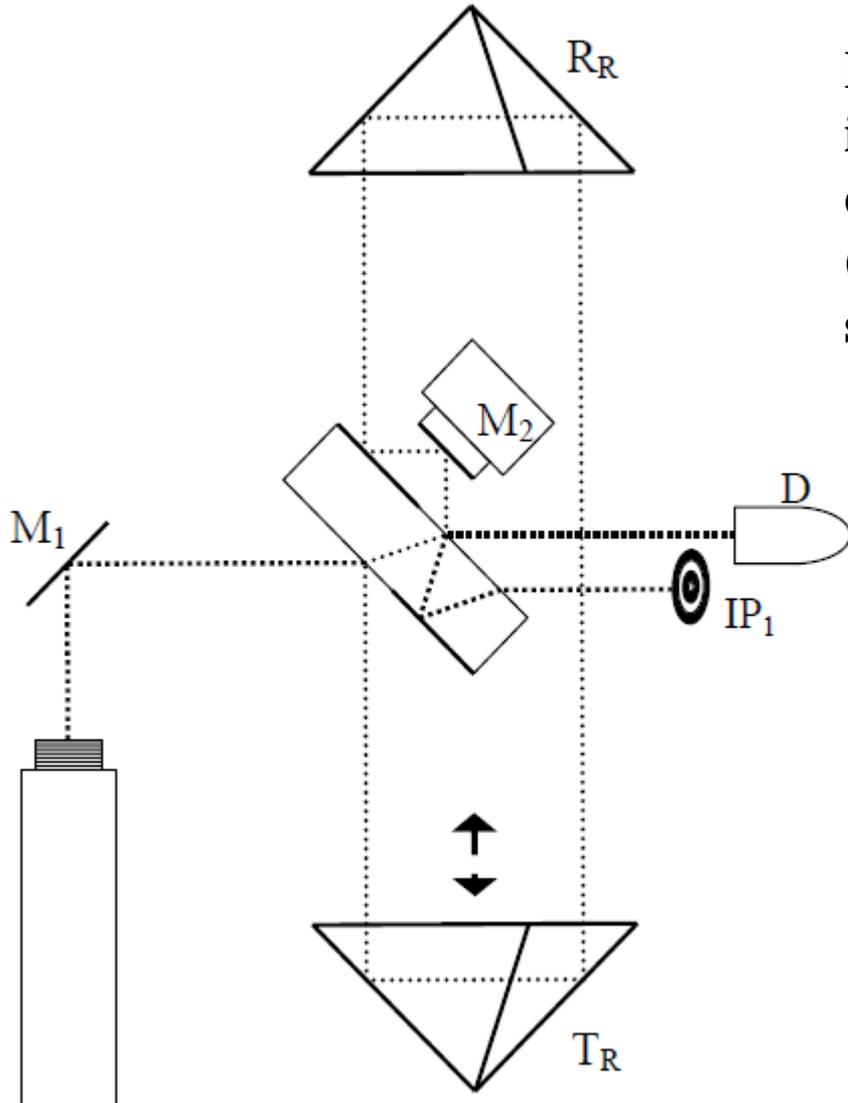


Fig. 8: disegno schematico del sistema di lancio.



Fig. 10: IMG-C-02 nel Lab Forze INRIM.



Lo strumento è essenzialmente un interferometro di Michelson: la lunghezza di riferimento è data dal triedro fisso (sopra M_2), la lunghezza da misurare è lo spostamento del triodo sul corpo.

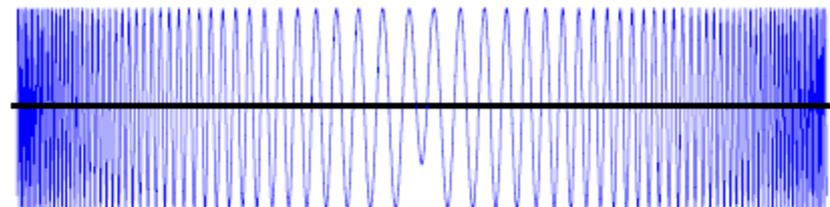
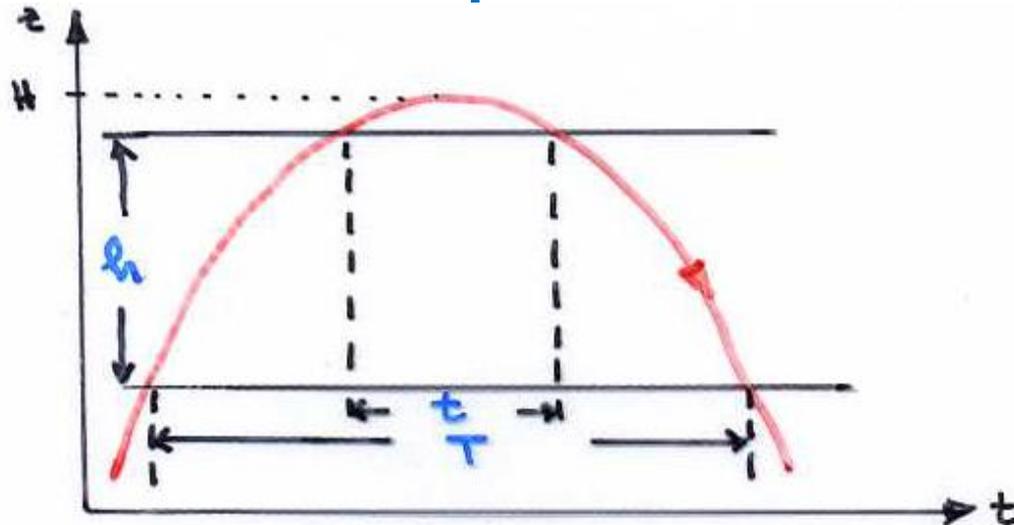
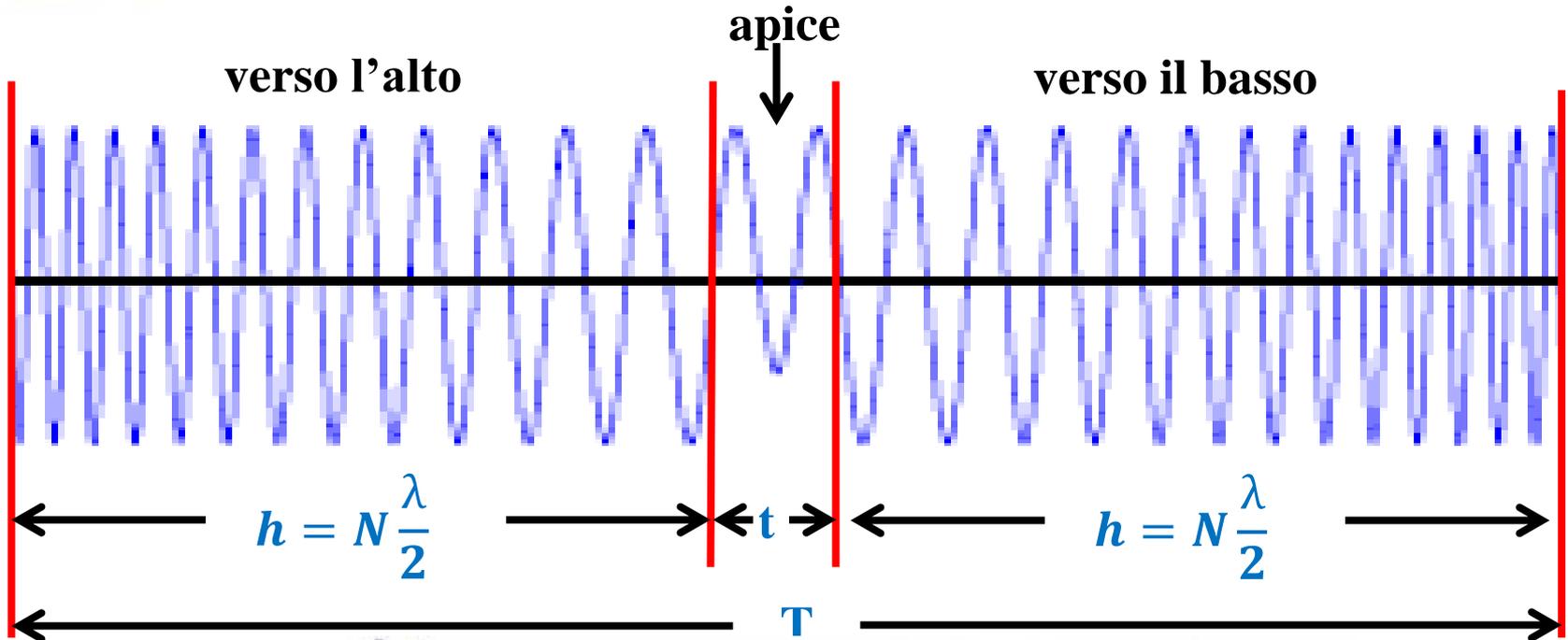


Figura 3: layout schematico del sistema ottico interferometrico e frange di interferenza rilevate



Fisica Terrestre 2024-2025

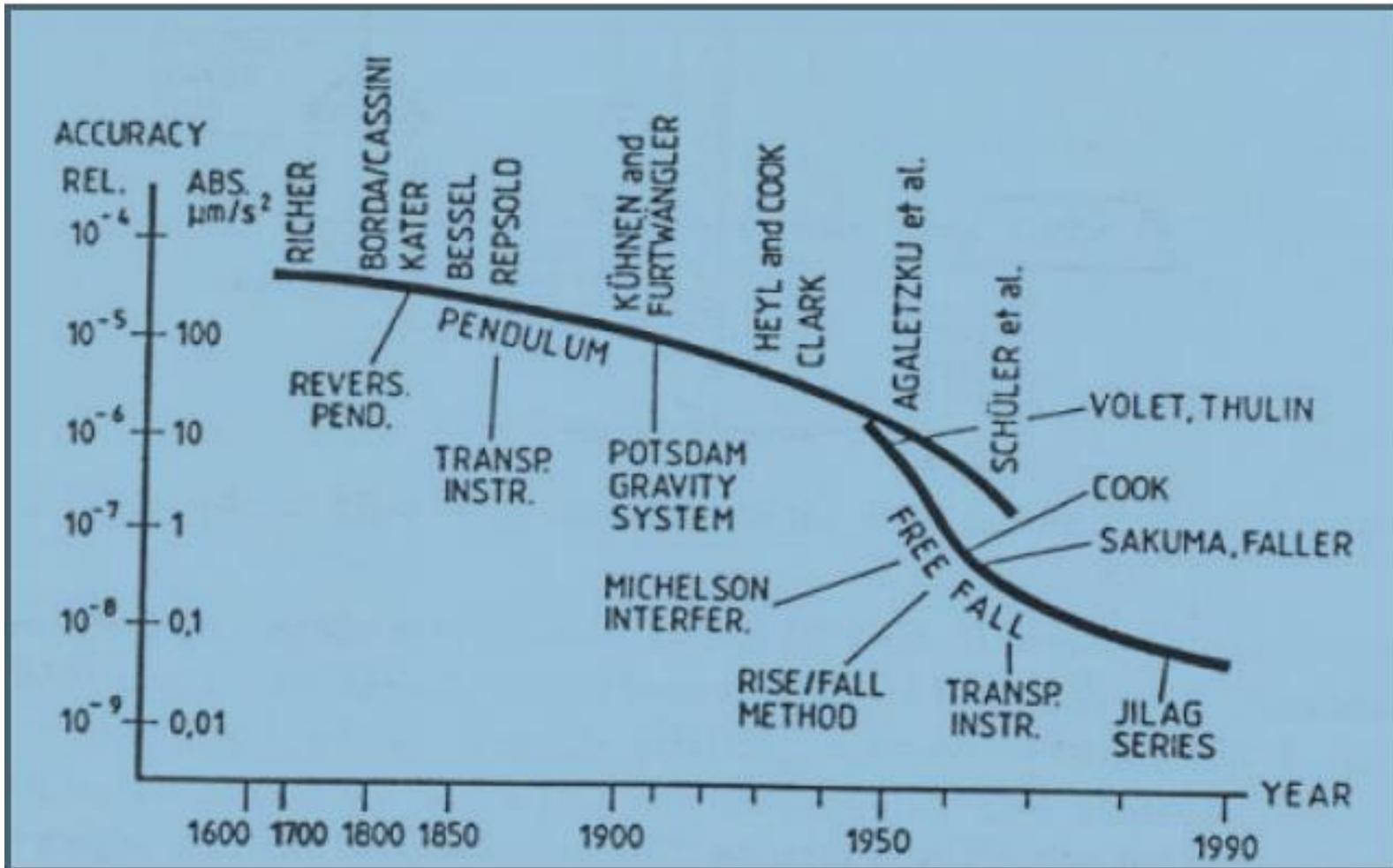
Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

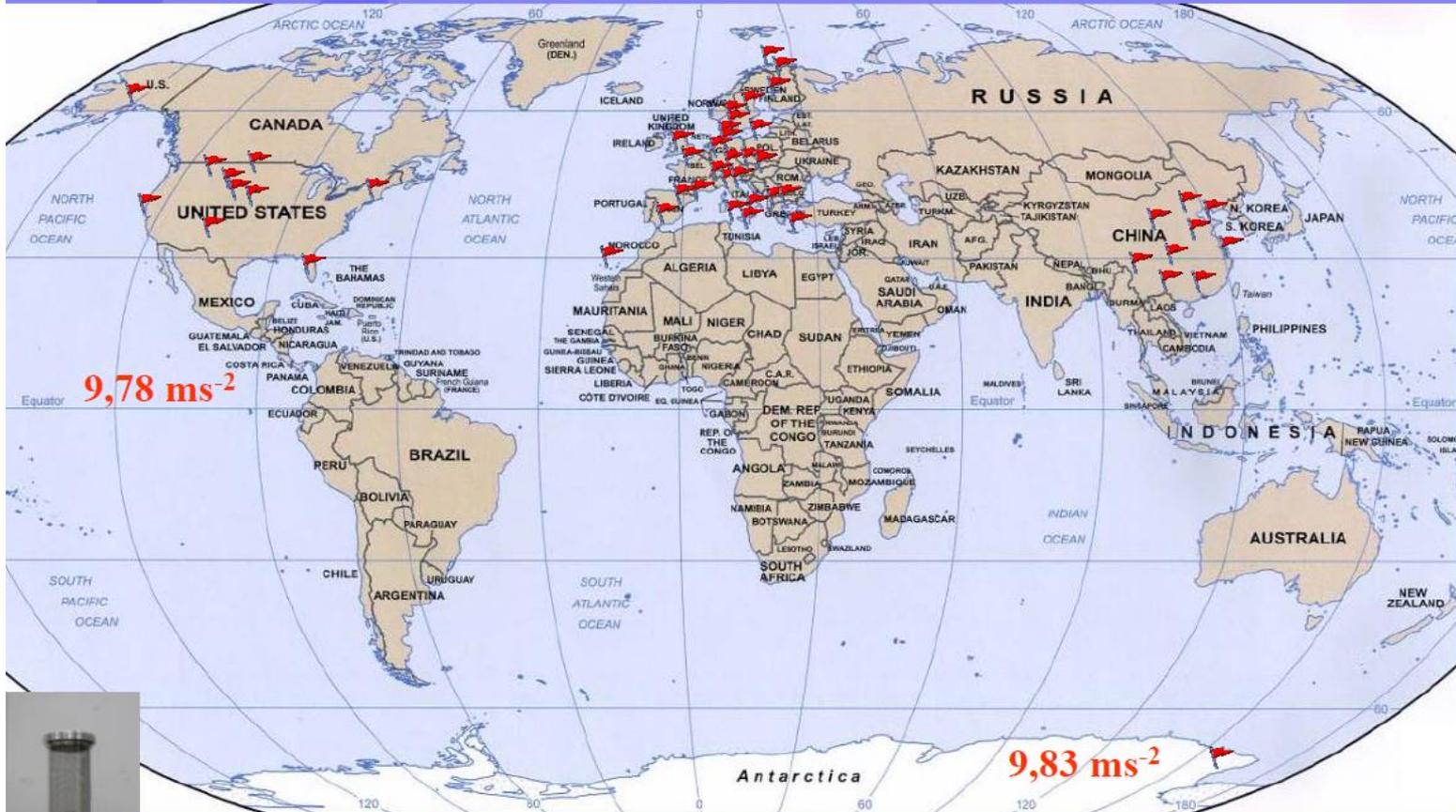




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Misure assolute con il gravimetro IMG-CNR

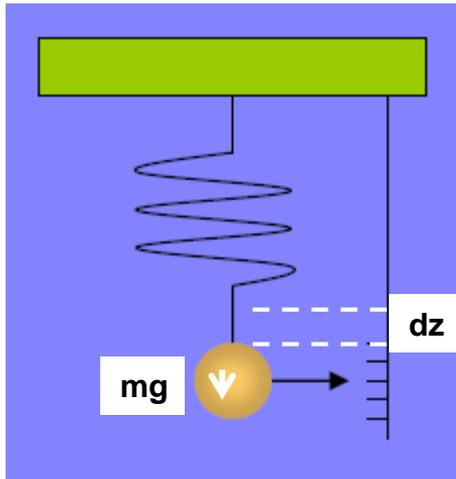


Complessive: più di 200 "ufficiali"

GRAVIMETRO LINEARE

Il principio è quello del dinamometro: un massa m sospesa ad una molla con costante k . Nella condizione di equilibrio avremo:

$$mg = kz_0$$



Se la gravità varia:

$$mdg = kdz$$

Da cui:

$$\frac{dz}{dg} = \frac{m}{k}$$

E il rapporto dà la sensibilità dello strumento. Spostando la massa dalla condizione di equilibrio e applicando la legge di Newton:

$$mg - kz = m \frac{d^2(z - z_0)}{dt^2} \quad \frac{d^2(z - z_0)}{dt^2} + \frac{k}{m}(z - z_0) = 0$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

L'equazione differenziale è quella del moto armonico con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{dz}{dg}}$$

Si vede che la sensibilità è direttamente proporzionale al quadrato del periodo. Costruttivamente è difficile ottenere $T > 1$ s, per cui se si vuole misurare

$$dg \cong 10^{-5} \text{ gal}$$

occorre valutare

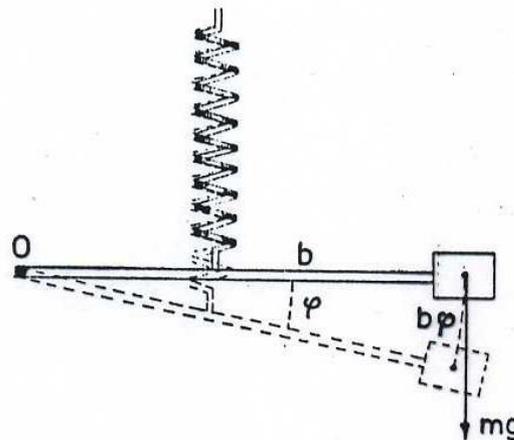
$$dz = \frac{1}{4\pi^2} 10^{-5} \approx .25 \times 10^{-6} \text{ cm}$$

e si ha bisogno di ingrandimenti fortissimi! Pertanto tali gravimetri sono stati abbandonati.

Gravimetri astatici

I gravimetri astatici sono strumenti di grande precisione e già nel 1850 avevano la sensibilità di 10 mgal.

Essi sono costituiti essenzialmente da un braccio che può ruotare attorno ad un punto O nel piano $P(x,z)$ e porta all'estremo libero una massa m ; il braccio è mantenuto in posizione orizzontale da una molla fissata ad un asse verticale passante per O . L'equilibrio del sistema dipende dai momenti delle forze in gioco rispetto ad O : uno dovuto alla g agente su m ; un'altro dovuto alla reazione elastica della molla di bilanciamento.





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

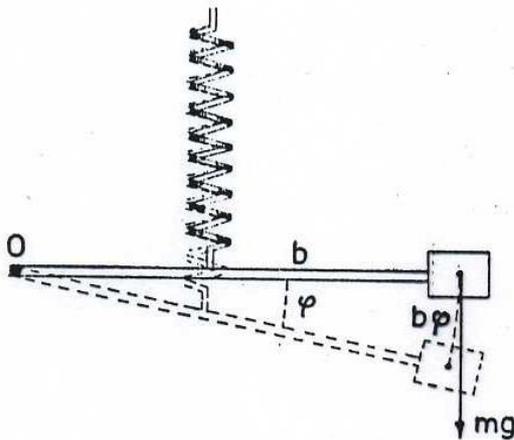
Sia φ l'angolo nel piano $P(x,z)$ compreso tra il braccio b e il piano orizzontale passante per O .

Supponiamo che per effetto di g si raggiunga l'equilibrio per una rotazione del braccio di un angolo φ ; in queste condizioni ovviamente le forze in gioco sono in equilibrio e quindi il momento totale delle forze in gioco M deve essere nullo; in termini di modulo:

$$M(g, \varphi) = 0 .$$

Derivando:
$$\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right) dg$$

si ottiene la **sensibilità** :



$$\frac{d\varphi}{dg} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial g}}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}}$$

Il momento totale è dato dalla componente stabilizzante (elastica) e quella labilizzante (gravitazionale):

$$M = M_e - M_g$$

Per piccoli valori di φ : $M_g = mgb \cos \varphi \approx mgb$

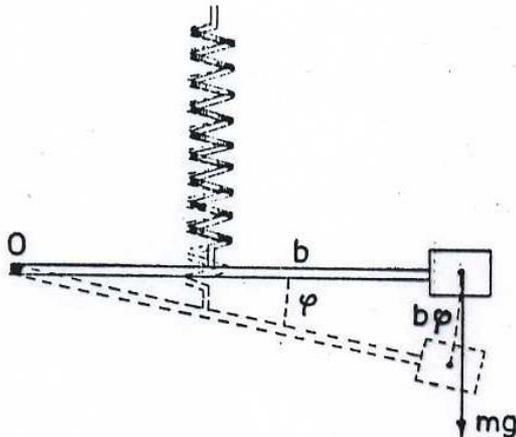
ed avremo: $\frac{\partial M_g}{\partial g} = mb$, mentre $\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ perché M_e

non dipende esplicitamente da g .

Quindi sarà:
$$d\varphi = -\frac{-mb}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}} dg$$

E per uno spostamento infinitesimo ds della massa corrisponde una rotazione $d\varphi$, si avrà:

$$ds = bd\varphi = -\frac{-mb^2}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}} dg$$

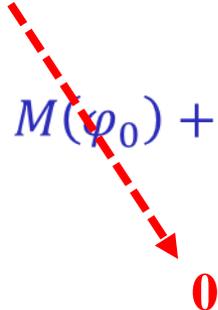




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Spostando la massa dal punto di equilibrio φ_0 essa si metterà ad oscillare attorno al punto φ_0 . Per il principio d'Alambert, l'equazione del moto si otterrà eguagliando i momenti delle forze applicate e quelli delle forze di inerzia. Il momento delle forze applicate attorno al punto di equilibrio (φ piccolo e g costante) si può scrivere:

$$M(\varphi) = M(\varphi_0) + \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right) \varphi + \dots$$




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Mentre il momento della fase d'inerzia, essendo accelerazione tangenziale $b\ddot{\varphi}$, sarà dato da:

$$M_i = b \cdot m a_t = m b^2 \ddot{\varphi}$$

Da cui si ricava che l'equazione del moto sarà:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{(\partial M / \partial \varphi)_0}{m b^2} \varphi = 0$$

Che dà ancora un moto armonico di periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m b^2}{(\partial M / \partial \varphi)_0}}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

E pertanto anche in questo caso la sensibilità è proporzionale al quadrato del periodo.

Per ottenere periodi grandi e sensibilità elevate basterà realizzare:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0 \approx 0$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Il procedimento di rendere $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0 \approx 0$ viene detto astatizzazione e può essere realizzato in vari modi:

Per avere:

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial M_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \approx 0$$

Si può procedere in 2 modi:

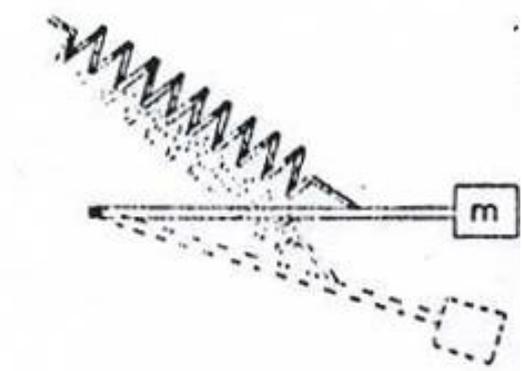


Fisica Terrestre 2024-2025

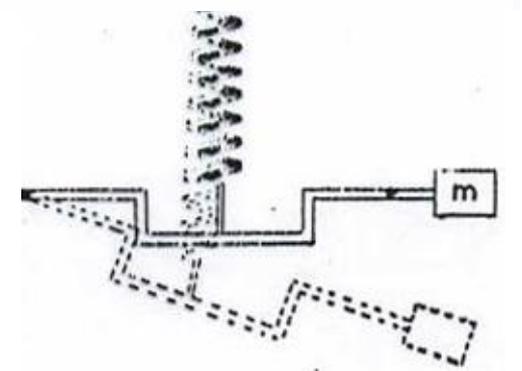
Giovanni Costa

1 - Rendere M_g indipendente da φ (per cui $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} = 0$) e realizzare le condizioni geometriche del Sistema in modo che sia $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx 0$

a) Lunghezza della molla varia pochissimo



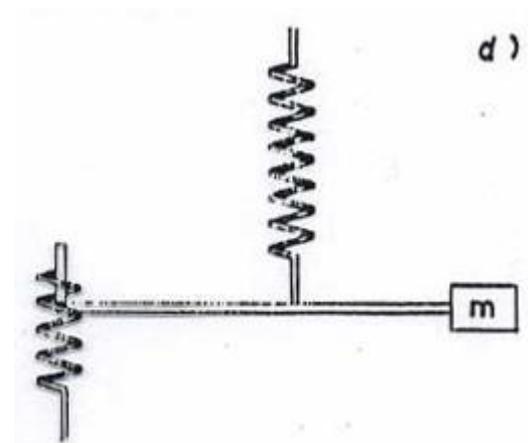
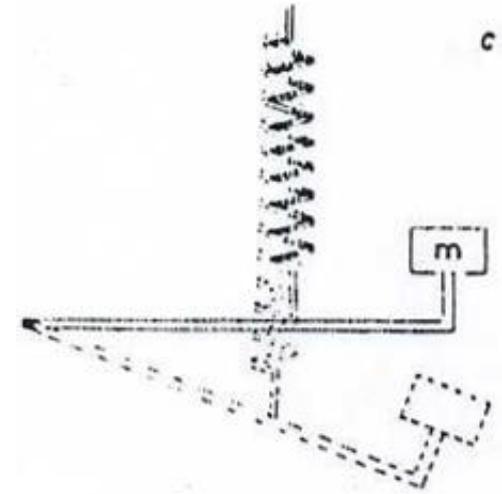
a) Aumenta la tensione ma diminuisce il braccio



2 – Rendere $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx \frac{\partial M_g}{\partial \varphi}$

a) Aumenta M_e ma aumenta anche M_g

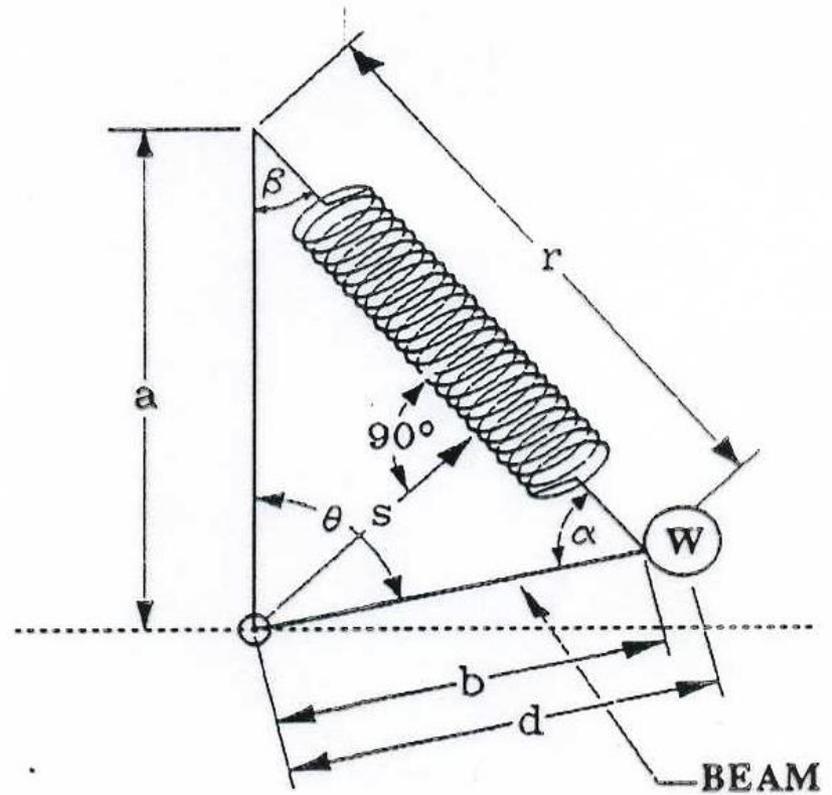
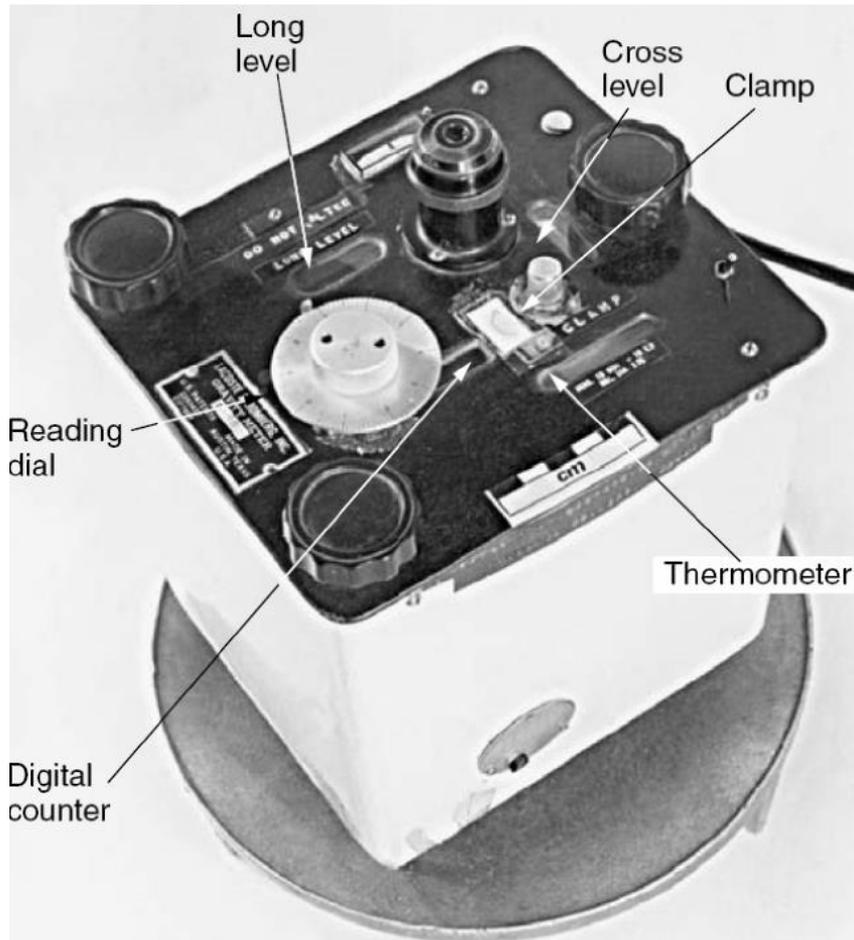
b) Ad un aumento di M_e si contrappone un momento contrario dovuto ad un'altra molla





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa





La Coste - Romberg

Momento dovuto alla forza gravitazionale:

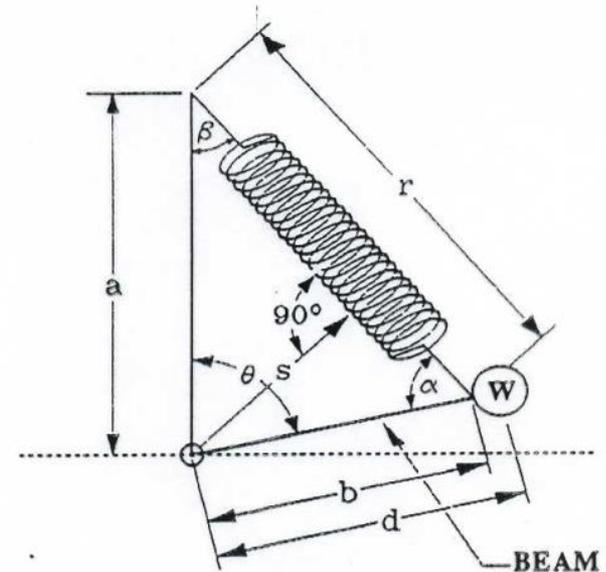
$$M_g = mg \sin\vartheta d$$

Momento dovuto alla molla di lunghezza zero:

$$M_e = - krs$$

Si dimostra facilmente che questo equivale alla:

$$M_e = - kab \sin\vartheta$$

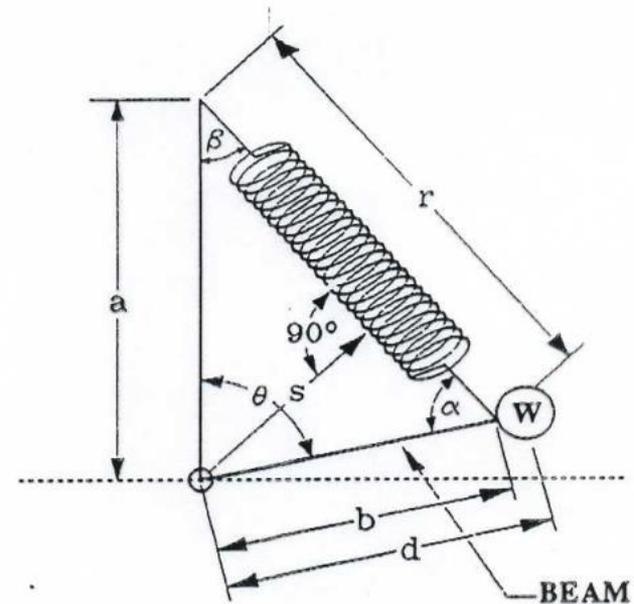




La Coste - Romberg

Per il momento totale vale allora:

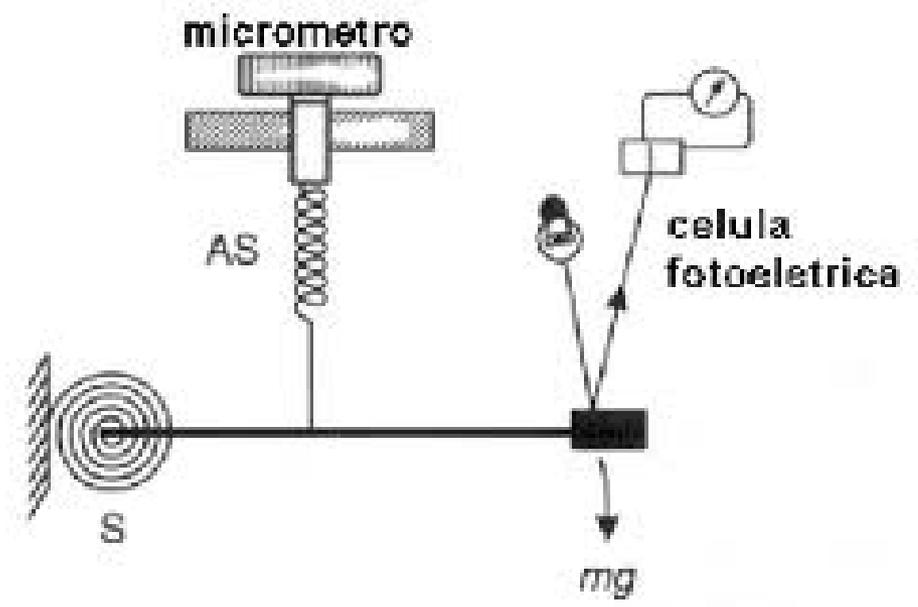
$$M = (mgd - kab) \sin\theta$$



Con opportune scelte dei parametri il momento di richiamo può essere fatto molto piccolo, ottenendo uno strumento molto sensibile.



Askania

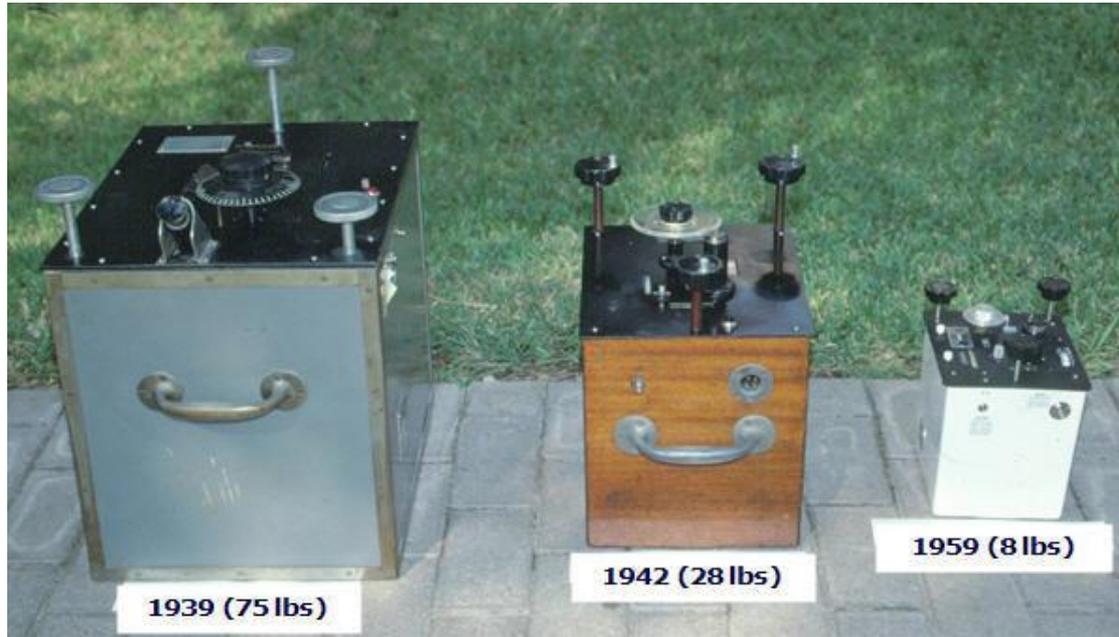




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Relative measurement of gravity



Gravimeters for general surveying use are capable of registering changes in gravity with an accuracy of 0.1 gu. A new generation of more efficient zero-length springs has been developed. Microprocessor-controlled instruments are now available which are, within limits, selflevelling, and which allow observations to be made rapidly. Also available for more specialized surveys are gravimeters capable of detecting gravity changes as small as 1 microgal (10^{-8}ms^{-2}) !!!.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Gravity survey

A microgravity survey (50 m spaced lines and 20 m spaced stations)

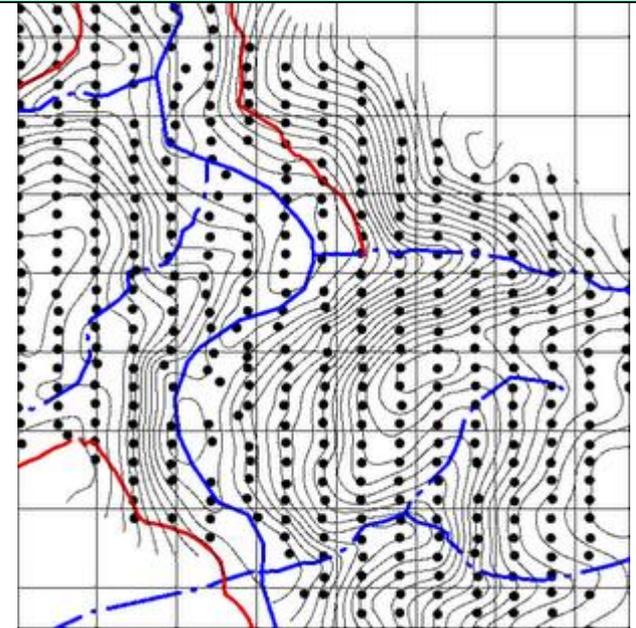
- The goal of gravity surveying is to locate and describe subsurface structures from the gravity effects caused by their anomalous densities.

- Most commonly, gravimeter measurements are made at a network of stations, spaced according to the purpose of the survey.

- In environmental studies a detailed high-resolution investigation of the gravity expression of a small area requires small distances of a few meters between measurement stations.

- In regional gravity surveys, as used for the definition of hidden structures of prospective commercial interest, the distance between stations may be several kilometers.

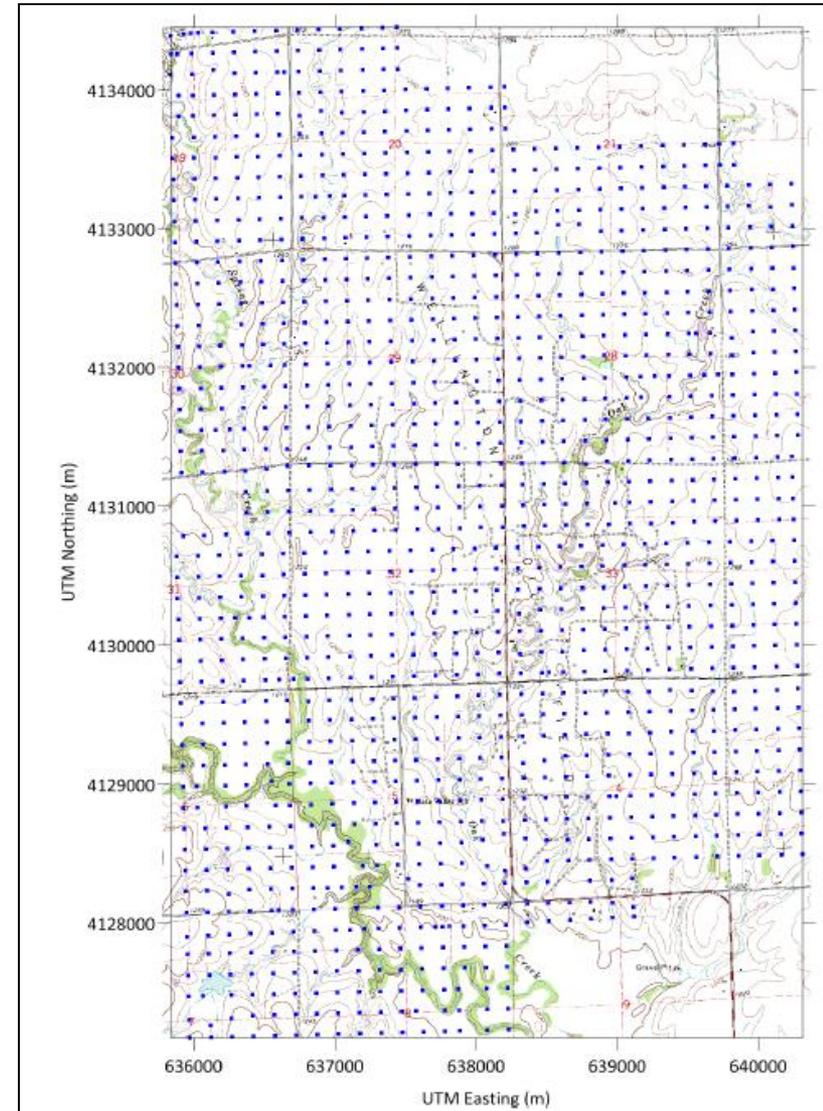
- If the area surveyed is not too large, a suitable site is selected as base station (or reference site), and the gravity differences between the surveyed sites and this site are measured.



Fisica Terrestre 2024-2025

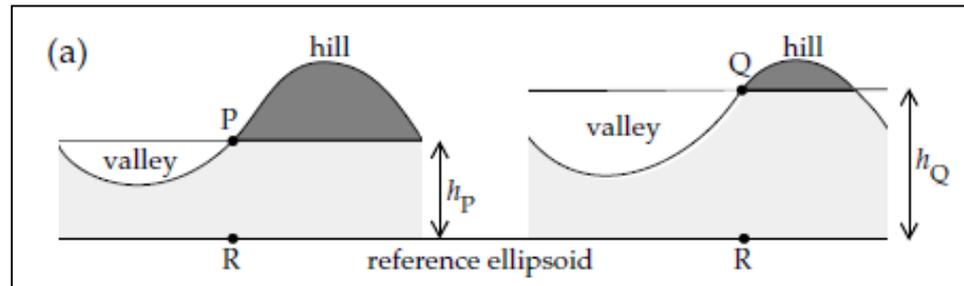
Giovanni Costa

- In order to obtain a reduced gravity value accurate to ± 1 mgal, the reduction procedure described in the following section indicates that the gravimeter must be read to a precision of ± 0.1 mgal, the latitude of the station must be known to ± 10 m and the elevation of the station must be known to ± 10 mm.
- The latitude of the station must consequently be determined from maps at a scale of $1 : 10\,000$ or smaller, or by the use of electronic position-fixing systems.
- Uncertainties in the elevations of gravity stations probably account for the greatest errors in reduced gravity values on land;
- The optimal equipment at present is the global positioning system (GPS), whose constellation of 24 satellites is now complete and an unadulterated signal is broadcast. Signals from these can be monitored by a small, inexpensive receiver.
- Use of differential GPS, that is, the comparison between GPS signals between a base set at a known elevation and a mobile field set, can provide elevations to an accuracy of some 25 mm.



- Before the results of a gravity survey can be interpreted it is necessary to correct for all variations in the Earth's gravitational field which do not result from the differences of density in the underlying rocks. This process is known as **gravity reduction** or reduction to the geoid

- In practice, it is not possible to measure gravity on the ellipsoid at the place where the reference value is known. The elevation of a measurement station may be hundreds of meters above or below the ellipsoid. Moreover, the gravity station may be surrounded by mountains and valleys that perturb the measurement.



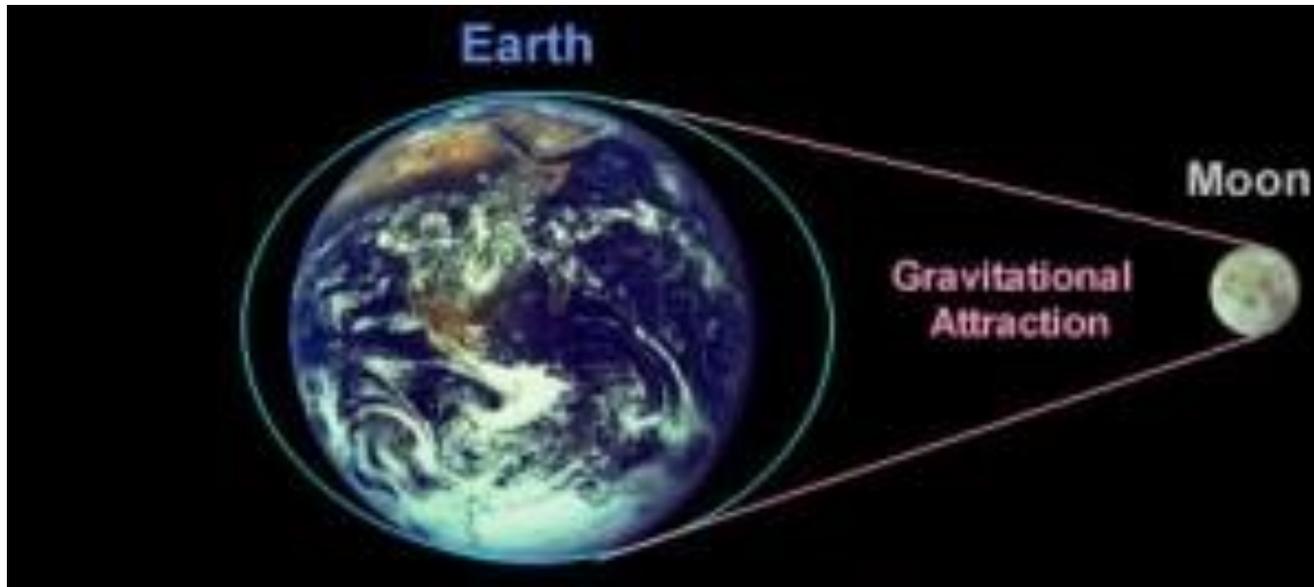
let P and Q represent gravity stations at different elevations in hilly terrain. The theoretical value of gravity is computed at the points R on the reference ellipsoid below P and Q. Thus, we must correct the measured gravity before it can be compared with the reference value.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Marea terrestre



0.1 mGal



Marea terrestre

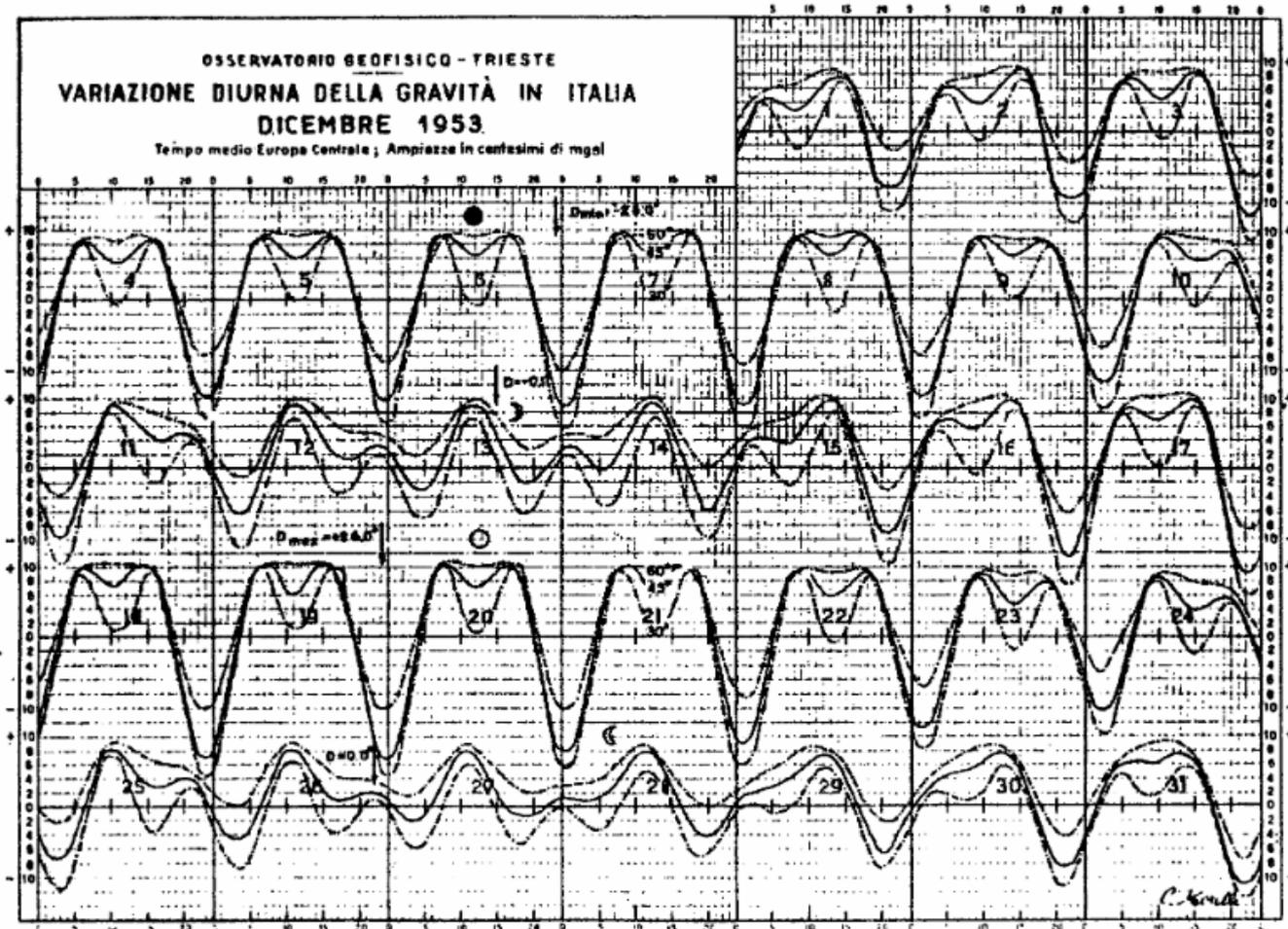


Fig. 6 – Variazione diurna della gravità in Italia; l'unità di misura è il centesimo di mgal (da Morelli)

0.1 mGal

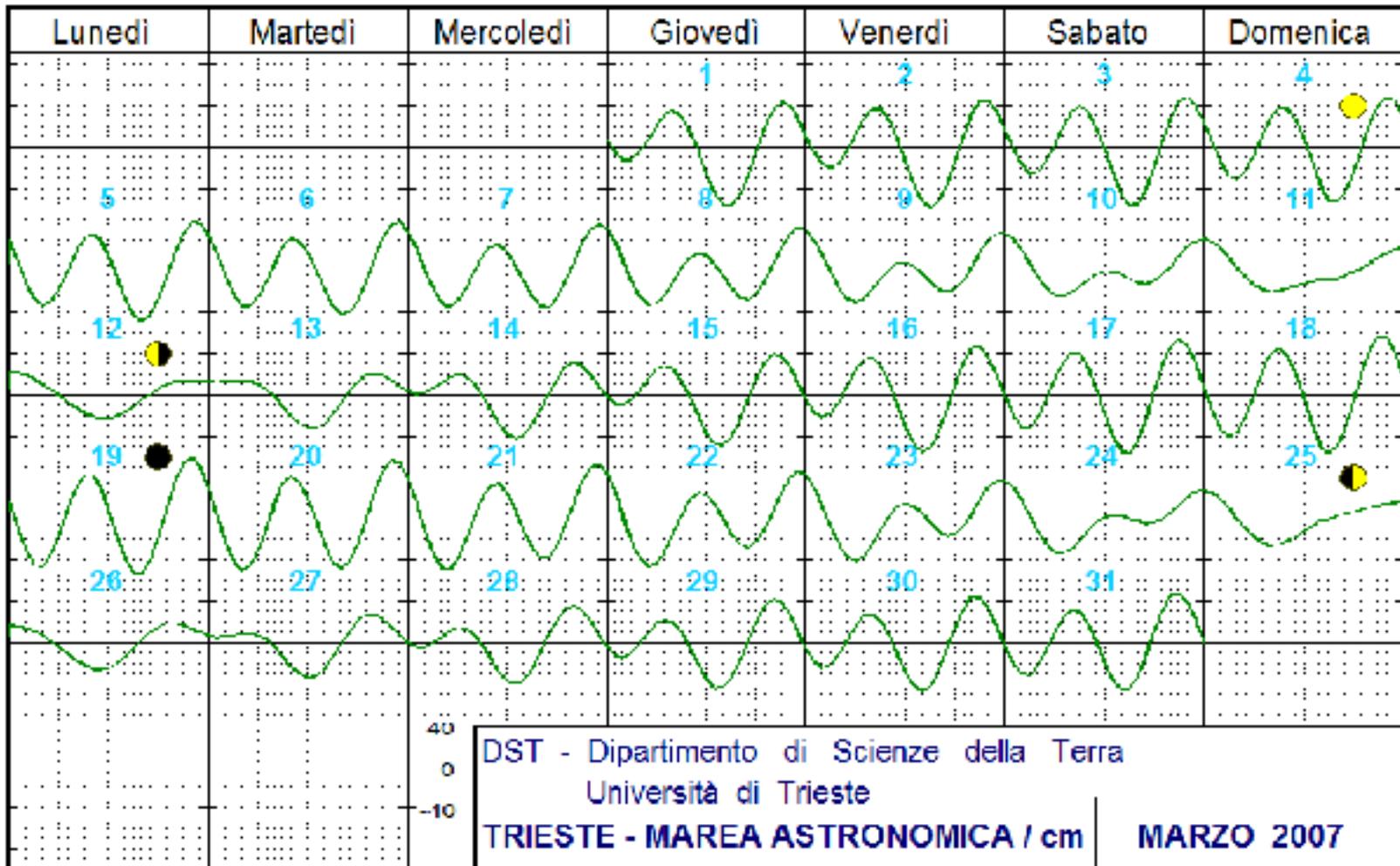


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Marea terrestre

● L.N. ● P.Q. ● L.P. ● U.Q.





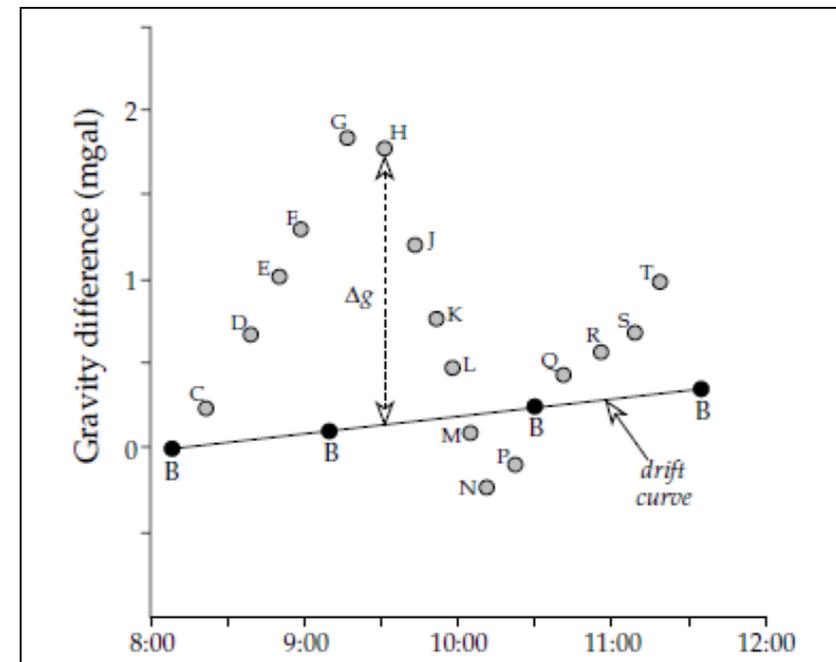
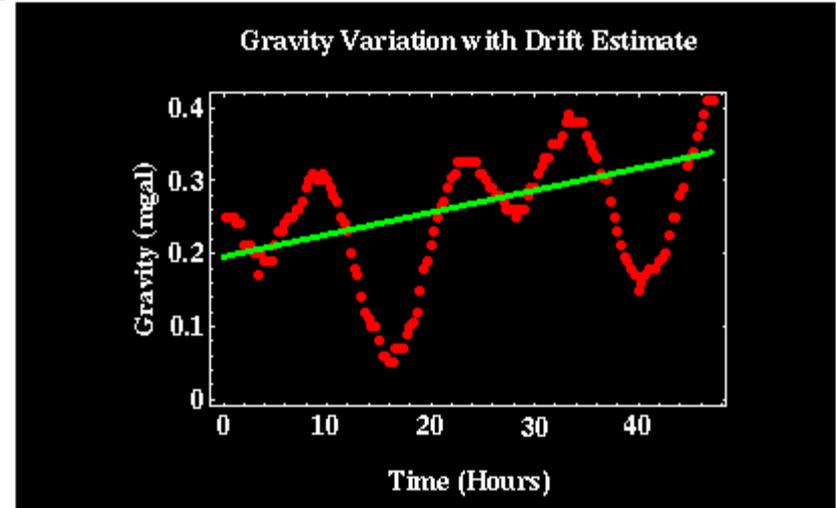
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- A shortcoming of gravimeters is the phenomenon of *drift*. This refers to a gradual change in reading with time, observable when the instrument is left at a fixed location.

- Drift results from the imperfect elasticity of the springs, which undergo anelastic creep with time. Drift can also result from temperature variations which, unless counteracted in some way, cause expansion or contraction of the measuring system and thus give rise to variations in measurements that are unrelated to changes in gravity.

- The effect is small in modern gravimeters and can be compensated by making a drift correction. This is obtained by repeated occupation of some measurement stations at intervals during the day. Gravity readings at other stations are adjusted by comparison with the drift curve. In order to make this correction the time of each measurement must be noted.





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Deriva strumentale

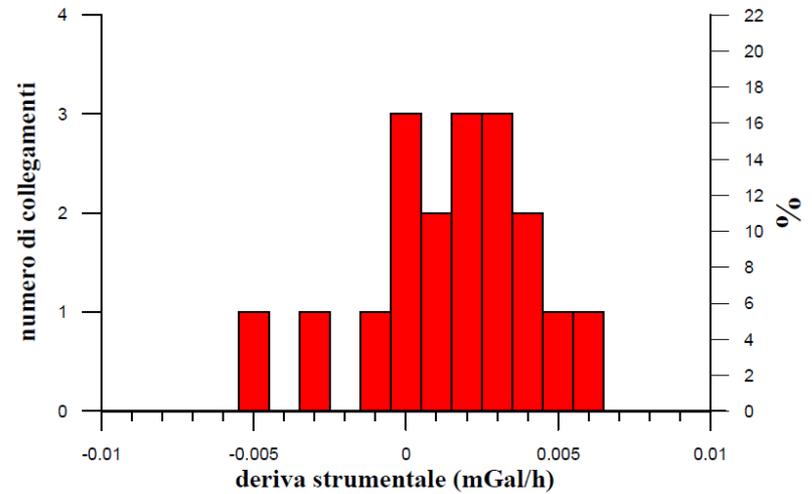
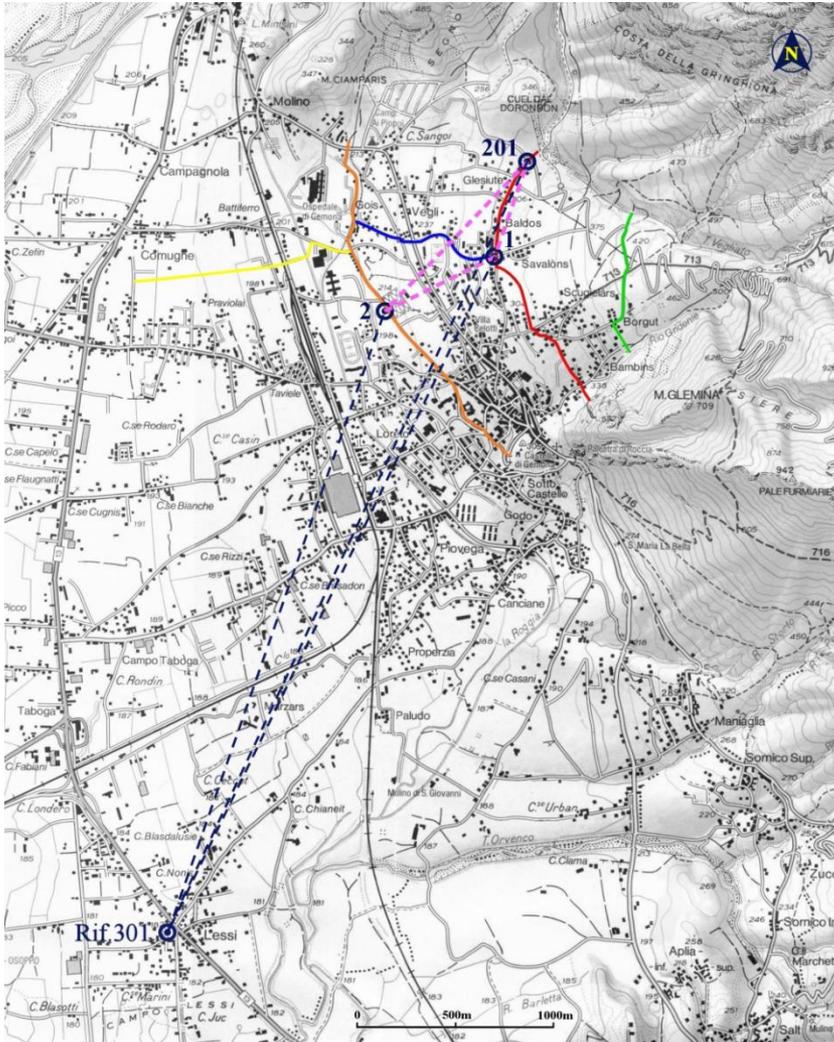


fig. 4.14 Distribuzione dei valori di deriva strumentale della rete del 1° ordine



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Per interpretare i valori di gravità g_m , che vengono misurati sulla superficie terrestre, in termini di anomalie locali o regionali, bisogna prima rimuovere certi effetti, comuni a tutte le misure. Supponendo che gli effetti di **deriva** e **calibrazione** dello strumento, nonché delle maree terrestri siano già stati (se necessario) rimossi, le correzioni (dette anche **riduzioni**) da applicare sono:

- 1) **Correzioni di latitudine (gravità normale)**
- 2) **Correzione di aria libera (di Faye)**
- 3) **Correzione della piastra (di Bouguer)**
- 4) **Correzione topografica**
- 5) **Correzione isostatica**



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Le componenti dell'accelerazione di gravità

$$g = G \frac{M}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \varphi$$

Comp.

newtoniana

$$\cong 9,8 \text{ms}^{-2}$$

$$|F| = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Comp.

centrifuga

$$\cong 2 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2} (\text{max})$$

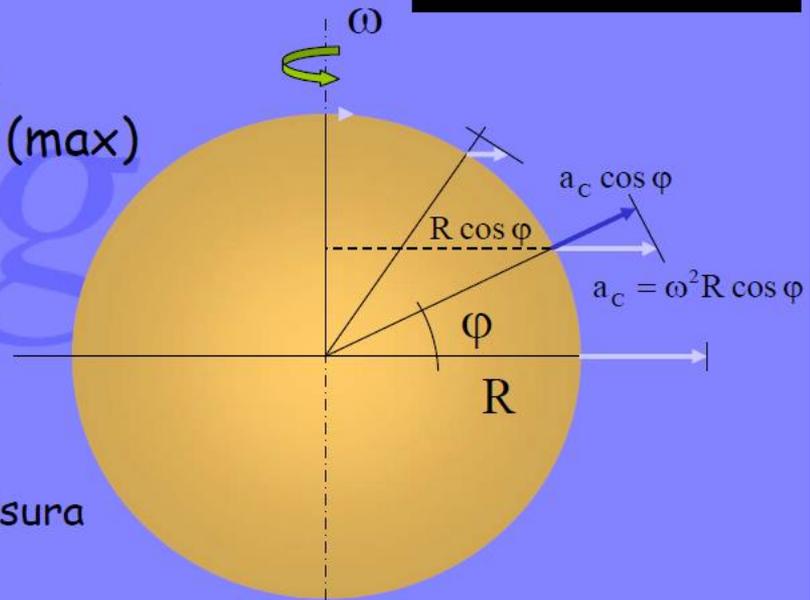
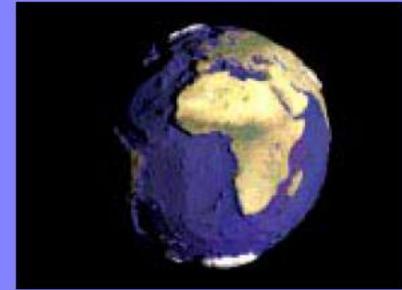
$$G = 6,573 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{rads}^{-1}$$

φ = latitudine del punto di misura





La variazione del campo gravitazionale sulla Terra

Sulla superficie terrestre la gravità cambia con:

• Il luogo

- Non sfericità della Terra (equatore-poli) $\Delta g \cong 5 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2}$
- Variazione comp. centrifuga con la latitudine
- Variazione componente newtoniana con l'altitudine $\Delta g \cong 3 \times 10^{-6} \text{ms}^{-2} \text{m}^{-1}$
- Variazione della composizione della Terra $\Delta g \cong 1 \times 10^{-5} \text{ms}^{-2}$
- Non omogeneità del terreno



La variazione del campo gravitazionale sulla Terra

Sulla superficie terrestre la gravità cambia con:

- Il tempo

Fenomeni geodinamici o tettonici
(*movimenti masse sotterranee, terremoti*) $\Delta g \cong 10^{-6} \text{ms}^{-2}$

Attrazione corpi sistema solare
(*maree gravimetriche*) $\Delta g \cong 10^{-6} \text{ms}^{-2}$

Attrazione masse oceaniche
(*ocean loading*) $\Delta g \cong 10^{-7} \text{ms}^{-2}$

Cambiamento ciclico dell'asse di
rotazione della Terra (*nutazione*) $\Delta g \cong 10^{-8} \text{ms}^{-2}$

Cambiamento istantaneo dell'asse di
rotazione della Terra (*polar motion*) $\Delta g \cong 10^{-9} \text{ms}^{-2}$

Variazione pressione atmosferica $\Delta g \cong 10^{-9} \text{ms}^{-2} \text{mbar}^{-1}$



Correzione di latitudine

La correzione si ottiene sottraendo dal valore misurato g_m il valore della gravità normale g_ϕ

$$g_\phi = g_e (1 + \alpha \sin^2 \phi + \beta \sin^4 \phi)$$

Se la zona della campagna gravimetrica è limitata, si può usare una correzione al primo ordine ottenuta derivando la formula della gravità normale:

$$\frac{dg_\phi}{d\phi} = 2g_e \alpha \sin \phi \cos \phi \qquad \frac{dg_\phi}{dl} = \frac{1}{a} \frac{dg_\phi}{d\phi} = \frac{1}{a} g_e \alpha \sin 2\phi = .814 \sin 2\phi \quad \text{mgal/km}$$

Pertanto:
$$\Delta g_\phi = \frac{dg_\phi}{dl} \Delta l$$

ove Δl è lo scostamento in direzione N-S da un punto appropriato in cui la gravità normale è g_0 .
Avremo:

$$g_\phi = g_0 \pm \Delta g_\phi$$

Possiamo pertanto esprimere i contributi della gravità nel punto di misura come:

$$g_m = g_\phi + \varepsilon_1$$

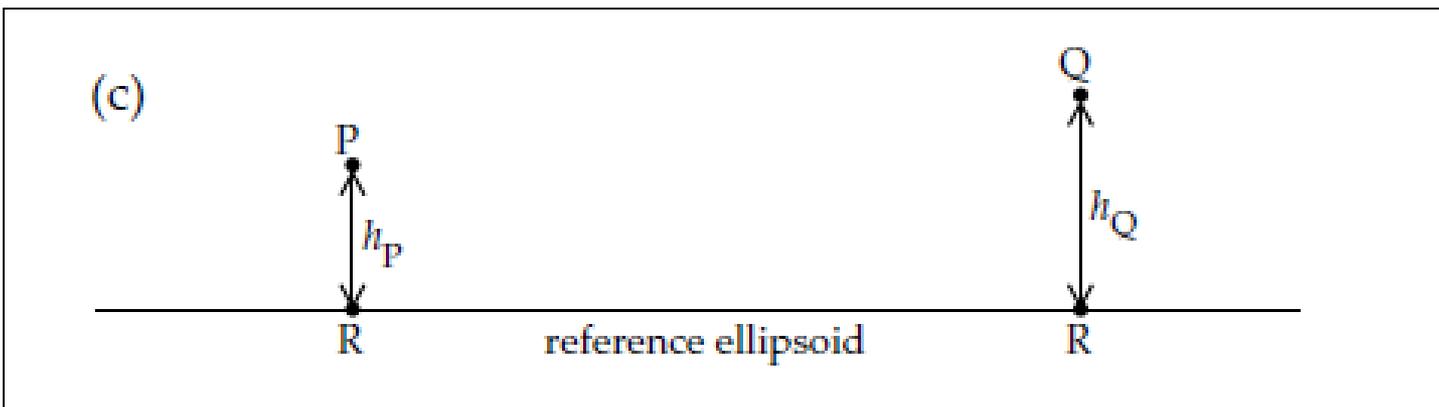
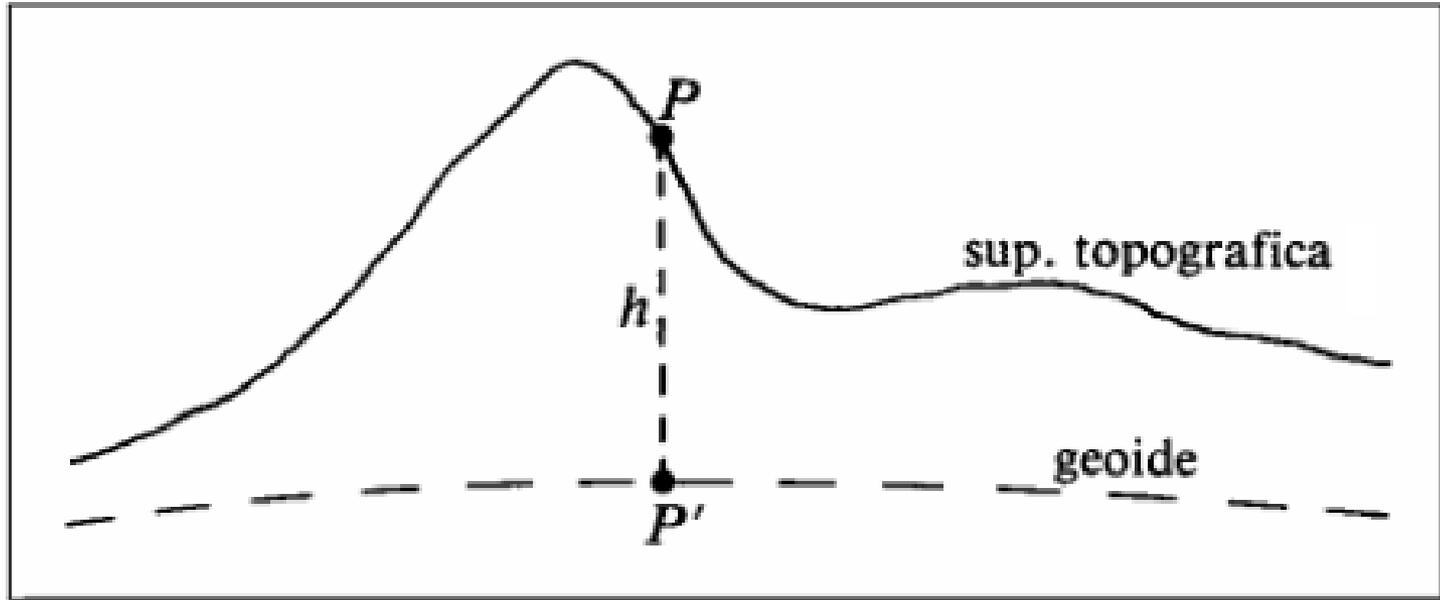
Ove con ε_1 indico il contributo di altri fattori. Pertanto:

$$\varepsilon_1 = g_m - g_\phi = g_m - [g_0 \pm \Delta g_\phi]$$

rappresenta una prima **anomalia residua** ottenuta (che però non ha nome in quanto di poca utilità).



Correzione di aria libera (di Faye)





Correzione di aria libera (di Faye)

Poichè la gravità varia come $1/r^2$, necessita correggere il dato misurato per la differenza di altitudine del punto (stazione) di misura rispetto al geode. La correzione viene detta di aria libera in quanto non tiene conto delle masse interposte tra la stazione ed il geode. Essa viene determinata con grande approssimazione, trascurando la componente centrifuga.

$$g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2}{r} \frac{GM}{r^2} = -2g/r \approx -2g_e/a$$

Pertanto la correzione per l'altitudine sarà:

$$|\Delta g_{FA}| = \left| \frac{dg}{dr} \right|_e \cdot \Delta h = \left| \frac{2g_e}{a} \cdot \Delta h \right| = .3086 \text{ mgal} / m$$

In seconda approssimazione i contributi alla gravità nel punto di misura saranno:

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \varepsilon_2$$

In cui le correzioni per l'altitudine va sottratta se il punto di misura è al di sopra del geode.

Correggendo i dati solamente per la latitudine e l'altitudine si ottiene un'anomalia (ε_2 che però chiamiamo g_{FA}) che risulta utile nelle investigazioni locali e regionali:

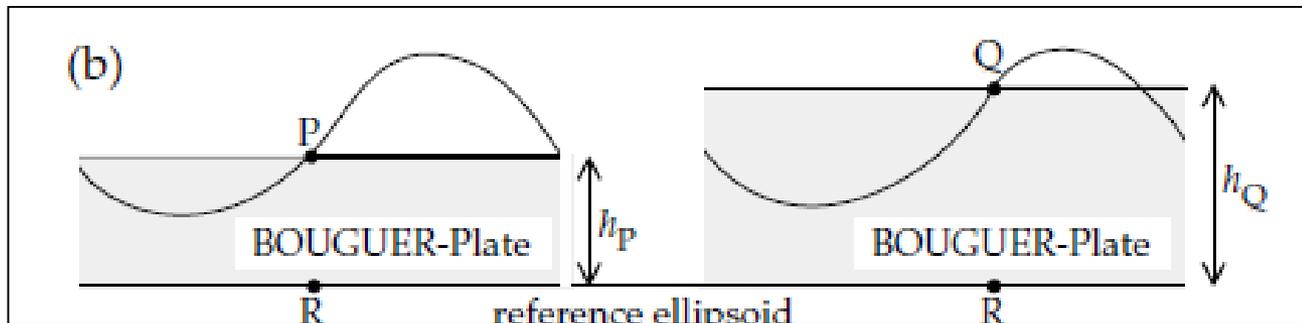
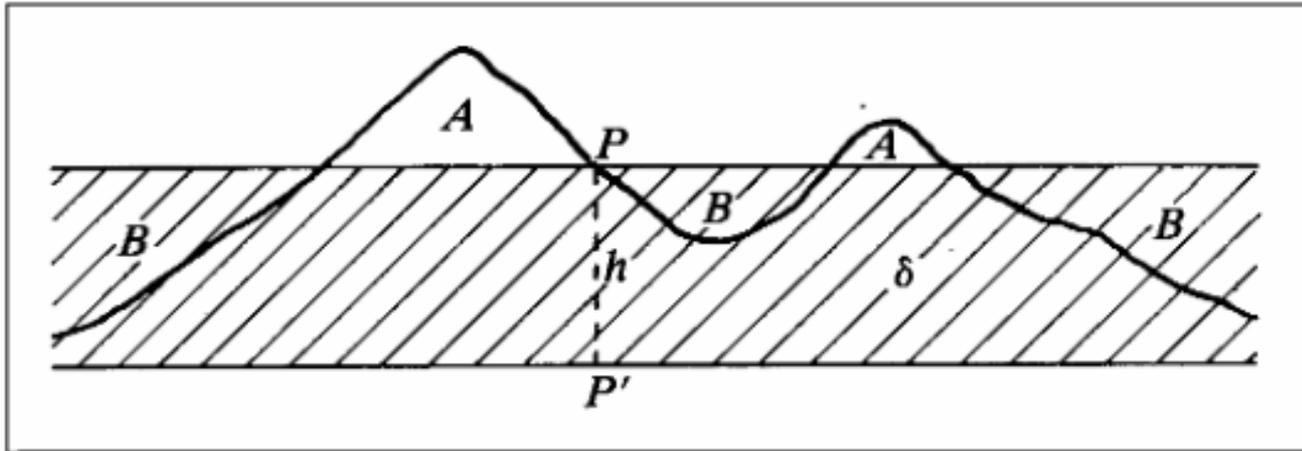
$$g_{FA} = g_m - [g_\varphi - \Delta g_{FA}] = g_m - g_\varphi + \Delta g_{FA}$$

e viene chiamata **anomalia dell'aria libera (free-air anomaly)**.



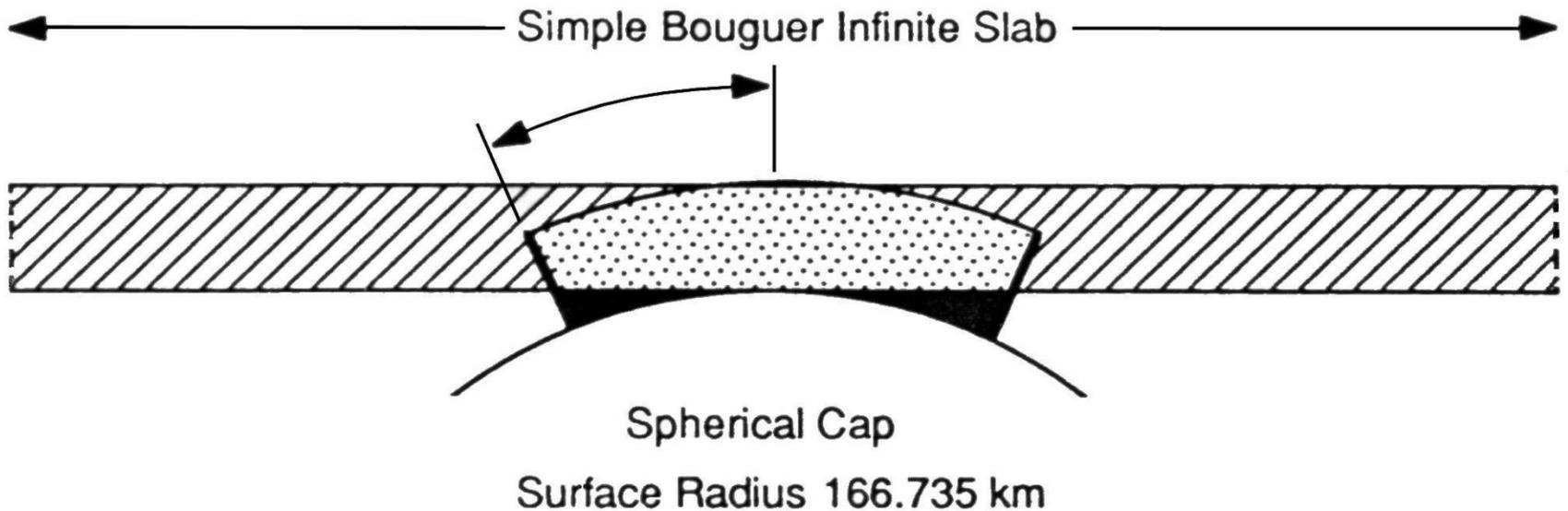
Correzione della piastra (di Bouguer)

Tiene conto dell'attrazione delle masse interposte tra la stazione di misura ad altezza h ed il geoido, che è stato ignorato nella correzione ad aria libera. Tale effetto può essere approssimato con quello di una piastra (circolare con raggio $a \rightarrow \infty$) di altezza h e densità uguale alla densità media degli strati sottostanti (NB: non nota in generale, per cui nel caso di campi regionali si assume $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$).





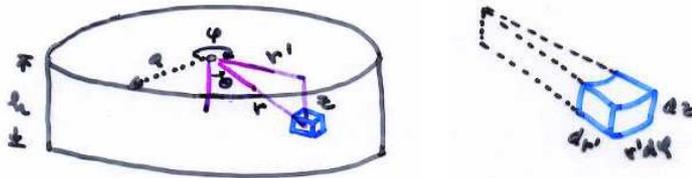
Correzione della piastra (di Bouguer)





Correzione della piastra (di Bouguer)

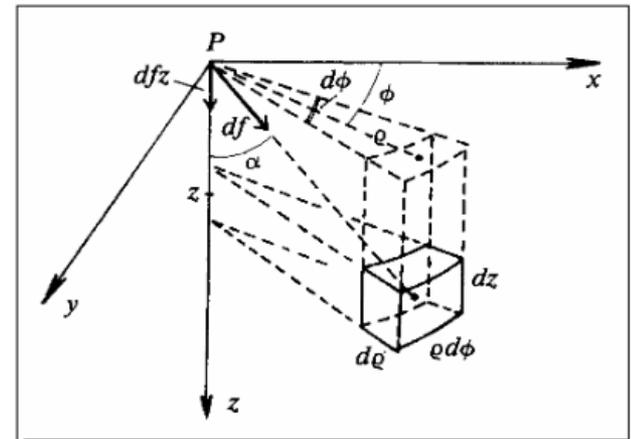
Tiene conto dell'attrazione delle masse interposte tra la stazione di misura ad altezza h ed il geoido, che è stato ignorato nella correzione ad aria libera. Tale effetto può essere approssimato con quello di una piastra (circolare con raggio $a \rightarrow \infty$) di altezza h e densità uguale alla densità media degli strati sottostanti (NB: non nota in generale, per cui nel caso di campi regionali si assume $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$). Calcoliamo il contributo alla gravità nel punto di misura di un elementino di massa



$$dV = r' dr' d\phi dz$$

$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G\rho \frac{dV}{(r'^2 + z^2)} = G\rho \frac{r' dr' d\phi dz}{(r'^2 + z^2)}$$

$$dg_z = dg \cos \Theta = dg \frac{z}{r}$$



$$\Delta g_B = \int dg_z = G\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h zdz \int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi G\rho \int_0^h zdz \int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{[r'^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho \int_0^h dz$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho h$$

$$\int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{[r'^2 + z^2]^{3/2}} \longrightarrow \left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \right]_0^{a \rightarrow \infty} = \frac{1}{z}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Pertanto l'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà:

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B + \varepsilon_3$$

La correzione è positiva poichè la piastra attrae con una massa extra il punto di misura rispetto al geoide. La correzione Δg_B risulta (per $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$) di circa **0.112 mgal/m**.

L'anomalia risultante (ε_3) viene detta **anomalia di Bouguer semplice**.

Per ottenere l'anomalia di Bouguer in mare si sostituisce all'acqua di densità 1 g/cm^3 materiale di densità $=2.67 \text{ g/cm}^3$ e quindi si somma l'attrazione addizionale (dovuta al contrasto di densità 1.67 g/cm^3) del materiale

$$2\pi G(1.67 \text{ g/cm}^3) \times (\text{profondità})$$

alla gravità in aria libera. La formula dà una correzione di **0.070 mgal/m**.

Poichè l'anomalia in aria libera è di solito molto piccola, si ottiene una forte anomalia di Bouguer positiva nella maggior parte delle regioni oceaniche. Pertanto, con dati marini, non ci sono vantaggi nell'usare le anomalie di Bouguer rispetto a quelle in aria libera.

Correzione topografica

Se la stazione di misura non è situata su un altopiano, ma in mezzo a montagne e valli, occorre aggiungere alla correzione di Bouguer quella dovuta alla topografia. Da notare che la topografia riduce il valore delle misure: infatti aggiunge all'attrazione verso l'alto (colline), ovvero provoca una mancanza di attrazione verso il basso (valli). Per calcolare le correzioni si suddivide la zona circostante la stazione di misura secondo prismi a sezione di settore circolare con una base alla quota di misura ed altezza corrispondente alla quota media del settore

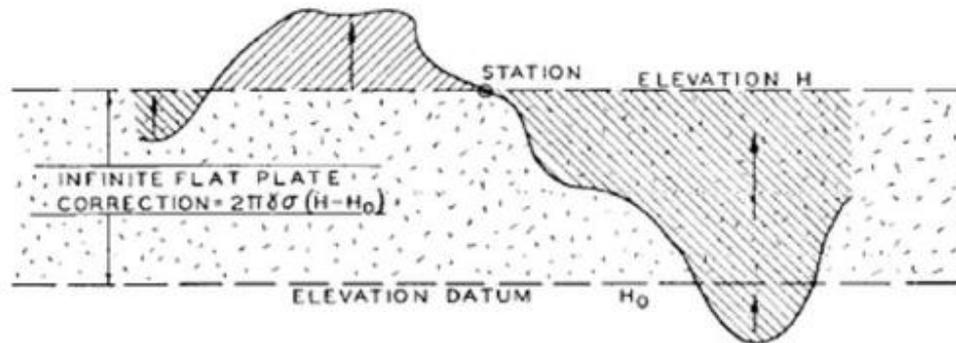
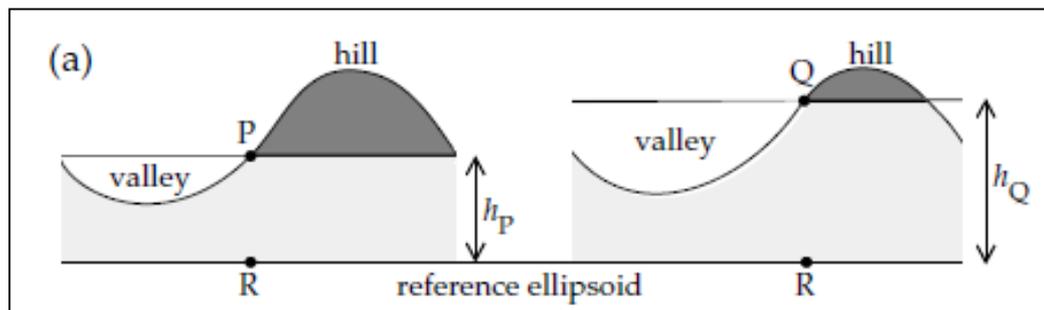


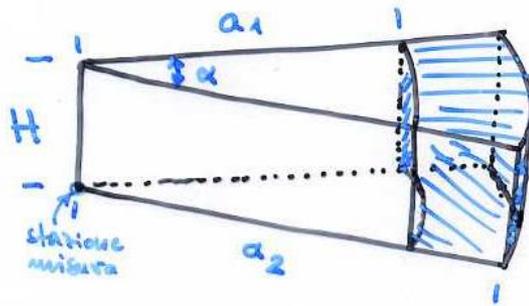
Figura 1.6. Diagramma schematico della correzione di Bouguer, che illustra gli effetti gravitazionali residui dovuti alle ondulazioni topografiche (Hammer, 1939).





Correzione topografica

Se la stazione di misura non è situata su un altopiano, ma in mezzo a montagne e valli, occorre aggiungere alla correzione di Bouguer quella dovuta alla topografia. Da notare che la topografia riduce il valore delle misure: infatti aggiunge all'attrazione verso l'alto (colline), ovvero provoca una mancanza di attrazione verso il basso (valli). Per calcolare le correzioni si suddivide la zona circostante la stazione di misura secondo prismi a sezione di settore circolare con una base alla quota di misura ed altezza corrispondente alla quota media del settore



Il calcolo dell'attrazione gravitazionale è analogo a quello della piastra infinita solo il limite di integrazione per r' varia da a_1 ad a_2 per cui

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2+z^2}} \right]_{a_1}^{a_2} \rightarrow \int_0^H \left[\frac{1}{\sqrt{a_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2+z^2}} \right] z dz = \sqrt{a_1^2+z^2} \Big|_0^H - \sqrt{a_2^2+z^2} \Big|_0^H = \sqrt{a_1^2+H^2} - \sqrt{a_2^2+H^2} - a_1 + a_2$$

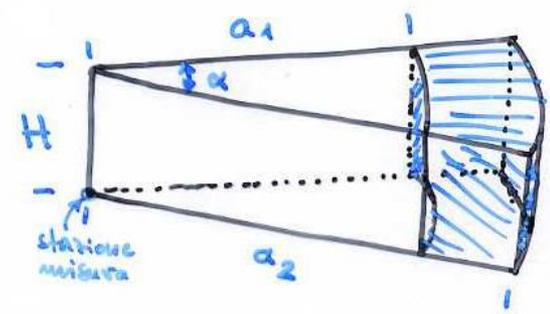
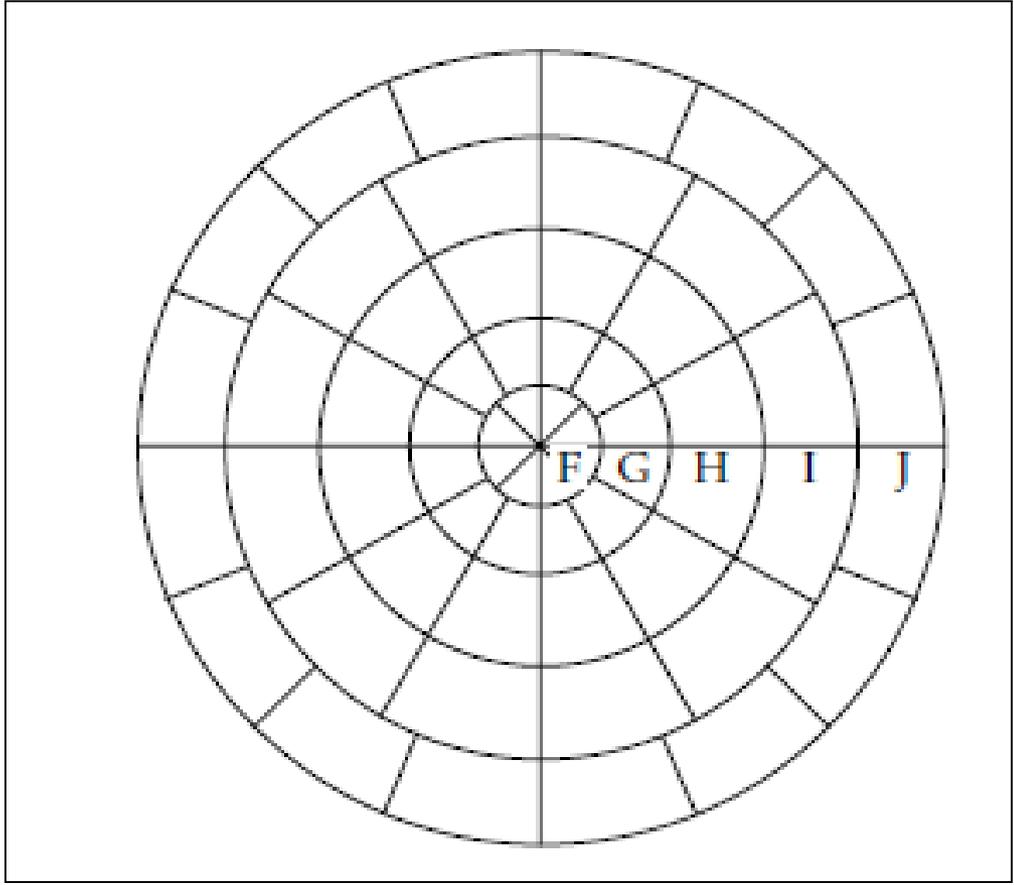
Per cui, variando il limite di integrazione in ϕ tra 0 ed α , avremo

$$\Delta g_T = G\rho\alpha \left[(a_2 - a_1) + \sqrt{a_1^2 + H^2} - \sqrt{a_2^2 + H^2} \right]$$



Fisica Terrestre 2024-2025

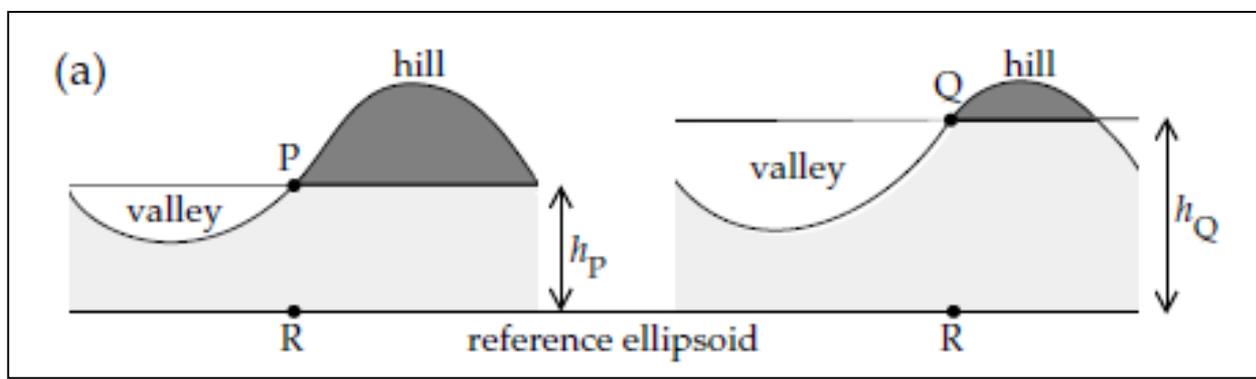
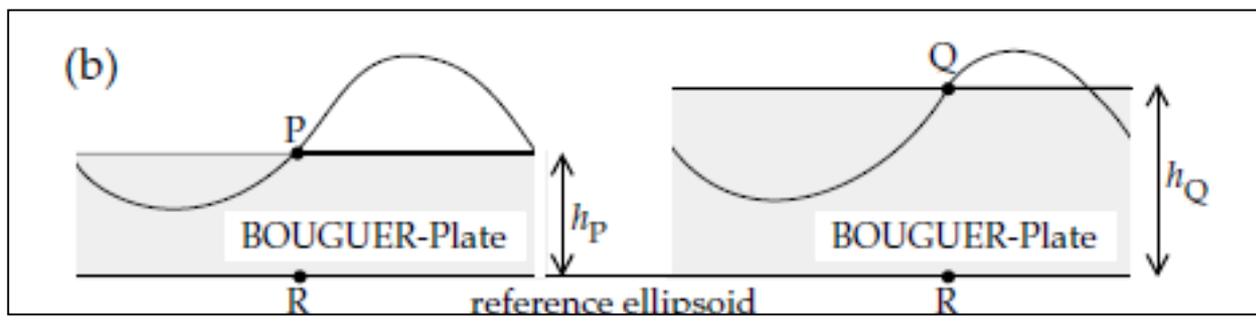
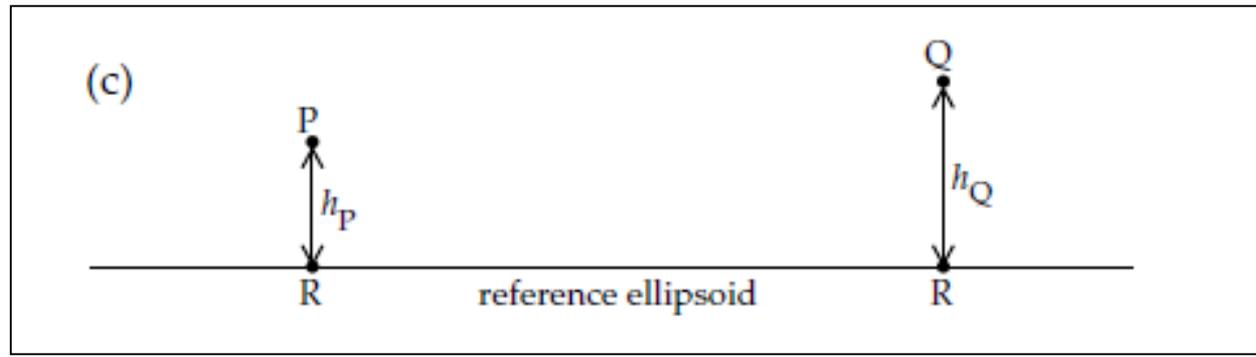
Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Ovviamente la correzione Δg_T da applicare sarà la somma delle correzioni dovute ad ogni prisma entro un determinato raggio dalla stazione.

L'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà pertanto

$$g_m = g_\phi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B - \Delta g_T + \varepsilon_4$$

Dicesi **anomalia di Bouguer (completa)** l'anomalia (ε_4) che si ottiene da quella in aria libera correggendola per l'effetto della piastra e della topografia:

$$\varepsilon_4 = g_m - g_\phi + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + \Delta g_T$$

Se la Terra non avesse variazioni di densità laterali, tutte le misure di gravità, corrette per gli effetti visti sopra, sarebbero identiche. Pertanto le differenze residue riscontrabili ε_4 costituiscono un'anomali di gravità g_B che è il risultato di variazioni laterali di densità.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

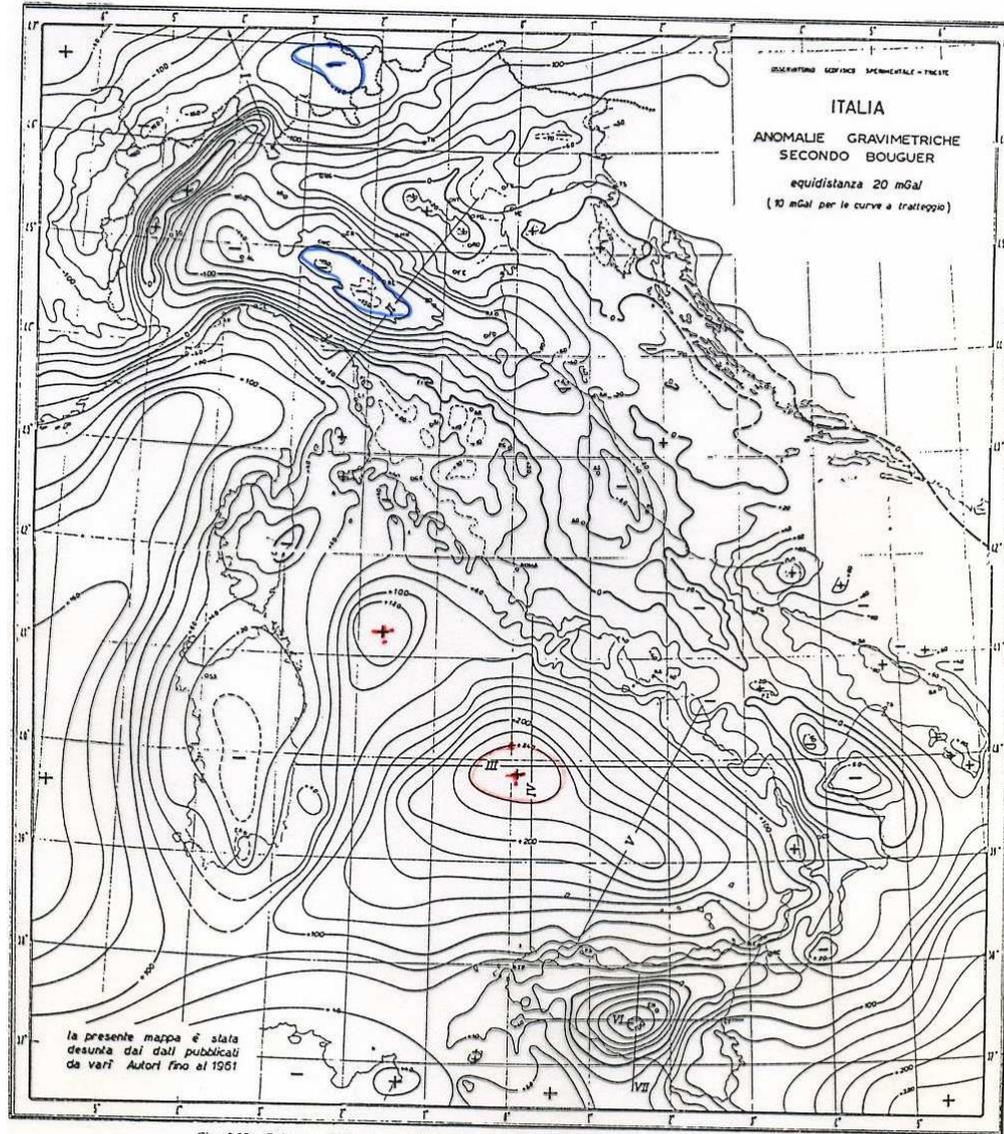
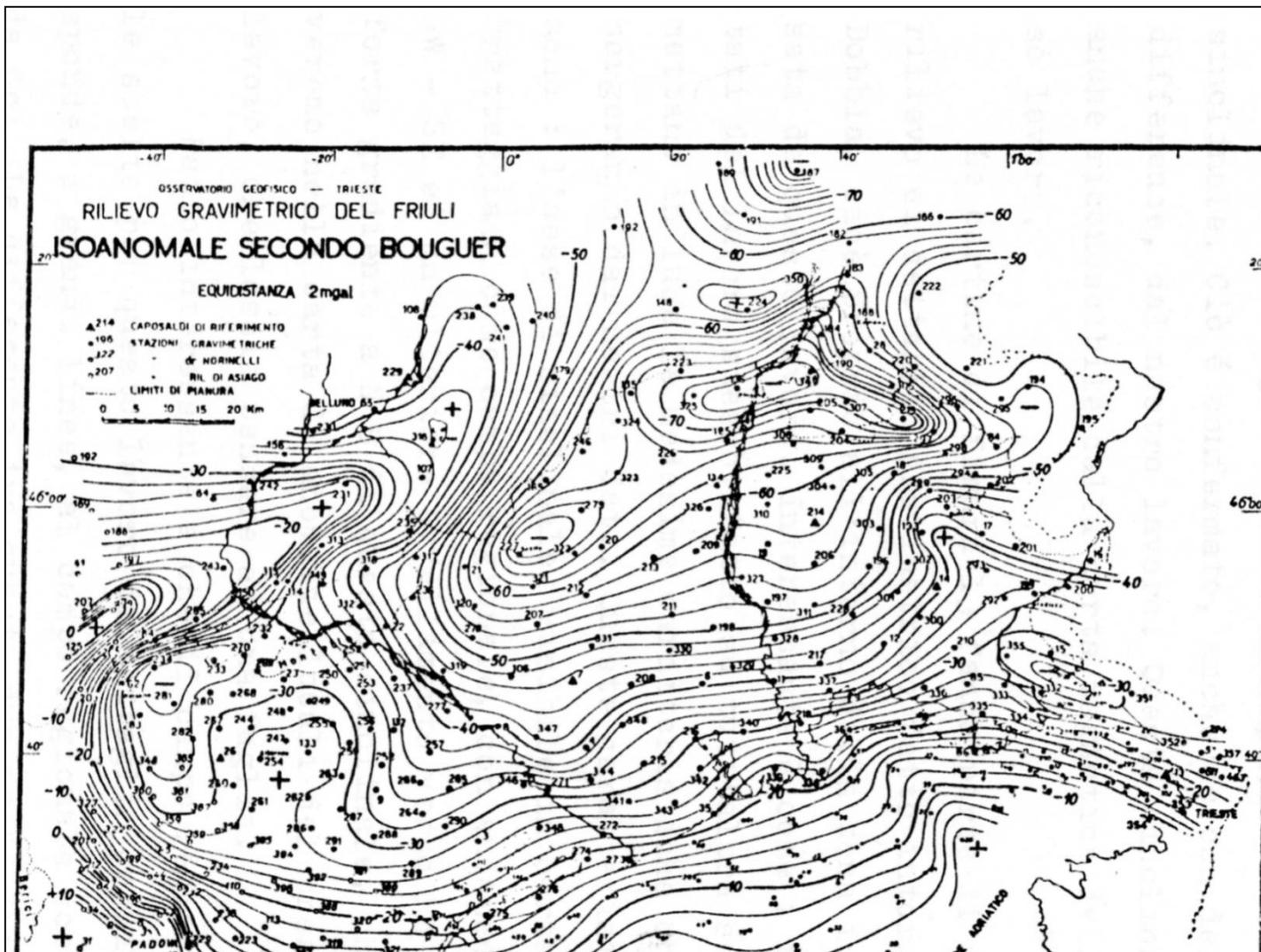


Fig. 2.35 - Schema della carta delle anomalie gravimetriche secondo Bouguer in Italia.



Fisica Terrestre 2024-2025

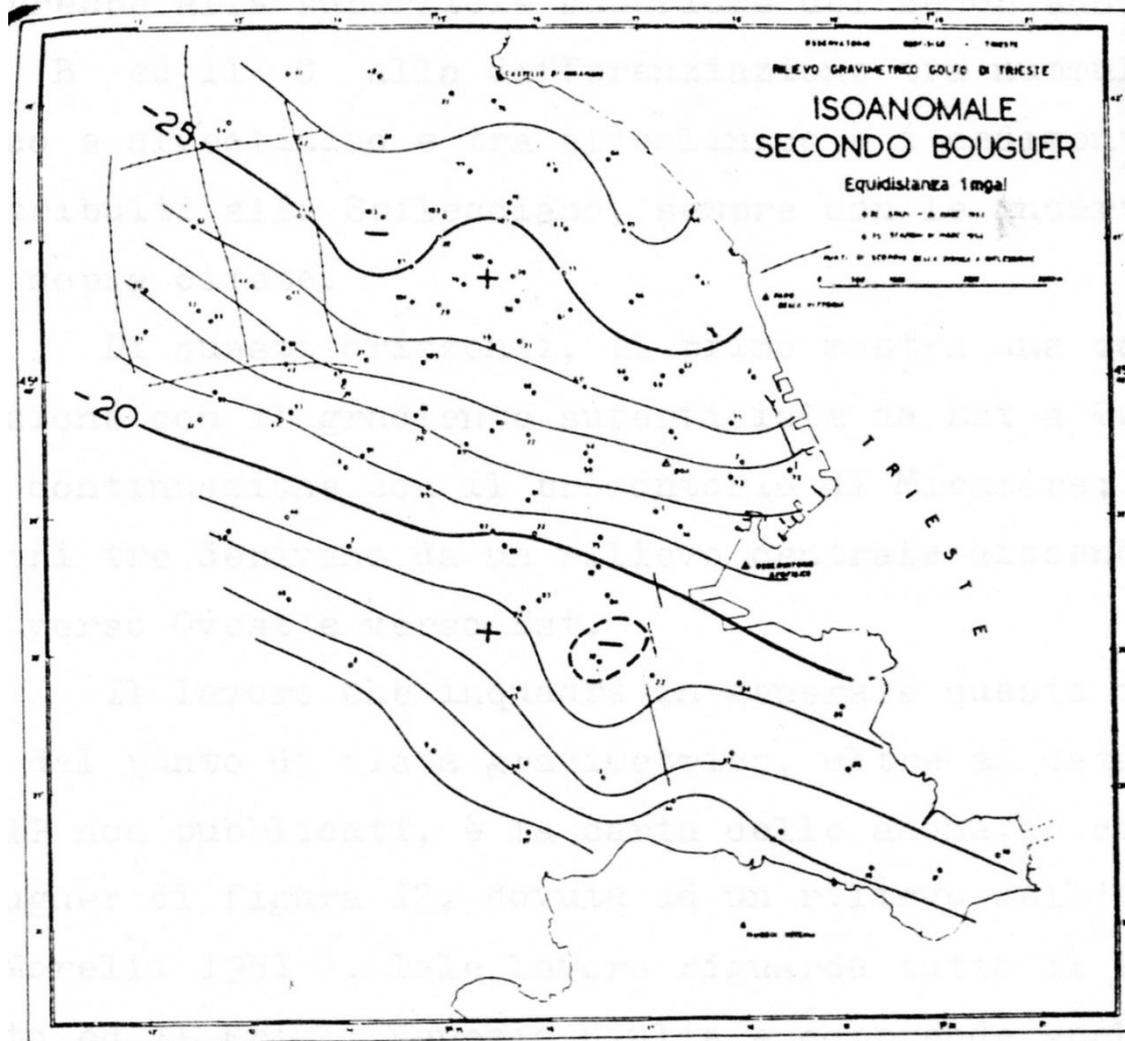
Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

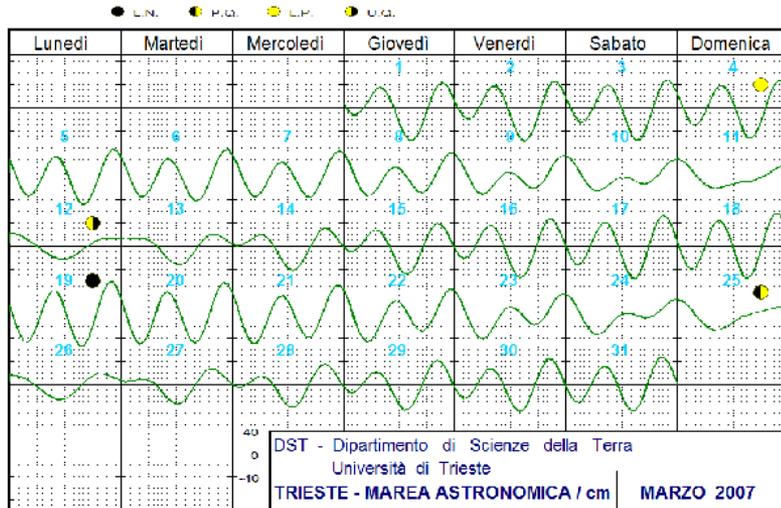




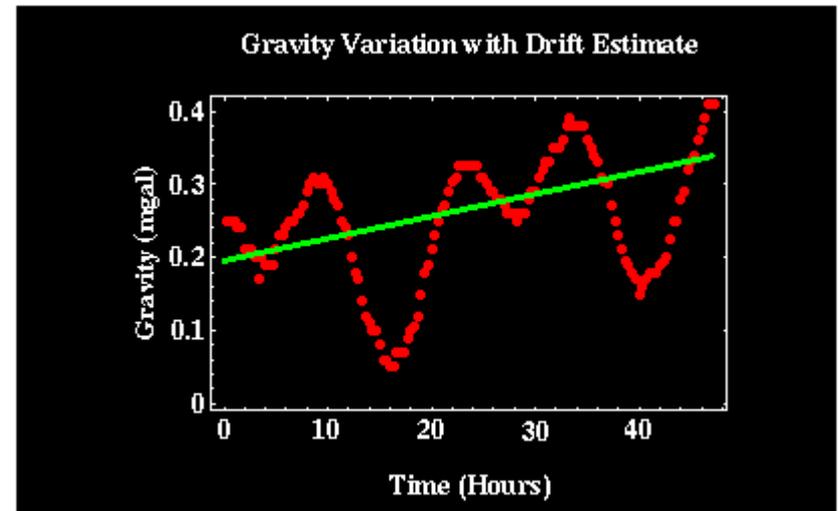
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Marea terrestre



Deriva strumentale

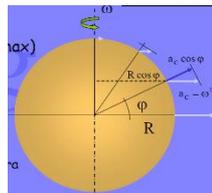




Correzioni

- 1) Correzioni di latitudine (gravità normale)

$$g_m = g_\phi + \varepsilon_1$$

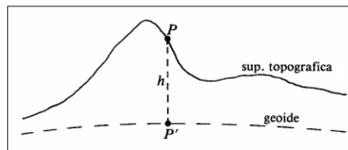


anomalia di latitudine

$$\varepsilon_1 = g_m - g_\phi$$

- 2) Correzione di aria libera (di Faye)

$$g_m = g_\phi - \Delta g_{FA} + \varepsilon_2$$

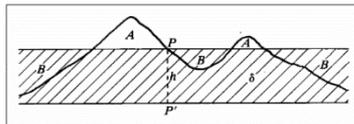


anomalia di aria libera

$$\varepsilon_2 = g_m - g_\phi + \Delta g_{FA}$$

- 3) Correzione della piastra (di Bouguer)

$$g_m = g_\phi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B + \varepsilon_3$$

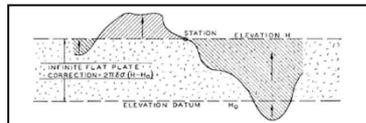


anomalia di Bouguer

$$\varepsilon_3 = g_m - g_\phi + \Delta g_{FA} - \Delta g_B$$

- 4) Correzione topografica

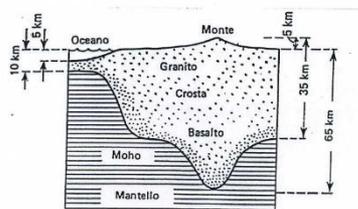
$$g_m = g_\phi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B - \Delta g_T + \varepsilon_4$$



anomalia di topografica

$$\varepsilon_4 = g_m - g_\phi + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + \Delta g_T$$

- 5) Correzione isostatica



Equilibrio isostatico tra crosta e mantello.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- Un'anomalia gravitazionale deriva dalla distribuzione disomogenea della densità nella Terra. Supponiamo che la densità delle rocce di un corpo sotterraneo sia ρ e che la densità delle rocce circostanti sia ρ_0 . La differenza $\Delta\rho=\rho-\rho_0$ è chiamata contrasto di densità del corpo rispetto alle rocce circostanti.
- Se il corpo ha una densità superiore a quella della roccia ospite, ha un contrasto di densità positivo; un corpo con una densità inferiore a quella della roccia ospite ha un contrasto di densità negativo. Su un corpo ad alta densità la gravità misurata aumenta; dopo la riduzione all'ellissoide di riferimento e la sottrazione della gravità normale si ottiene un'anomalia di gravità positiva.
- Allo stesso modo si ottiene un'anomalia negativa su una regione a bassa densità. La presenza di un'anomalia gravitazionale indica un corpo o una struttura con densità anomala; il segno dell'anomalia è lo stesso del contrasto di densità e indica se la densità del corpo è superiore o inferiore al normale.
- L'aspetto di un'anomalia gravitazionale è influenzato dalle dimensioni, dal contrasto di densità e dalla profondità del corpo anomalo. L'estensione orizzontale di un'anomalia è spesso chiamata “lunghezza d'onda” apparente. La lunghezza d'onda di un'anomalia è una misura della profondità della massa anomala. Corpi grandi e profondi danno origine ad anomalie ampie (di lunga lunghezza d'onda) e di bassa ampiezza, mentre corpi piccoli e poco profondi causano anomalie strette (di breve lunghezza d'onda) e nette.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

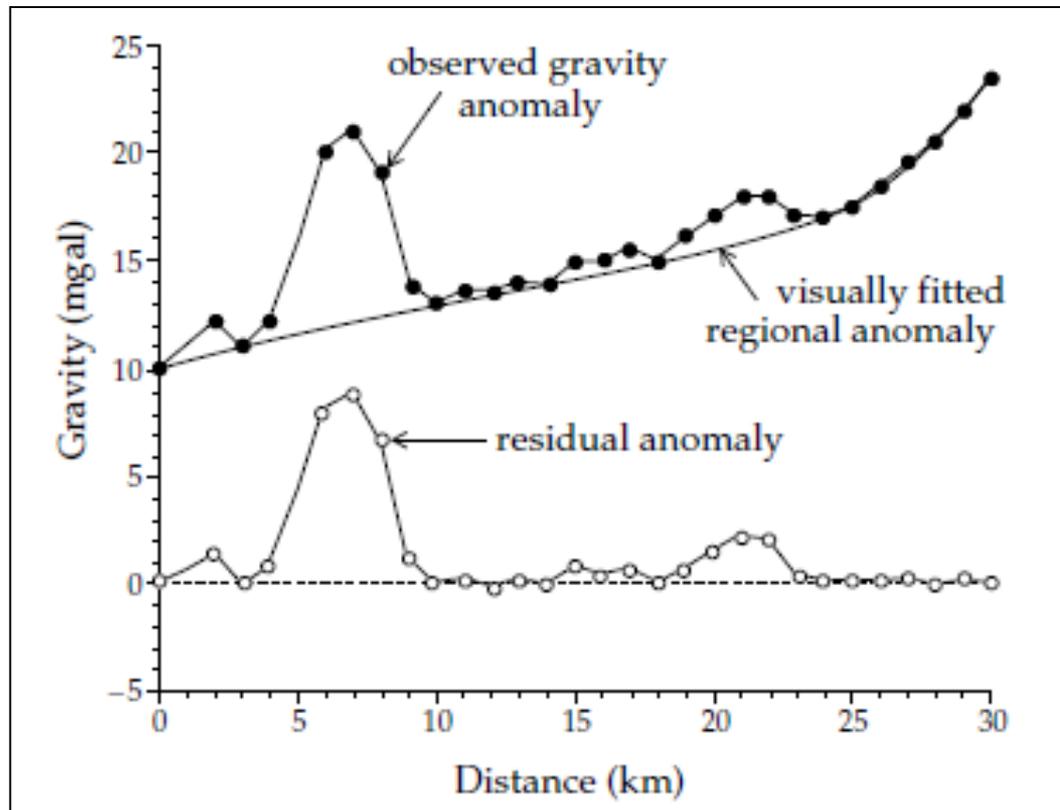
- Di solito una mappa delle anomalie gravitazionali di Bouguer contiene anomalie sovrapposte provenienti da diverse fonti. Le anomalie a lunga lunghezza d'onda dovute a contrasti di densità profondi sono chiamate anomalie regionali. Sono importanti per comprendere la struttura su larga scala della crosta terrestre sotto le principali caratteristiche geografiche, come le catene montuose, le dorsali oceaniche e le zone di subduzione. Le anomalie residue a breve lunghezza d'onda sono dovute a masse anomale poco profonde che possono essere interessanti per lo sfruttamento commerciale.
- Le conoscenze geologiche sono essenziali per interpretare le anomalie residue. Nelle aree erose degli scudi, come il Canada o la Scandinavia, le anomalie con lunghezze d'onda molto corte possono essere dovute a corpi mineralizzati vicini alla superficie. Nei bacini sedimentari, le anomalie di lunghezza d'onda breve o intermedia possono derivare da strutture legate a giacimenti di petrolio o gas naturale.
- La separazione delle anomalie di origine regionale e locale è un passo importante nell'interpretazione di una mappa di gravità. L'analisi può basarsi su profili selezionati attraverso una struttura, oppure può riguardare la distribuzione bidimensionale delle anomalie in una mappa di gravità.
- Numerose tecniche sono state applicate alla scomposizione di un'anomalia gravitazionale nelle sue parti costitutive. Esse vanno dalla semplice ispezione visiva del modello di anomalia all'analisi matematica avanzata.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

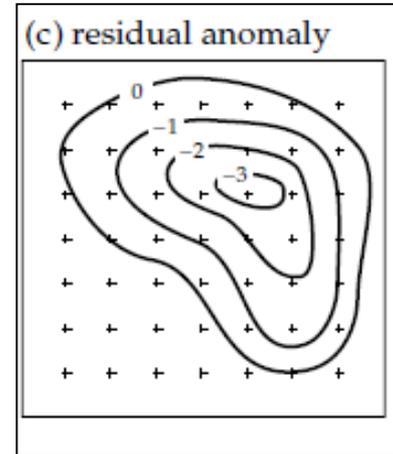
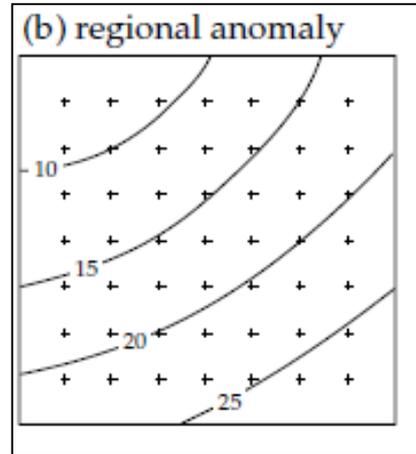
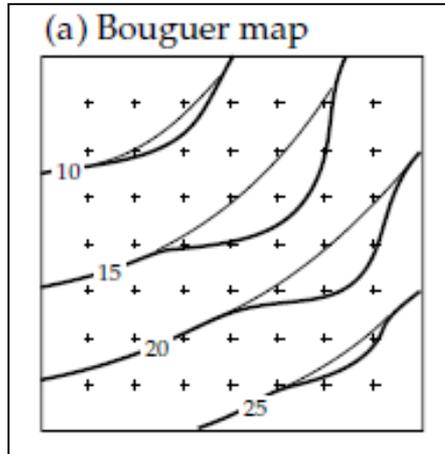
- Il modo più semplice di rappresentare l'anomalia regionale su un profilo di gravità è quello di adattare visivamente l'andamento su larga scala con una curva liscia. Il valore della gravità regionale dato da questa tendenza viene sottratto punto per punto dall'anomalia gravitazionale di Bouguer.
- Questo metodo consente all'interprete di adattare le curve che lasciano anomalie residue con un segno appropriato all'interpretazione della distribuzione di densità.





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



- Questo approccio può essere adattato all'analisi della mappa di gravità, smussando visivamente le linee di livello: la curva di gravità di Bouguer si concentra intorno a un'anomalia locale.

- I valori della gravità Bouguer regionale e originale sono interpolati dalle mappe corrispondenti in punti distanziati da una griglia regolare. Il valore regionale viene sottratto dall'anomalia di Bouguer in ogni punto e i residui calcolati vengono scontornati per ottenere una mappa dell'anomalia di gravità locale.

- L'esperienza e l'abilità dell'interprete sono fattori importanti per il successo dei metodi visivi!



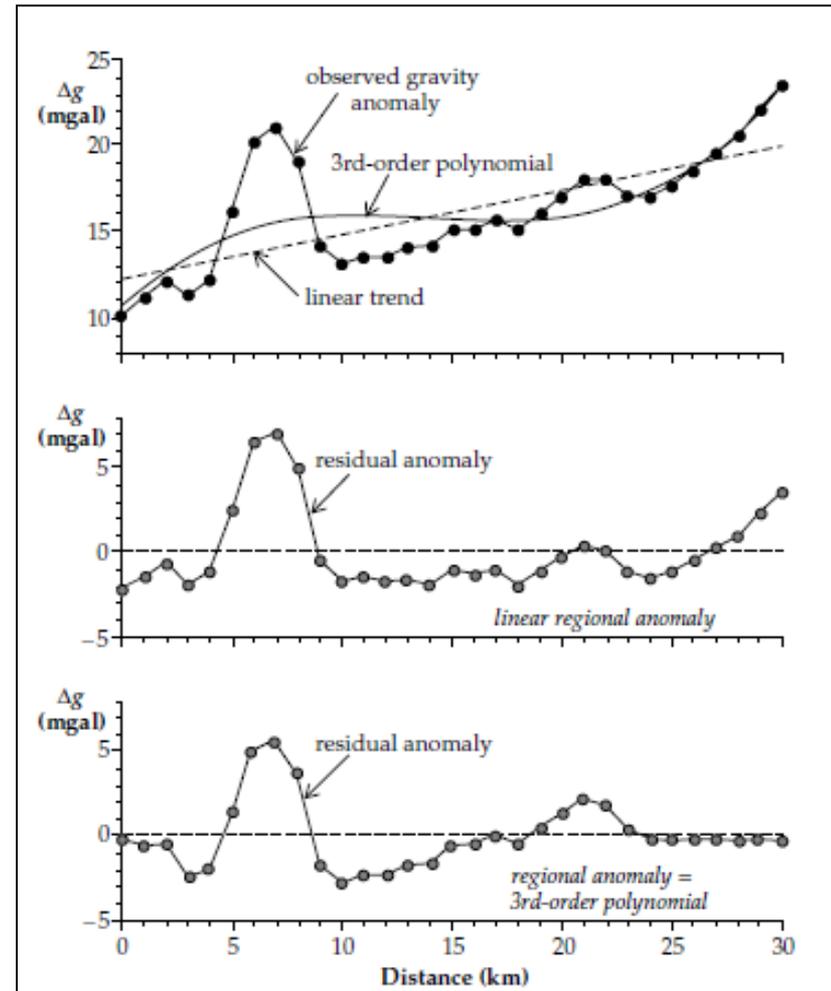
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

• In un metodo alternativo, la tendenza regionale è rappresentata da una linea retta o, più in generale, da una curva polinomiale liscia. Se x denota la posizione orizzontale su un profilo di gravità, la gravità regionale Δg_R può essere scritta:

$$\Delta g_R = \Delta g_0 + \Delta g_1 x + \Delta g_2 x^2 + \Delta g_3 x^3 + \dots + \Delta g_n x^n$$

- Il polinomio viene adattato con il metodo dei minimi quadrati al profilo di gravità osservato. Si ottengono così valori ottimali per i coefficienti Δg_n .
- Il metodo presenta anche degli inconvenienti: più alto è l'ordine del polinomio, meglio si adatta alle osservazioni. L'estremo ridicolo si ha quando l'ordine del polinomio è uno in meno del numero di osservazioni; la curva passa perfettamente per tutti i punti dati, ma l'anomalia gravitazionale regionale non ha alcun significato geologico.
- Il giudizio dell'interprete è importante nella scelta dell'ordine del polinomio, che di solito viene scelto come ordine più basso possibile che rappresenta la maggior parte della tendenza regionale.





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- Il fitting polinomiale può essere applicato anche alle mappe di gravità. Si assume che l'anomalia regionale possa essere rappresentata da una superficie liscia, $\Delta g(x, y)$, che è un polinomio di basso ordine delle coordinate orizzontali di posizione x e y . Nel caso più semplice, l'anomalia regionale è espressa come un polinomio del primo ordine, o piano. Per esprimere le variazioni del gradiente di gravità è necessario un polinomio di ordine superiore. Ad esempio, la gravità regionale data da un polinomio del secondo ordine si scrive:

$$\Delta g_R(x, y) = \Delta g_{x1}x + \Delta g_{y1}y + \Delta g_{x2}x^2 + \Delta g_{y2}y^2 + \Delta g_{xy}xy$$

- Come nell'analisi di un profilo, i valori ottimali dei coefficienti Δg_{x1} , Δg_{y1} , ecc. sono determinati mediante un adattamento ai minimi quadrati. L'anomalia residua viene nuovamente calcolata punto per punto, sottraendo i dati regionali a quelli originali.

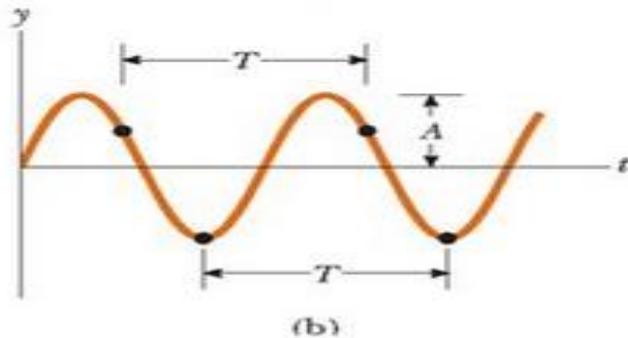
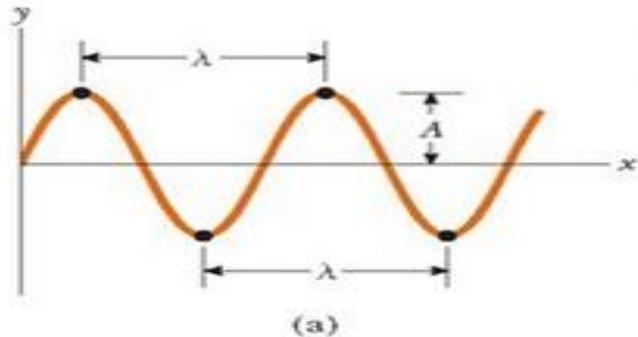


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

f = frequenza **T = periodo**

$$f = \frac{1}{T}$$



Frequenza angolare

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Numero d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

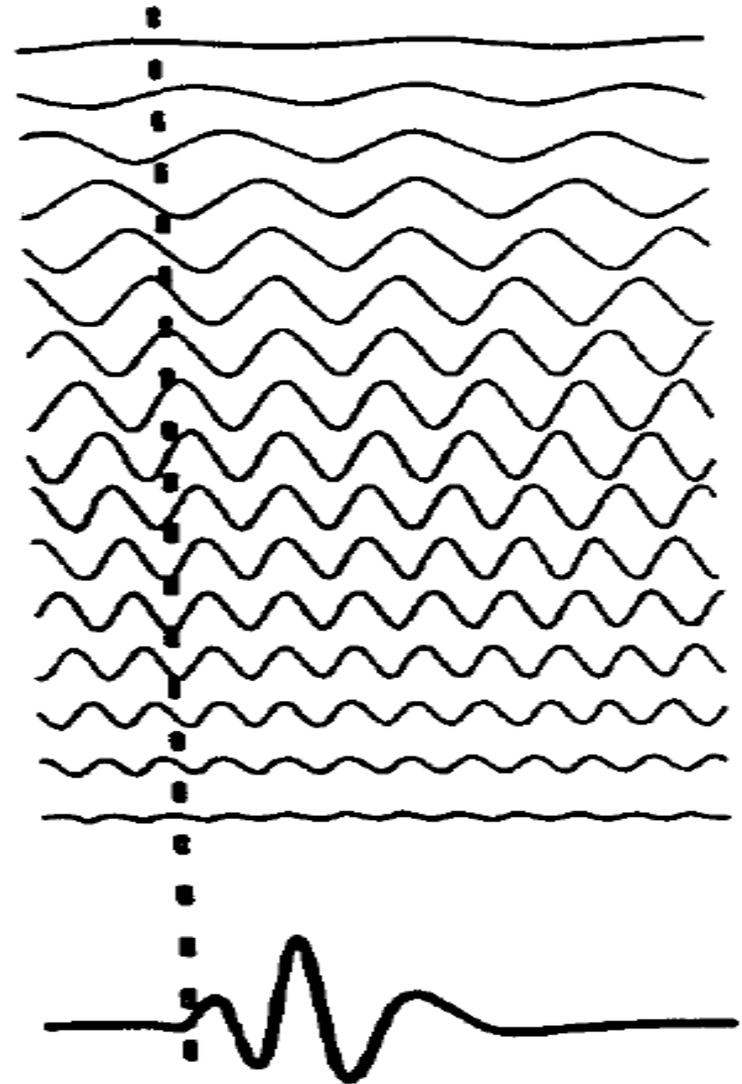


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

L'analisi di Fourier che ci accingiamo a studiare ha come obiettivo primario proprio questo: dato un segnale periodico, riuscire a decomporlo come somma (sovrapposizione) di segnali di tipo sinusoidale, ciascuno con una propria frequenza (multipla intera di una frequenza base) e una propria ampiezza.

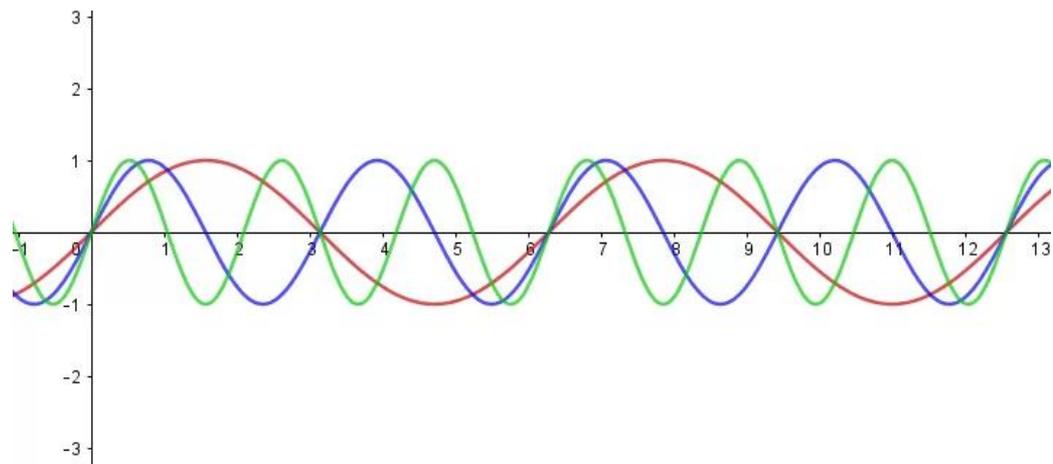
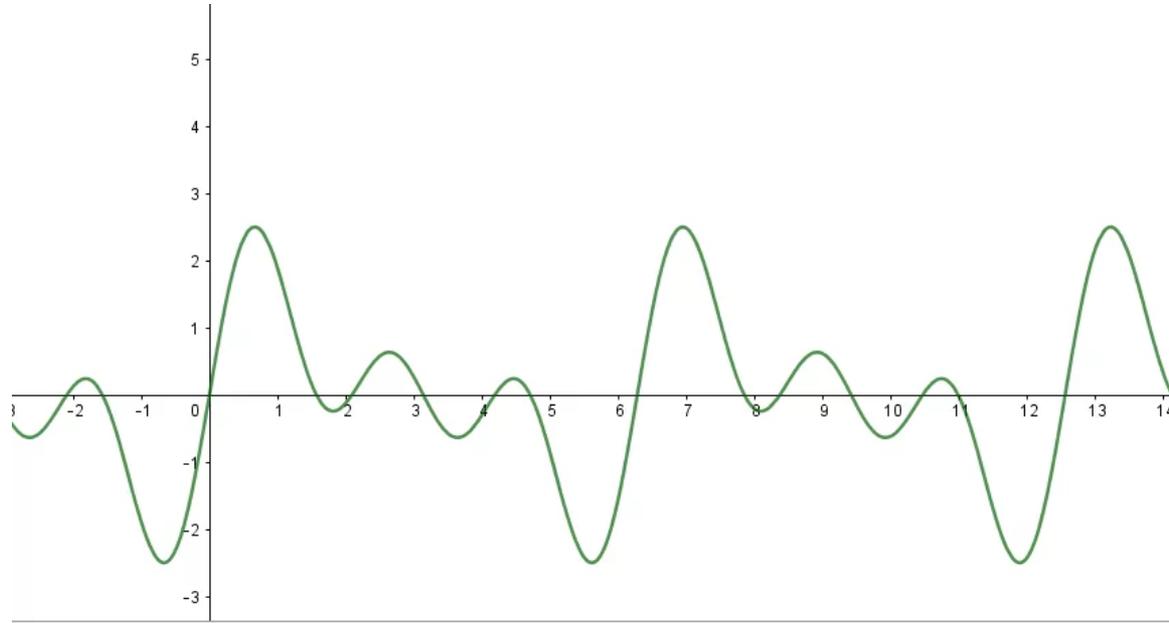
Il transiente $f(t)$ è formato infiniti termini armonici. Le ampiezze di ogni termine armonico varia, essendo descritto dallo spettro di ampiezza. Lo spostamento della la fase di ciascun termine armonico è data dal spettro di fase.





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

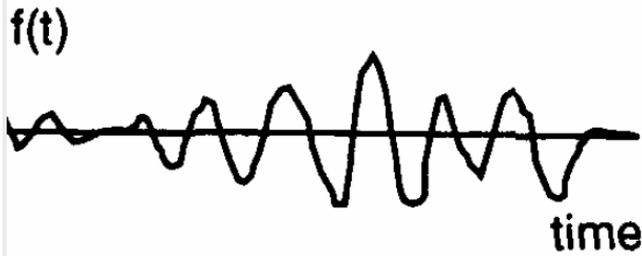




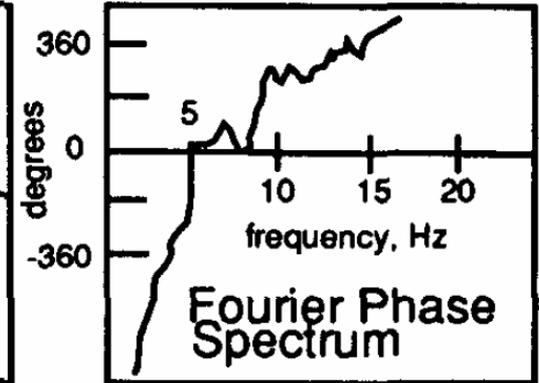
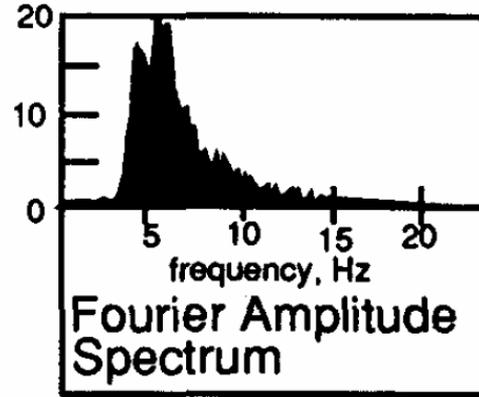
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Time Domain



Frequency Domain



Un segnale registrato in funzione del tempo (a sinistra) può essere rappresentato in modo equivalente nel dominio delle frequenze dal suo spettro di Fourier. L'ampiezza (in centro) e lo spettro di fase (a destra) sono entrambi necessari per ottenere la serie temporale completa.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Secondo il **teorema di Fourier** qualsiasi arbitraria funzione transiente $f(t)$ nel dominio dei tempi può essere rappresentata da una funzione equivalente $F(\omega)$ nel dominio della frequenza, cioè la trasformata di Fourier di $f(t)$. Valgono le seguenti relazioni:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = |F(\omega)| \exp(i\phi(\omega))$$

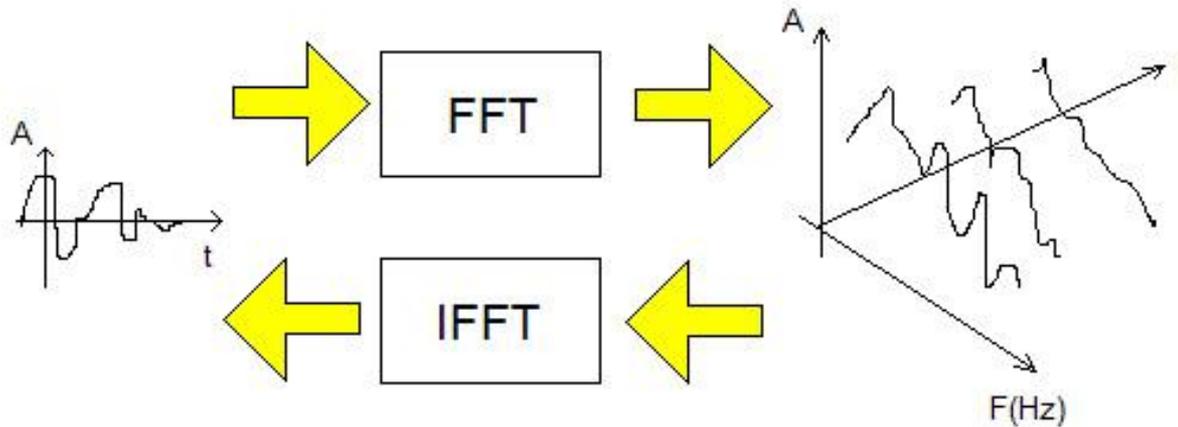
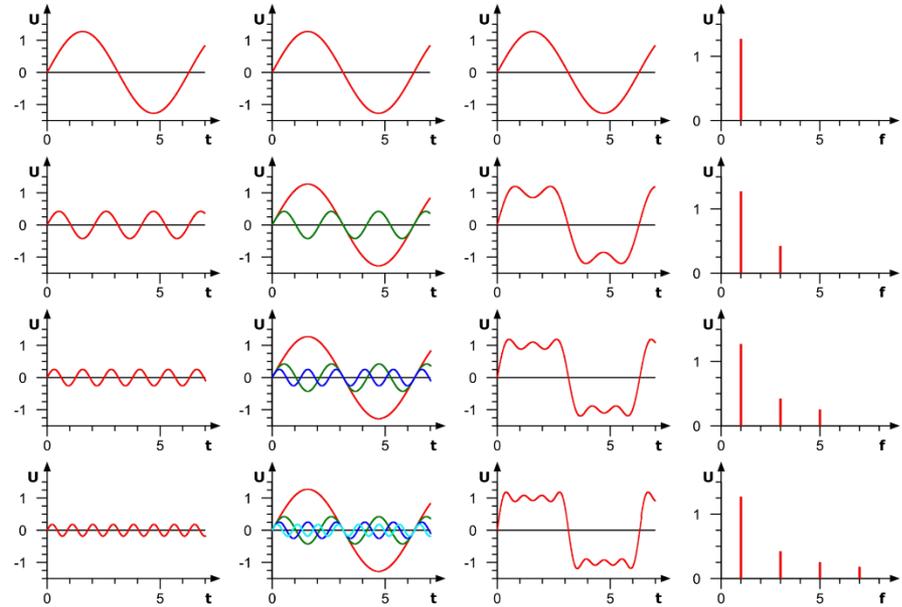
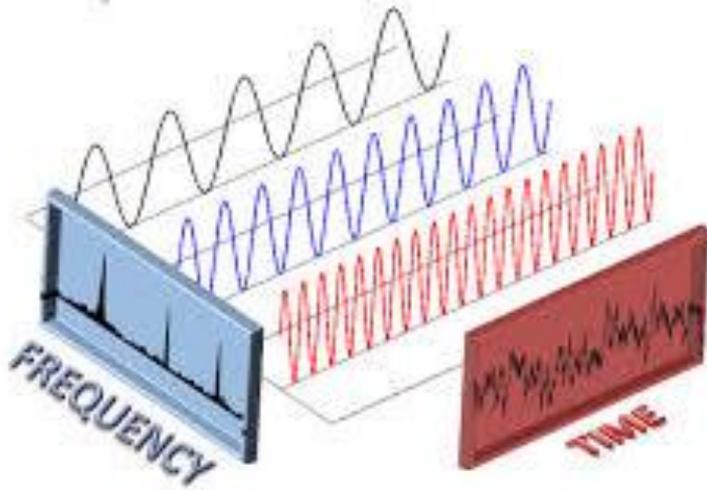
$|F(\omega)| = A(\omega)$ è la densità spettrale dell'ampiezza con l'unità m/Hz, $\omega = 2\pi f$ l'angolo frequenza (con f - frequenza con unità Hz) e $\phi(\omega)$ lo spettro di fase con le unità deg, rad o 2prad. L'integrale equivale a una somma. Quindi, il teorema di Fourier afferma che una serie temporale arbitraria finita, anche impulsiva, può essere espressa come una somma di funzioni periodiche monocromatiche, ovvero

$$f(t) = 2\pi^{-1} \sum |F(\omega)| \exp(i[\omega t + \phi(\omega)]) \Delta\omega.$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2024-2025

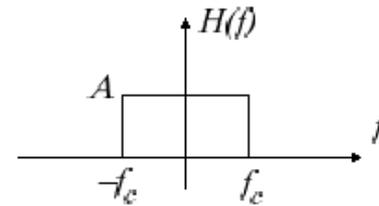
Giovanni Costa

Filtri ideali

Sono di quattro tipi:

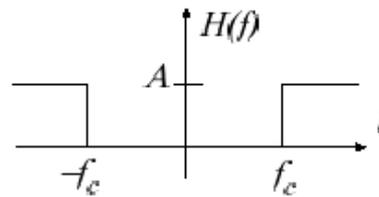
Passa basso

($f_c =$ frequenza di taglio)



Passa alto

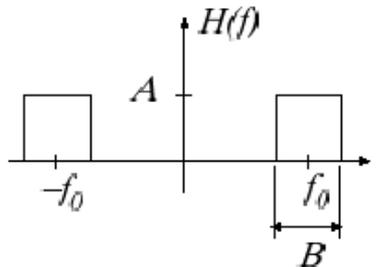
($f_c =$ frequenza di taglio)



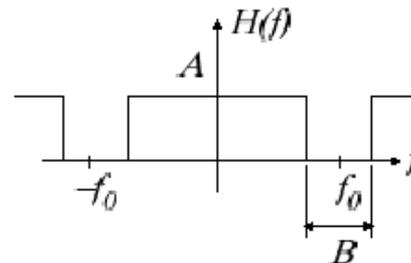
Passa banda

$f_0 =$ frequenza di riferimento
(usualm. centrale)

$B =$ banda passante



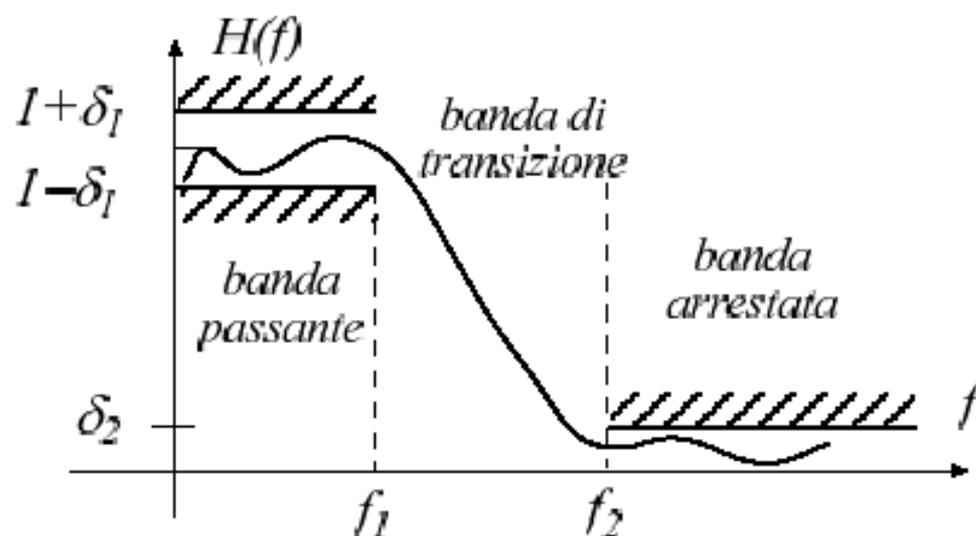
Arresta banda



Filtri reali

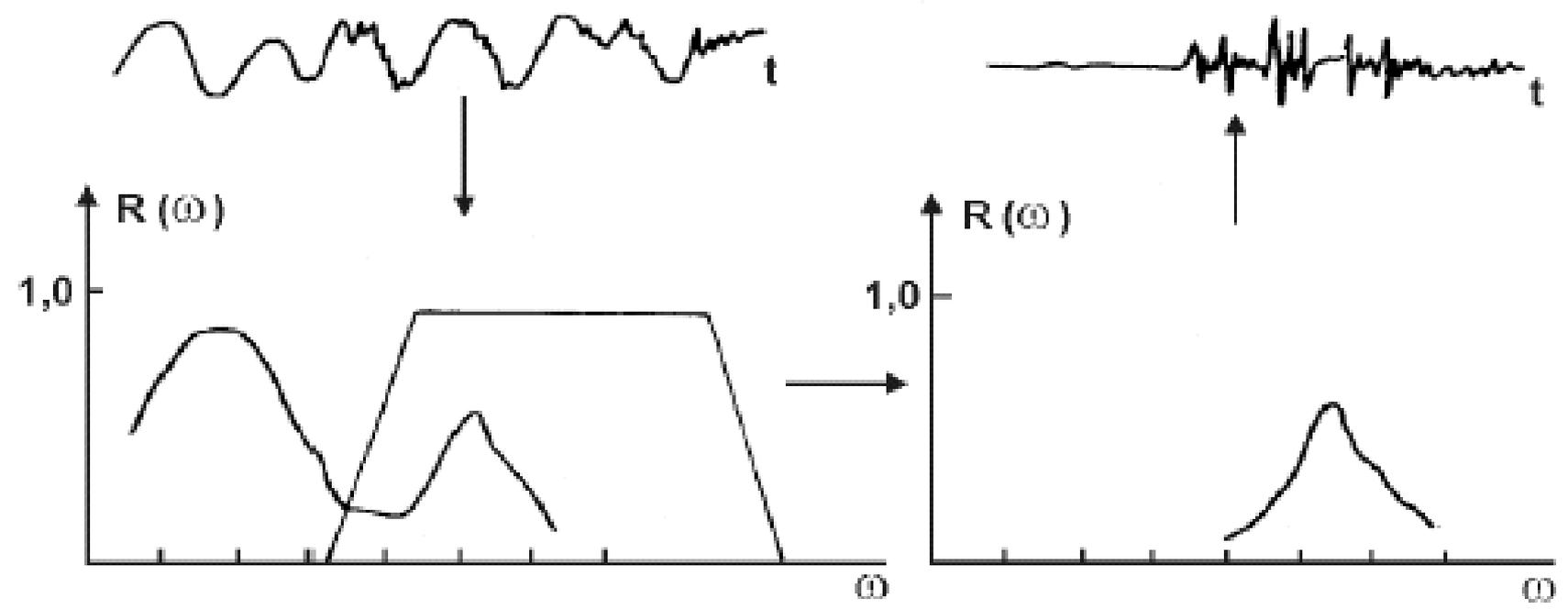
La loro risposta in frequenza viene specificata mediante maschera:

Esempio (passa basso)





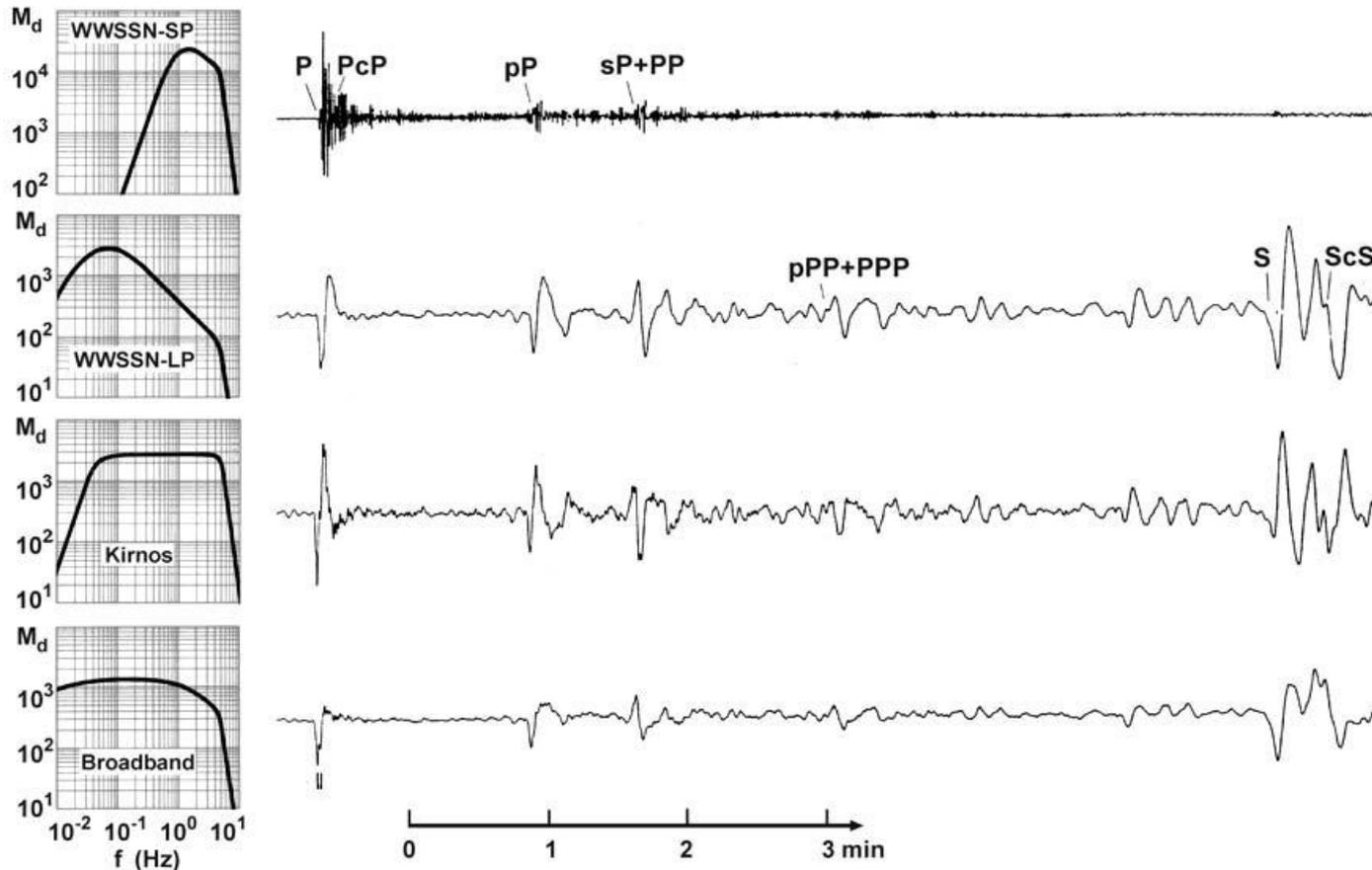
Filtraggio





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



Registrazioni di un forte terremoto ($h = 570$ km, $D = 75^\circ$) all'Osservatorio di Gräfenberg, Germania. Le tracce sono stati derivate filtrando un segnale digitale in velocità a banda larga (banda passante tra 0,05 e 5 Hz) con alcune curve di risposta con caratteristiche standard tradizionali (WWSSN_SP e LP, Kirnos) mentre la traccia in fondo mostra il quasi reale spostamento del terreno ottenuto estendendo il periodo superiore oltre i 100s.



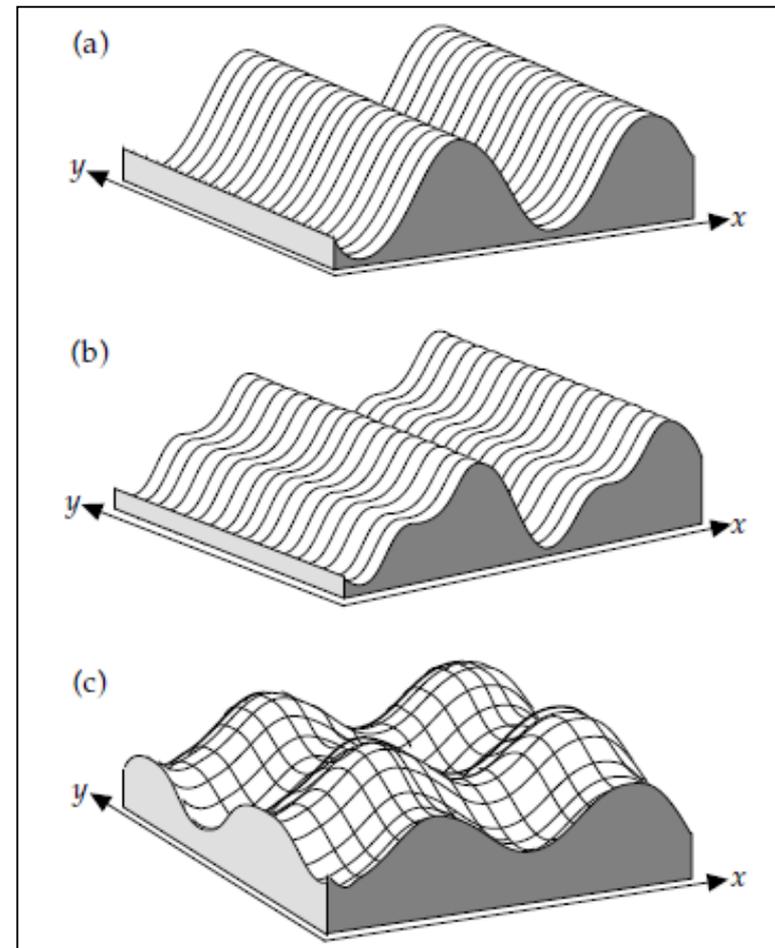
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- L'anomalia di gravità lungo un profilo può essere analizzata con le tecniche sviluppate per studiare le serie temporali. Invece di variare con il tempo, come fa il segnale sismico in un sismometro, l'anomalia gravitazionale $\Delta g(x)$ varia con la posizione x lungo il profilo. Per una distribuzione spaziale il numero d'onda, $k=2\pi/\lambda$, è la controparte della frequenza di una serie temporale.

- Se si può ipotizzare che la sua variazione sia periodica, la funzione $\Delta g(x)$ può essere espressa come somma di una serie di armoniche discrete. Ogni armonica è una funzione seno o coseno il cui argomento è un multiplo del numero d'onda fondamentale. L'espressione di $\Delta g(x)$ è chiamata serie di Fourier.

- La scomposizione di un'anomalia complessa (o serie temporale) in termini di variazioni periodiche più semplici di diverse lunghezze d'onda è chiamata analisi di Fourier ed è un metodo potente per risolvere le componenti più importanti del segnale originale.

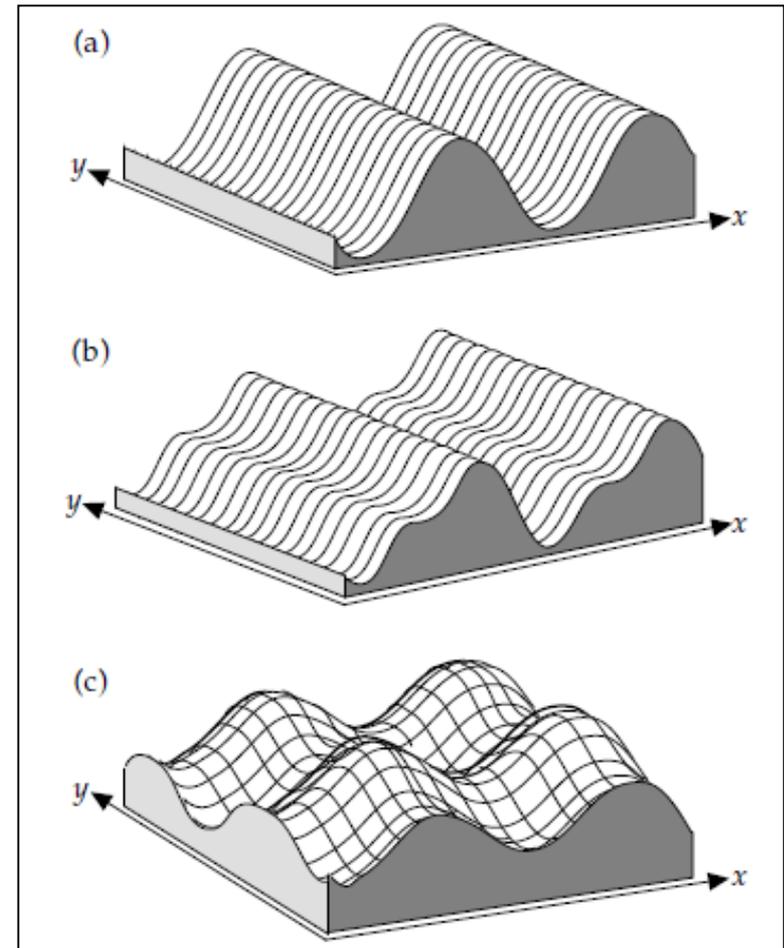




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- La variazione bidimensionale di un'anomalia gravitazionale mappata può essere espressa in modo analogo con l'aiuto di serie doppie di Fourier. Come nel più semplice caso unidimensionale di un'anomalia gravitazionale su un profilo, l'espressione delle anomalie gravitazionali bidimensionali mediante doppie serie di Fourier è analoga alla somma di funzioni sinusoidali pesate. Queste possono essere visualizzate come ondulazioni del piano x-y, con ciascuna ondulazione ponderata in base alla sua importanza per $\Delta g(x, y)$.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- La gravità osservata può quindi essere manipolata utilizzando le tecniche della trasformata di Fourier. Queste tecniche comportano calcoli intensivi e sono ideali per l'elaborazione digitale dei dati con computer potenti.
- La trasformata di Fourier bidimensionale di una mappa di gravità consente di filtrare digitalmente le anomalie gravitazionali. Un filtro è una funzione spaziale delle coordinate x e y . Quando la funzione $\Delta g(x, y)$ che rappresenta i dati di gravità moltiplicati per la funzione di filtro, viene prodotta una nuova funzione.
- La natura del filtro applicato nel dominio di Fourier può essere scelta per eliminare determinate lunghezze d'onda. Ad esempio, può essere progettato in modo da eliminare tutte le lunghezze d'onda inferiori a una lunghezza d'onda selezionata e far passare le lunghezze d'onda più lunghe: questo è chiamato filtro passa-basso; passa le lunghezze d'onda lunghe che hanno un basso numero d'onda. Le irregolarità in una mappa di anomalie gravitazionali di Bouguer vengono eliminate.
- In alternativa, il filtro nel dominio di Fourier può essere progettato per eliminare le lunghezze d'onda superiori a una lunghezza d'onda selezionata e per far passare le lunghezze d'onda inferiori. L'applicazione di un filtro passa-alto di questo tipo migliora la lunghezza d'onda breve (numero d'onda elevato).
- Il filtraggio della lunghezza d'onda può essere utilizzato per enfatizzare le anomalie selezionate. r)

