Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 4 - Spazi metrici - 15/10/2024

ESERCIZI

Es. 1

Si consideri $\mathbb{R}^N$ e sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Dimostrare che (usando disuguaglianza triangolare)

i) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^N$

e che (usando il punto i))

ii) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x+y\| \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^N$ → "disuguaglianza triangolare inversa"

Es. 2

Si consideri $\mathbb{R}^N$ e sia $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Dimostrare che

i) $\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall\, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$

ii) $\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \geq \|x_1\| - \|x_2\| - \|x_3\| - \dots - \|x_m\| \qquad \forall\, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$

↳ usare dis. triang. inversa per il punto ii).

Es. 3

Consideriamo su $\mathbb{R}^N$ le tre distanze

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, \dots, N\}$$

EXTRA

↳ dimostrare che $d_\infty : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una distanza su $\mathbb{R}^N$

i) Dimostrare che $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq N \cdot d_\infty$

ii) Indichiamo con $B^1(x_0,r)$ la palla di raggio r e centro x_0 nella distanza d_1 e analogamente con $B^2(x_0,r)$ e $B^\infty(x_0,r)$ quelle nelle distanze d_2 e d_∞, rispettivamente. Dimostrare che

$$B^\infty\left(x_0,\frac{r}{N}\right) \subseteq B^1(x_0,r) \subseteq B^2(x_0,r) \subseteq B^\infty(x_0,r)$$

iii) Disegnare $B^1(0,1)$, $B^2(0,1)$, $B^\infty(0,1)$ in $\mathbb{R}$ $(N=1)$

iv) Disegnare $B^1((0,0),1)$, $B^2((0,0),1)$, $B^\infty((0,0),\frac{1}{2})$, $B^\infty((0,0),1)$ in $\mathbb{R}^2$ $(N=2)$

Es. 4 (chiesto da uno studente)

Sia (E,d) uno spazio metrico. Siano $U_1 \subseteq E$, $U_2 \subseteq E$. Dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow \mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2 \quad e \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2$$

Soluzioni

Es. 1

i) Per definizione di valore assoluto, dobbiamo dimostrare che

$$-\|x-y\| \underset{b)}{\leq} \|x\|-\|y\| \underset{a)}{\leq} \|x-y\|.$$ Fissiamo due generici $x, y \in \mathbb{R}^N$.

a) $$\|x\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aggiungo e} \\ \text{sottraggo } y}}{=} \|x-y+y\| = \|(x-y)+y\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dis. triang.}}}{\leq} \|x-y\| + \|y\| \implies \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$$

b) In maniera analoga

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \implies \|y\|-\|x\| \leq \|y-x\|$$

$\Downarrow$ cambiamo segno invertendo il verso della disuguaglianza, e ricordiamo che $\|y-x\| = \|-(x-y)\| = \|x-y\|$

$$\|x\|-\|y\| \geq -\|x-y\|$$

fine dimostrazione $\rightarrow$ $\boxtimes$

ii) Basta applicare quanto dimostrato agli elementi x e $-y$, in quanto vale $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Ovvero, fissati 2 generici $x, y \in \mathbb{R}^N$, definiamo $\tilde{x} := x \in \mathbb{R}^N$ e $\tilde{y} := -y \in \mathbb{R}^N$ e applichiamo la disuguaglianza a $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$:

$$\big|\|\tilde{x}\|-\|\tilde{y}\|\big| \leq \|\tilde{x}-\tilde{y}\| \implies \big|\|x\|-\|-y\|\big| \leq \|x-(-y)\| \implies \big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x+y\|$$

$\boxtimes$

Es. 2

i) Basta applicare più volte la dis. triangolare:

$$\|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2 + x_3 + \dots + x_m\|$$
$$\leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3 + \dots + x_m\|$$
$$\leq \dots \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \dots + \|x_m\|$$

[Volendo essere più rigorosi si può dimostrare per induzione la proposizione

$$P_m : \quad \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \qquad \forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

- Passo iniziale: $m = 1$

$$\left\|\sum_{k=1}^{1} x_k\right\| = \|x_1\| = \sum_{k=1}^{1} \|x_k\|$$

- Passo induttivo: assumiamo vera P_m e dimostriamo P_{m+1}

$$\left\|\sum_{k=1}^{m+1} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k + x_{m+1}\right\| \underset{\text{dis. triang.}}{\leq} \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k\right\| + \|x_{m+1}\| \underset{P_m}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| + \|x_{m+1}\| = \sum_{k=1}^{m+1} \|x_k\|$$

]

ii) Applichiamo la i) con $x_1 = 0$ e cambiamo segno:

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_m\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow \|x_2 + \dots + x_m\| \leq \|x_2\| + \dots + \|x_m\| \qquad \forall x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^N$$

$$\Rightarrow -\|x_2 + \dots + x_m\| \geq -\|x_2\| - \dots - \|x_m\| \qquad (*)$$

Applichiamo la dis. triang. inversa a $x = x_1$ e $y = x_2 + \dots + x_m$

$$\|x+y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big| \geq \|x\| - \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x_1 + x_2 + \dots + x_m\| \geq \|x_1\| - \|x_2 + \dots + x_m\|$$

$$\geq \|x_1\| - \|x_2\| - \dots - \|x_m\|$$

applichiamo la (*) ricavata prima

$\boxtimes$

Es. 3

i) a) $d_\infty \leq d_2$

Dimostriamo che $d_\infty^2 \leq d_2^2$, infatti $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$

$$(d_\infty(x,y))^2 = \left(\max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\}\right)^2 = \max\{|x_k - y_k|^2 : k = 1, \dots, m\}$$

$f(x) = x^2$ è strett. crescente per $x > 0$, dunque non altra l'ordine

$\to$ se $|x| \geq |y|$ allora $|x|^2 \geq |y|^2$, dunque $\max\{|x|, |y|\}^2 = \max\{|x|^2, |y|^2\}$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 = (d_2(x,y))^2$$

a destra sommo tutti i termini, compreso il max. di prima!

$\Rightarrow$ prendendo la radice quadrata $|d_\infty(x,y)| \leq |d_2(x,y)|$, ma le distanze non possono essere negative dunque $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

b) $d_2 \leq d_1$. Dimostriamo come prima che $d_2^2 \leq d_1^2$

$$(d_2(x,y))^2 = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2$$

$$(d_1(x,y))^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|\right)^2 =$$

$$= \left(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \right)^2$$

$$= |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_N - y_N|^2 + 2|x_1 - y_1| \cdot |x_2 - y_2| + \text{Tutti gli altri doppi prodotti}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 + 2 \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le N} |x_i - y_i||x_j - y_j|}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2 = \left(d_2(x,y)\right)^2$$

c) $d_1 \leq N \cdot d_\infty$, infatti

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{N} \max\{|x_j - y_j| : j = 1, \dots, N\} = N \cdot \max\{|x_j - y_j| : j = 1, \dots, N\} = N \cdot d_\infty(x,y)$$

l'indice j è muto, il valore del massimo non dipende dall'indice

ii) a) $B^\infty\left(x_0, \frac{r}{N}\right) \subseteq B^1(x_0, r)$

Per dimostrare che $A \subseteq B$ per 2 qualsiasi insiemi A e B, dobbiamo dimostrare che se $x \in A$ allora $x \in B$.

Quindi prendiamo $x \in B^\infty\left(x_0, \frac{r}{N}\right)$, ovvero $d_\infty(x, x_0) \leq \frac{r}{N}$, ovvero $N \cdot d_\infty(x, x_0) \leq r$

Per il punto i c)

$\hookrightarrow d_1(x, x_0) \leq N \cdot d_\infty(x, x_0) \leq r \Rightarrow x \in B^1(x_0, r)$

b) $B^1(x_0, r) \subseteq B^2(x_0, r)$, si dimostra come prima perché $d_2 \leq d_1$

c) $B^2(x_0, r) \subseteq B^\infty(x_0, r)$, si dimostra come prima perché $d_\infty \leq d_2$

$\boxtimes$

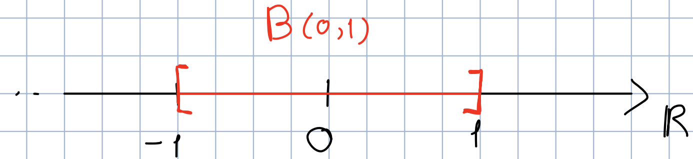
iii) $N = 1$

In questo caso tutte le distanze coincidono, infatti presi $x, y \in \mathbb{R}$

$$d_1(x,y) = |x-y|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|^2} = |x-y|$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x-y|\} = |x-y|$$



Dunque $B^1(0,1) = B^2(0,1) = B^\infty(0,1) =: B(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : |x-0| \leq 1\} = [-1,1]$

iv) $N = 2$, prendiamo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_1 - y_1|^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

a) $B^1((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$

$$= \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x_2 \leq 1 - x_1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_2 \leq 1 + x_1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq x_1 - 1 & \text{se } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ x_2 \geq -x_1 - 1 & \text{se } x_1 < 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

↳ area compresa tra queste rette!

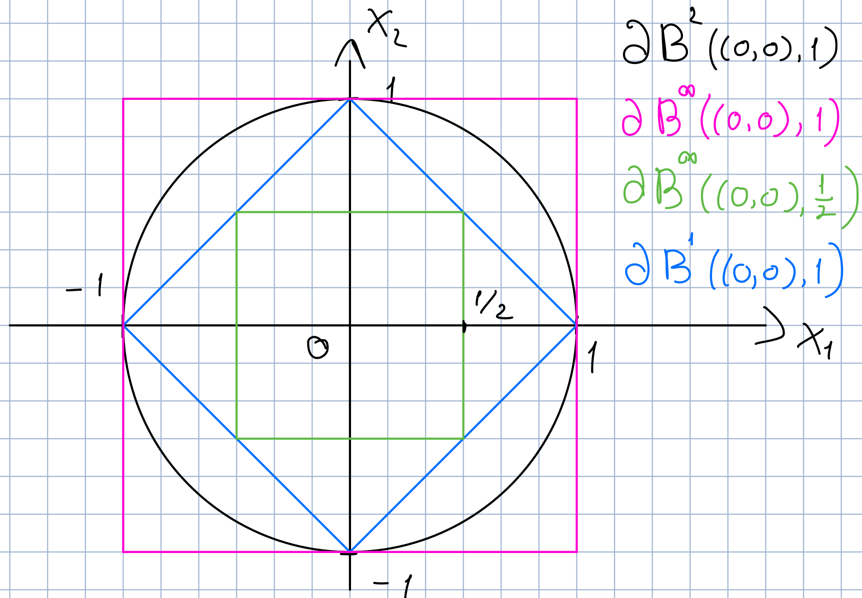
b) $B^2((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq 1\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ → cerchio centrato nell'origine e di raggio 1.

c) $B^\infty((0,0),1) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1\}$

$= \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$ → quadrato di lato 2 centrato nell'origine

$B^{\infty}((0,0), 1/2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Nel disegno evidenziamo solo i bordi / frontiere degli insiemi per non creare confusione...



N.B.

Notiamo la catena di inclusioni dei punti precedenti!

Extra

Dimostriamo che d_∞ è effettivamente una distanza

a) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^N \quad (x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N))$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\} \geq 0$ perché il valore assoluto di qualsiasi numero reale è ≥ 0.

b) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) = 0 \iff x = y$

$$d_\infty(x,y) = \max\{\underbrace{|x_k - y_k|}_{\geq 0\ \forall k} : k = 1, \dots, N\} = 0 \iff |x_k - y_k| = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$$

$$\iff x_k - y_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, N \iff x_k = y_k \quad \forall k = 1, \dots, N$$

$$\iff x = y$$

c) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, \dots, N\} = \max\{|y_k - x_k| : k = 1, \dots, N\} = d_\infty(y,x)$$

d) Dobbiamo dim. che $d_\infty(x,z) \leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^N$

$$d_\infty(x,z) = \max\{|x_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$$= \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$|x_k - y_k + y_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \quad \forall k$

$$\leq \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$\Rightarrow \max\{|x_k - y_k + y_k - z_k|\} \leq \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k|\}$

$$= \max\{|x_k - y_k| : k = 1,\dots,N\} + \max\{|y_k - z_k| : k = 1,\dots,N\}$$

$$= d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$$

Es. 4

$U_1 \subseteq U_2$ vuol dire che se $x \in U_1$, allora $x \in U_2$

i) Dobbiamo dim. che $\mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2$, ovvero che $x \in \mathring{U}_1 \Rightarrow x \in \mathring{U}_2$

Sia $x \in \mathring{U}_1$. Allora per definizione di aperto (o di punto interno) esiste un raggio $r > 0$ tale per cui la palla $B(x,r)$ è contenuta in $\mathring{U}_1$. Dunque

$B(x,r) \subseteq \mathring{U}_1 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \rightarrow B(x,r)$ è un insieme aperto (o intorno di x_0) contenuto in U_2, ovvero x è un punto interno di U_2, cioè $x \in \mathring{U}_2$.

ii) Dobbiamo dim. che $\overline{U_1} \subseteq \overline{U_2}$, ovvero che $x \in \overline{U_1} \Rightarrow x \in \overline{U_2}$

Sia $x \in \overline{U_1}$. Allora per definizione di insieme chiuso (o di punto "aderente") $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap U_1 \neq \emptyset$. Siccome $U_1 \subseteq U_2$, allora necessariamente anche $B(x,r) \cap U_2 \neq \emptyset$, dunque $x \in \overline{U_2}$.

$\rightarrow B(x,r) \cap U_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in B(x,r) \cap U_1$
$\Rightarrow \exists y$ tale che $y \in B(x,r)$ e $y \in U_1 \Rightarrow \exists y$ tale che $y \in B(x,r)$ e $y \in U_2$
$\Rightarrow \exists y \in B(x,r) \cap U_2 \Rightarrow B(x,r) \cap U_2 \neq \emptyset$

$\boxtimes$