TEORIA DI YANG-MILLS

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2}\,F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}$$

già interessante (anche senza materia) perché include interazioni.

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Esiste un altro termine gauge inv., Lorentz inv. e che contenga al più 2 derivate di A_μ?

Sì:

$$I = \Theta\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})$$

$$= 4\Theta\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left(\partial_\mu A_\nu\,\partial_\rho A_\sigma + 2i\,A_\mu A_\nu\,\partial_\rho A_\sigma\right)$$

$$= 4\Theta\,\partial_\rho\left\{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{tr}\left(A_\sigma\,\partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3}A_\sigma A_\mu A_\nu\right)\right\}$$

[PASSAGGI IN RAMOND]

cioè I è una "derivata totale"

→ non modifica le equazioni del moto

Ma quantisticamente è un termine importante. Viene chiamato "Θ - term".

$$A_\mu = A^a_\mu\, t^a_R$$

possiamo prendere qualsiasi R → usiamo la normalizz. $\mathrm{tr}\, t^a_R t^b_R = \delta^{ab}/2$

oppure usare i generatori astratti T^a $[\mathrm{tr}\, t^a_R = 0]$

Eq. del moto:

$$\delta S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left(\mathbb{F}_{\mu\nu}\,\delta\mathbb{F}^{\mu\nu}\right)$$

$$\delta\mathbb{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu + i\,\delta A^\mu A^\nu + i A^\mu \delta A^\nu - (\mu\leftrightarrow\nu)$$

$$\delta S = -\frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big(\mathbb{F}_{\mu\nu}\big(\partial^\mu\delta A^\nu + \underbrace{i\,\delta A^\mu A^\nu}_{-i\,\delta A^\nu A^\mu} + i A^\mu \delta A^\nu\big)\Big)$$

Integriamo per parti, buttando via il termine di bordo (variaz. si annullano agli estremi)

$$\delta S = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[\big(\partial^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} + i[A^\mu, \mathbb{F}_{\mu\nu}]\big)\delta A^\nu\Big]$$

$\delta S = 0$ $\forall$ variaz. nulle agli estremi $\Leftrightarrow$ eq. Lagr.

$$\Rightarrow \quad \text{E.O.M.} \quad \partial^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} + i[A^\mu, \mathbb{F}_{\mu\nu}] = 0$$

$\mathbb{F}_{\mu\nu}$ sta nella rapp. Adj $\Rightarrow$ e.o.m. possono essere scritte:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \qquad (*)$$

è COVARIANTE: se A^0_μ è soluz. di $(*)$, allora anche $A^{0\alpha}_\mu$ è soluz.

Trasformato di A^0_μ sotto una trasf. di gauge $\alpha(x)$.

cioè ogni elemento dell'ORBITA di A^0_μ è soluz.

In aggiunta $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ soddisfa le IDENTITÀ DI BIANCHI

def. $\tilde{\mathbb{F}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{F}^{\rho\sigma}$; allora per def. di $\mathbb{F}^{\rho\sigma}$

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

← non è un'eq. del moto, ma un'identità che A_μ soddisfa.

$\tilde{\mathbb{F}} = *\mathbb{F}$

↑ Hodge dual

Corrente conservata:

La Lagrangiana è $\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$, $\phi_i \equiv A_\mu^a$

$$j^\mu(\epsilon) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - \underbrace{\cancel{K^\mu}}_{\mathcal{L} \text{ è inv.}}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} \delta_\epsilon A_\nu^a = -\frac{1}{g^2} F^{a\mu\nu} (D_\nu \epsilon)^a =$$

$$= -\frac{1}{g^2} F^{a\mu\nu} \left(\partial_\nu \epsilon^a - f^{abc} A_\nu^b \epsilon^c \right)$$

$$\partial_\mu j^\mu(\epsilon) = -\frac{1}{g^2} \partial_\mu F^{a\mu\nu} \left(\underline{\partial_\nu} \epsilon^a - f^{abc} A_\nu^b \epsilon^c \right)$$

$$+ \frac{1}{g^2} F^{a\mu\nu} f^{abc} \left(\partial_\mu A_\nu^b \epsilon^c + \underline{A_\nu^b} \partial_\mu \epsilon^c \right)$$

$$= -\frac{1}{g^2} \Big(\underbrace{\partial_\mu F^{a\mu\nu} - f^{abc} F^{c\mu\nu}}_{=0 \text{ su eom}} A_\mu^b \Big) \partial_\nu \epsilon^a$$

$$+ \frac{1}{g^2} \epsilon^c f^{abc} \left(\partial_\mu F^{a\mu\nu} A_\nu^b + F^{a\mu\nu} \partial_\mu A_\nu^b \right) =$$

$$\underset{\text{on-shell}}{=} \frac{1}{g^2} \epsilon^c \partial_\mu \Big(\underbrace{f^{abc} F^{a\mu\nu}}_{\propto\, \partial_\nu F^{c\mu\nu} \text{ eom}} A_\nu^b \Big) \underset{\text{on-shell}}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \text{On-shell} \quad j^\mu(\epsilon) \propto \frac{1}{g^2} \partial_\nu \left(\epsilon^c F^{c\mu\nu} \right)$$

$$K^{\mu\nu} = \epsilon^c F^{c\mu\nu}$$

$$Q(\alpha) = \int d^3x\, j^0(\alpha) = \frac{1}{g^2}\int d^3x\, \partial_i \left(F^{c0i}\alpha^c\right) \qquad i=1,2,3$$

$$= -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i\, \alpha^c F^{c0i}$$

Se $\alpha(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \text{cost}$, allora

$$Q(\alpha) = \alpha^c Q^c \qquad \text{con} \qquad Q^c = -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i F^{c0i}$$

Possiamo anche definire

$$\mathbb{Q} = Q^c t^c_R$$

Allora tale oggetto trasforma come

$$\mathbb{Q} \longmapsto -\oint_{S^2_\infty} d\Sigma_i \left(U(x)\, \mathbb{F}^{0i}\, U(x)^{-1}\right) \overset{\alpha(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \text{cost.}}{=}$$

$$= U\, \mathbb{Q}\, U^{-1}$$

Inoltre si ha che nella teoria quantistica

$$i\epsilon\left[Q^a, \varphi\right] = \delta_\epsilon \varphi$$

QUANTIZZAZIONE CANONICA

metodo quant. canonico non è straightforward: certe variabili non hanno momenti coniugati e ciò porta a difficoltà.

- Teoria di YM è una teoria vincolata $\rightsquigarrow$ DIRAC BRAKETS

- Facciamo un gauge fixing e applichiamo la quantizzazione canonica.

- $A_0^a = 0$ qta è la componente che non ha un momento coniugato non-triviale

Lascia ridondanza per $\alpha^a = \alpha^a(\bar{x})$ (indip. da t)

REGOLE DI COMMUTAZIONE

$$[A_i^a(\bar{x},t), A_j^b(\bar{y},t)] = 0 \qquad [F_{0i}^a(\bar{x},t), F_{0j}^b(\bar{y},t)] = 0$$

$$[A_i^a(\bar{x},t), F_{0j}^b(\bar{y},t)] = \underbrace{i\,\delta^{ab}\,\delta_{ij}}_{\text{def. positiva}}\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Mettendo a zero A_0^a, nascondo l'informazione data dalle sue eq. del moto, che quindi devo imporre a mano:

e.o.m. di A_0^a: $\quad (D_i F^{i0})^a = 0 \quad$ (GAUSS LAW) $\quad \sim \bar{\nabla}\cdot\bar{E}=0$

Qta condizione viene imposta sugli stati FISICI (potremmo farlo quantizz. il sistema vincolato)

$\hookrightarrow \quad (D_i F^{i0})^a\,|phys\rangle = 0 \qquad \forall a$

uccide pol. longitudinali (qlc temp. uccise da gauge fixing)

$\Updownarrow$ equiv.

$\Gamma[\alpha]\,|phys\rangle = 0 \qquad \forall \alpha(x) \qquad$ con $\Gamma[\alpha] \equiv \int d^3\bar{x}\,(D_i F^{i0})^a \alpha^a(\bar{x})$

Ricordiamo che a livello quantistico la simm. è generata dalla carica

$$Q(\alpha) = \int j^0(\alpha)\, d^3\bar{x} = \int F^{a0i}\, \delta_\alpha A_i\, d^3\bar{x}$$

$$= \int F^{a0i} (D_i \alpha)^a d^3\bar{x}$$

$$\leftarrow \partial_i (\underbrace{F^{a0i}}_{\text{singoletto}} \alpha^a) = (D_i F^{a0i}) \alpha^a + F^{a0i} D_i \alpha^a$$

$$= \int \partial_i (F^{a0i} \alpha^a)\, d^3\bar{x} - \int D_i F^{a0i} \alpha^a\, d^3\bar{x}$$

$$= \underbrace{\oint_{S^2_\infty} F^{a0i} \alpha^a}_{= \alpha^a(\infty) Q^a} - \Gamma[\alpha]$$

$\leftarrow$ si annulla su stati fisici (e on-shell)

$$\rightarrow \quad \delta |phys\rangle = i\, Q(\alpha)\, |phys\rangle = i\, \alpha^a(\infty)\, Q^a\, |phys\rangle$$

- se $\alpha(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x}\to\infty]{} 0$ ("small" gauge transf.) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ $|phys\rangle$ è lasciato invariato $\rightsquigarrow$ ridondanza

- se $\alpha(\bar{x}) \rightarrow \text{cost} \neq 0 \longrightarrow |phys\rangle$ trasforma sotto G.

$\rightsquigarrow$ Ω_* = vere ridondanze, cioè sono queste le trasf. di gauge vere e proprie.

$G \cong \Omega / \Omega_*$ è GRUPPO DI SIMMETRIA della teoria.