Storia delle equazioni di terzo grado

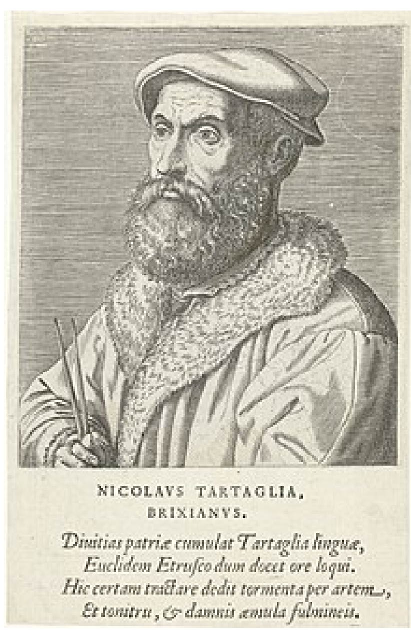
Sin dai tempi della matematica babilonese erano noti metodi risolutivi per equazioni di terzo grado particolari, essenzialmente quelle che possono essere ricondotte ad un'equazione di secondo grado.

I greci riuscivano a risolvere alcune equazioni di terzo grado con il metodo delle coniche, metodo reso famoso dall'aneddoto della duplicazione dell'altare di Apollo.

Durante l'età della matematica araba, Omar Khayyām credeva che, a parte i casi riducibili, non esistesse un metodo risolutivo generale per le equazioni di terzo grado, opinione che ancora Luca Pacioli riportava nella sua opera *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* del 1494.

Ma nella prima metà del XVI secolo scoppiò un caso clamoroso.

Un procedimento risolutivo di buona generalità venne trovato da **Scipione del Ferro** (1465 - 1526); egli non lo pubblicò ma lo comunicò in fin di vita ad un suo allievo, Antonio Maria del Fiore o Antonio Maria Fior, detto **Floridus** in latino, un modesto matematico. La voce si sparse e **Niccolò Fontana**(1500-1557), detto **Tartaglia**, incoraggiato dalla notizia e (forse) con ricerche indipendenti già nel 1541 affermò di saper risolvere problemi implicanti equazioni di terzo grado.



Quando si seppe fu organizzata una gara tra Floridus e Tartaglia: ognuno sottopose all'altro trenta "questioni" da risolvere entro una certa data. Arrivato il giorno stabilito, Tartaglia aveva risolto tutti i problemi di Floridus e questi nemmeno uno. All'epoca infatti i numeri negativi non venivano presi in considerazione come soluzioni e si ricorreva a diversi metodi risolutivi con soli numeri positivi. Floridus conosceva solamente un metodo per coefficienti positivi e per equazioni della forma:

$$x^3 + px = q$$

mentre Tartaglia gli aveva sottoposto tutti problemi con coefficienti negativi e nella forma

$$x^3 + px^2 = q.$$

E' quasi certo che Tartaglia avesse imparato a ricondurre il secondo caso al precedente.

Pur se figlio illegittimo, astrologo, eretico e giocatore incallito, **Gerolamo Cardano** (1501-1576) era un rispettabile professore a Bologna e Milano, tanto che ebbe una pensione dal Papa. Egli fu uno scrittore prolifico nel campo della medicina, delle scienze naturali e della matematica.

Gerolamo Cardano

Venuto a sapere della vittoria su Floridus, Cardano aveva invitato Tartaglia a recarsi da lui nella città di Milano, con la vaga promessa di trovargli un mecenate. Tartaglia non aveva fonti di reddito stabili forse a causa della balbuzie, causatagli da una sciabolata ricevuta da ragazzo durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512. Il difetto, a cui si deve anche il soprannome autoimpostosi di Tartaglia, lo rendeva inadatto all'insegnamento, per cui l'offerta venne accettata. Tartaglia dunque rivelò a Cardano il procedimento sotto forma di poesia (tra parentesi la notazione attuale):

Quando che'l cubo con le cose appresso [$x^3 + px$]

Se agguaglia à qualche numero discreto [$= q$]

Trovan dui altri differenti in esso. [$u - v = q$]

Dapoi terrai questo per consueto

Che'llor produtto sempre sia eguale [$uv =$]

Al terzo cubo delle cose neto, [$(p/3)^3$]

El residuo poi suo generale

Delli lor lati cubi ben sottratti [$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$]

Varrà la tua cosa principale. [$= x$]

Dalla poesia si esprime il procedimento ottenendo le note *formule cardaniche*, cioè l'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

ha soluzione (reale!)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

In tale circostanza, Tartaglia fece giurare a Cardano che non avrebbe mai reso pubblico il procedimento, in quanto voleva farsi un nome con la pubblicazione della soluzione di quella equazione di terzo grado abbastanza generale.

In quel periodo, anche **Ludovico Ferrari** (1522-1565), l'amanuense di Cardano, era dedito egli stesso allo studio dell'algebra.

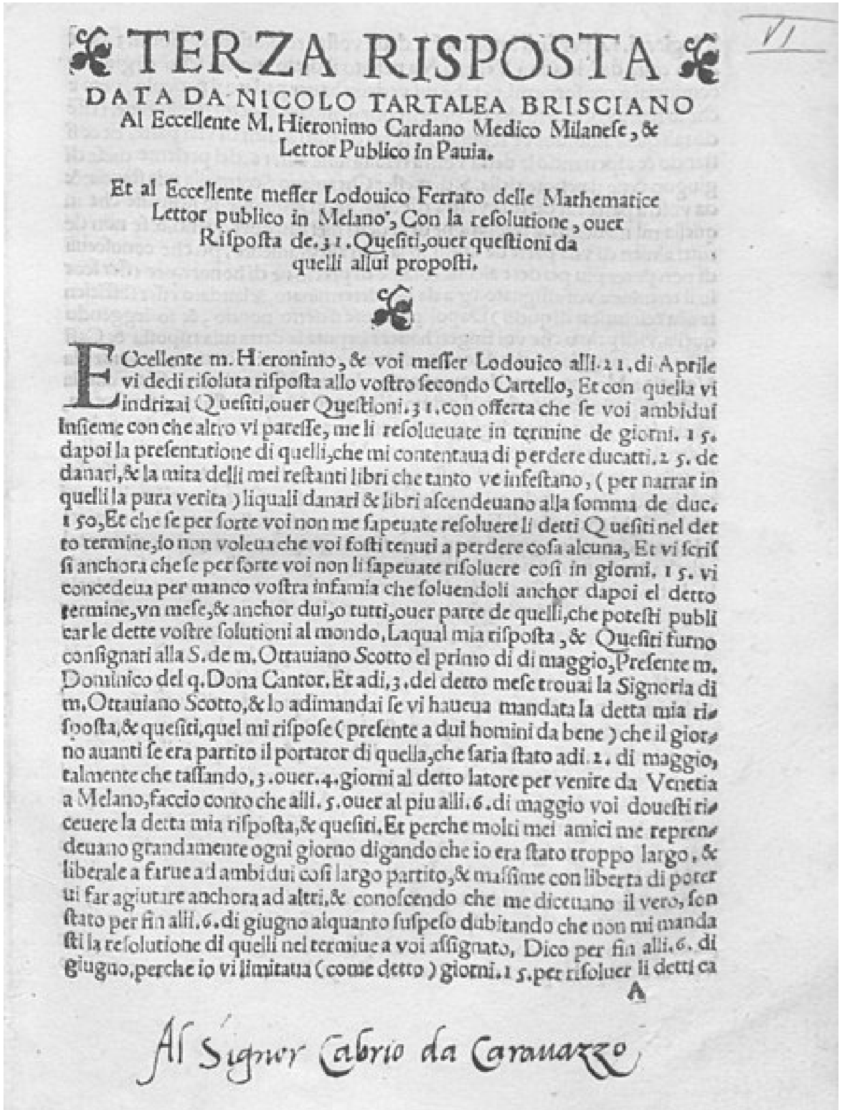
Cardano e Ferrari a quel punto lavorarono sul materiale fornito loro dal Tartaglia, andando oltre le sue scoperte e riuscendo a fornire una dimostrazione rigorosa della soluzione; è proprio in questo periodo che Ferrari risolve anche l'equazione di quarto grado.

Ludovico Ferrari

Il procedimento risolutivo individuato dal matematico bolognese richiedeva però la soluzione dell'equazione di terzo grado scoperta da Tartaglia, e che non poteva essere pubblicata a causa della promessa fatta da Cardano.

Dopo qualche tempo tuttavia, quest'ultimo venne a sapere delle precedenti deduzioni di Scipione del Ferro e si recò quindi presso **Annibale della Nave**, genero di del Ferro e suo successore alla cattedra di matematica dell'Università di Bologna, nella speranza di carpire le informazioni di cui aveva bisogno.
Il della Nave mostrò a Cardano il manoscritto sul quale il suocero aveva annotato la soluzione dell'equazione, la stessa trovata da Tartaglia; fu così che Cardano, sentendosi svincolato dalla promessa fatta, pubblicò il risultato noto come *formula di Cardano*.

Con l'uscita dell'*Artis Magnae sive de regulis algebraicis* (detta brevemente *Ars Magna*) nel 1545, in cui vennero pubblicate le soluzioni per le equazioni di terzo e quarto grado, anche se riconoscendo la paternità delle rispettive scoperte a Ferrari e Tartaglia, divampò subito la polemica. Infatti questo non fu sufficiente per evitare le ire di Tartaglia che offese pubblicamente Cardano chiamandolo "huomo di poco sugo". Ferrari difese accanitamente il maestro e ne seguì una lunga disputa (dalla quale, comunque, Cardano si mantenne sempre neutrale). Sfidato pubblicamente da Ferrari, Tartaglia fu umiliato e sconfitto e poco dopo vide il ritiro del suo incarico di professore.



VI

TERZA RISPOSTA

DATA DA NICOLO TARTALEA BRISCIANO
Al Eccellente M. Hieronimo Cardano Medico Milanese, & Lettor Publico in Pauia.

Et al Eccellente messer Lodouico Ferraro delle Mathematice Lettor publico in Melano, Con la resolutione, ouer Risposta de. 31. Quesiti, ouer questioni da quelli allui proposti.

Eccellente m. Hieronimo, & voi messer Lodouico alli. 21. di Aprile vi dedi risoluta risposta allo vostro secondo Cartello, Et con quella vi indrizai Quesiti, ouer Questioni. 31. con offerta che se voi ambidui insieme con che altro vi paresse, me li resolueuate in termine de giorni. 15. dapoi la presentatione di quelli, che mi contentaua di perdere ducatti. 25. de danari, & la mita delli mei restanti libri che tanto ve infestano, (per narrar in quelli la pura verita) liquali danari & libri ascendeuano alla somma de duc. 150, Et che se per sorte voi non me sapeuate resoluere li detti Quesiti nel detto termine, io non voleua che voi fosti tenuti a perdere cosa alcuna, Et vi scrissi anchora che se per sorte voi non li sapeuate risoluere cosi in giorni. 15. vi concedeua per manco vostra infamia che soluendoli anchor dapoi el detto termine, vn mese, & anchor dui, o tutti, ouer parte de quelli, che potesti publicar le dette vostre solutioni al mondo, Laqual mia risposta, & Quesiti furno consignati alla S. de m. Ottauiano Scotto el primo di di maggio, Presente m. Dominico del q. Dona Cantor. Et adi, 3. del detto mese trouai la Signoria di m. Ottauiano Scotto, & lo adimandai se vi haueua mandata la detta mia risposta, & quesiti, quel mi rispose (presente a dui homini da bene) che il giorno auanti se era partito il portator di quella, che saria stato adi. 2. di maggio, talmente che tassando, 3. ouer. 4. giorni al detto latore per venire da Venetia a Melano, faccio conto che alli. 5. ouer al piu alli. 6. di maggio voi douesti riceuere la detta mia risposta, & quesiti. Et perche molti mei amici me reprendeuano grandamente ogni giorno digando che io era stato troppo largo, & liberale a farue ad ambidui cosi largo partito, & massime con liberta di poter ui far agiutare anchora ad altri, & conoscendo che me diceuano il vero, son stato per fin alli. 6. di giugno alquanto suspeso dubitando che non mi mandasti la resolutione di quelli nel termine a voi assignato, Dico per fin alli. 6. di giugno, perche io vi limitaua (come detto) giorni. 15. per risoluer li detti ca

A

Al Signor Gabrio da Carauazzo

Niccolò Tartaglia, *Terza risposta data a messer Hieronimo Cardano et a messer Lodovico Ferraro*, 1547

Cardano e Ferrari divennero improvvisamente famosi, ma nemmeno la loro fortuna durò a lungo: il figlio di Cardano fu condannato a morte per l'assassinio della moglie mentre l'altro suo figlio lo derubò per saldare i suoi debiti di gioco. Egli stesso venne poi imprigionato per aver calcolato l'oroscopo di Gesù Cristo.

Ferrari invece, dopo aver perso le dita di una mano in una rissa, fu probabilmente avvelenato dalla sorella.

La pubblicazione dell'*Ars Magna* fu così sorprendente che impresse una spinta molto forte agli studi del settore, tanto che il 1545 viene considerato, da alcuni, l'inizio del periodo della matematica moderna.

Non si può dimenticare che Cardano incontrò alcune difficoltà a trattare casi come

$$x^3 = 15x + 4.$$

Infatti applicando la formula risolutiva si trova

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

e la radice di un numero negativo non si sapeva trattare. Però, cercando una soluzione con i metodi geometrici di Omar Khayyām, si trova che una soluzione è $x = 4$ e di conseguenza altre due soluzioni sono ottenibili risolvendo l'equazione $x^2 + 4x + 1 = 0$. Quindi l'equazione ha tre radici reali, ovvero si ha la fattorizzazione

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3}),$$

mentre la formula risolutiva porta a numeri non reali. In generale si incorre in numeri non reali con equazioni della forma $x^3 + px + q = 0$ per le quali

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 < -\left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Questa disuguaglianza caratterizza quello che veniva chiamato caso irriducibile, caso ritenuto intrattabile. Gli autori posteriori (primo fra tutti **Rafael Bombelli**) riprenderanno questi risultati giungendo alla introduzione dei numeri complessi.

Negli anni successivi **François Viète** trovò un altro metodo di risoluzione e altri nuovi metodi per la soluzione di equazioni cubiche e biquadratiche furono mostrate più tardi dall'olandese **Johan Jacob Ferguson**.