Lezione 14 ottobre 2024

lunedì 14 ottobre 2024 10:00

SCALA SEMILOGARITMICA

È un cambio di coordinate:

in generale $\Gamma_f : y = f(x)$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

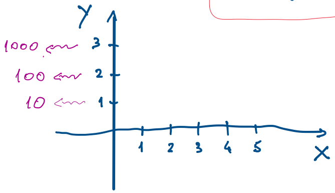
chiamo

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \log_{10} y \end{cases}$$

il nuovo grafico avrà equazione

$$Y = \log_{10} y = \log_{10} f(x)$$

$$\boxed{Y = \log_{10} f(x)}$$



$$Y = 1 = \log_{10} y \Rightarrow y = 10$$

$$Y = 2 = \log_{10} y \Rightarrow y = 10^2 = 100$$

$$Y = 3 = \log_{10} y \Rightarrow y = 10^3 = 1000$$

* * *

FUNZIONI ESPONENZIALI

Sono molto usate per modelli matematici nelle scienze naturali, ad esempio:

① • Decadimento radioattivo

② • FENOMENI DI SATURAZIONE

③ • FUNZIONI LOGISTICHE

① Un atomo radioattivo induce decadimento di altri atomi

sperimentalmente: # di atomi che decadono in un'unità di tempo $\boxed{t_1}$ è proporzionale al

di atomi radioattivi presenti

$$N(t) = \#\text{ atomi radioattivi al tempo } t$$

$\exists\ \lambda > 0$ COSTANTE DI DECADIMENTO tale che
(LAMBDA)

$$N(0) = N_0$$

$$N(t_1) = N_0 - \lambda t_1 N_0 = (1-\lambda t_1) N_0$$

$$N(2t_1) = N(t_1) - \lambda t_1 N(t_1) = (1-\lambda t_1) N(t_1) \overset{!}{=} (1-\lambda t_1)^2 \cdot N_0$$

$$\vdots$$

$$N(kt_1) = (1-\lambda t_1)^k N_0$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{t = k t_1} \quad , \quad \boxed{t_1 = \frac{t}{k}}$$

$$N(t) = \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^k \cdot N_0 = e^{-\lambda t} \cdot N_0$$

Per potere considerare unità di tempo t_1 molto piccole

cons. $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^k \cdot N_0 = \boxed{e^{\boxed{-\lambda t}} \cdot N_0}$

Infatti: $\left(1 - \frac{\lambda t}{k}\right)^k$, al variare di

$k \in \mathbb{N}$, è una SUCCESSIONE

di numeri reali

dove $\boxed{e = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \quad \text{NUMERO DI NEPERO}}$

è un numero $\approx 2,71 \ldots$

è IRRAZIONALE $(\notin \mathbb{Q})$

Vediamo alcuni valori: $k = 1$

$k = 1 \quad \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \ : \quad 2$

$k = 2 \quad : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$

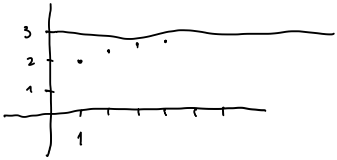
$k = 3 \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} > \frac{9}{4}$

$2{,}37 > 2{,}24$

$k = 4 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} \simeq 2{,}44 > \frac{64}{27}$

Si può dimostrare che la successione $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ è STRETT. CRESCENTE

e che $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3$



Infine: una successione strettamente crescente e limitata superiormente ammette sempre limite finito (è un Teorema della Matematica).

OSS.: Spesso non viene fornita la costante $\lambda > 0$, bensì il TEMPO DI DIMEZZAMENTO

$t_{1/2} \ : \ N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0$

$N(t) = e^{-\lambda t} \cdot N_0$

$N(t_{1/2}) = e^{-\lambda t_{1/2}} \cdot N_0$

$=$

$e^{-\lambda t_{1/2}} \cdot \cancel{N_0} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{N_0}$

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-\lambda t_{1/2}} = \ln \frac{1}{2} \iff -\lambda t_{1/2} = \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln(2)$$

$$\ln = \log_e$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}}$$

② FENOMENI DI SATURAZIONE

(raggiungimento di concentrazione massima di una sostanza disciolta in un solvente)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

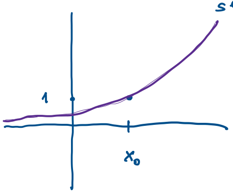
$$f(x) = a\left(1 - e^{-k(x-x_0)}\right) + b$$

$$a > 0, \quad k > 0, \quad x_0, b \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0) = b$$

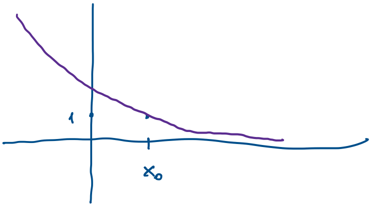
Voglio capire qualitativamente il grafico Γ_f

- $e^{k(x-x_0)}$: strettamente crescente, sempre positiva, per $x = x_0$ il valore è 1.

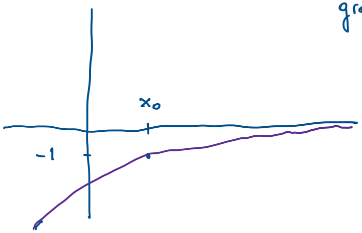


- $e^{-k(x-x_0)} = \left(e^{-1}\right)^{(k(x-x_0))} = \underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)}_{}^{k(x-x_0)}$

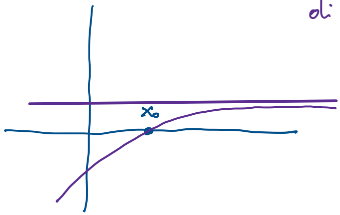
<1



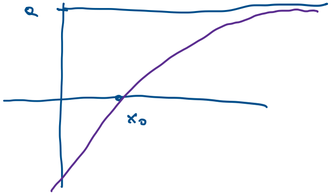
- $-e^{-k(x-x_0)}$: il grafico è SIMMETRICO al grafico precedente rispetto all'asse x.



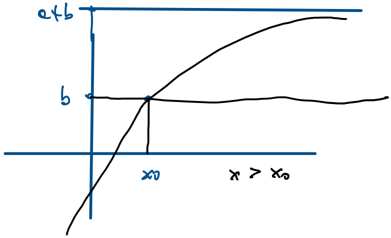
- $\boxed{1 - e^{-k(x-x_0)}}$: è la traslata della precedente di 1 verso l'alto



- $a\left(1 - e^{-k(x-x_0)}\right)$: riscalamento dei valori (tutti i valori precedenti vengono moltiplicati per a)



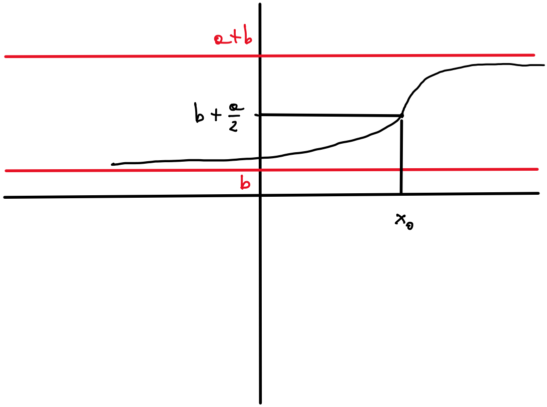
- $a\left(1 - e^{-k(x-x_0)}\right) + b$: traslazione verso l'alto di b



la funzione vale b per $x = x_0$, e poi tende ad appiattirsi verso il valore $a+b$ per $x \to +\infty$

③ FUNZIONI LOGISTICHE

usate per descrivere ad es. diffusione di epidemie; percentuale di germinazione dei semi di pomodoro in funzione della temperatura



$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-k(x-x_0)}} + b$$

$a > 0, \quad k > 0, \quad b > 0$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$f(\mathbb{R})$ immagine di f

$$f(\mathbb{R}) = \underbrace{(b\,,\ a+b)}_{\text{intervallo aperto di estremi } b \text{ e } a+b}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R} : b < y < a+b \}$$

$$f(x_0) = b + \frac{a}{2}$$ è punto medio di $(b, a+b)$

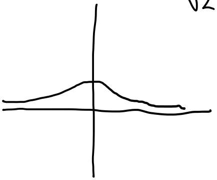
$$= \frac{b+a+b}{2}$$

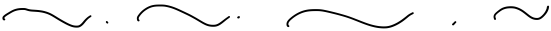
e vediamo che x_0 è un PUNTO DI FLESSO

Un'altra tipologia di funzioni usata in statistica:

FUNZIONE GAUSSIANA ; ad es.

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

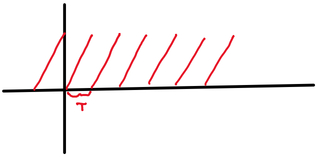


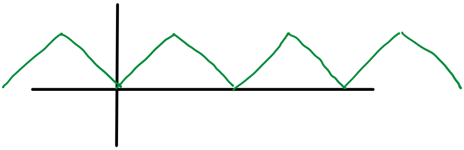


FUNZIONI PERIODICHE

Def.: Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice PERIODICA DI PERIODO T ($T \in \mathbb{R}$, $T > 0$) se vale

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$$





PROPRIETA' DELLE FUNZ. PERIODICHE

$$f(x+kT) = f(x), \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$$

Dim.:

$$f(x+2T) = f(\underbrace{(x+T)}+T) = f(\underbrace{x+T}) = f(x)$$

se diciamo $x' = x+T$

$$f(x+2T) = f(x'+T) = f(x')$$
$$= f(x+T)$$
$$= f(x)$$

$$f(x+3T) = f(\underbrace{(x+2T)}+T)$$

$$x''$$

$$= f(x'') = f(x+2T) = f(x)$$

ecc. : in generale si dimostra $f(x+kT)=f(x)$ $\forall\, k>0$ usando PRINCIPIO DI INDUZIONE

Infine: $f(x) = f(\underbrace{(x-T)}_{=x'''}+T)$

$$= f(x'''+T)$$

$$= f(x''') = f(x-T)$$

$\Rightarrow$ $f(x) = f(x-T)$

analog. $f(x-T) = f(x-T-T+T)$

$$= f((x-2T)+T)$$

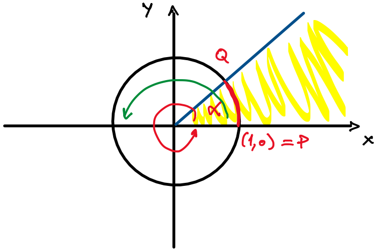
$$f(x) = f(x-T) = f(x-2T)$$

in generale : $f(x) = f(x-nT)$, $n>0$, $n \in \mathbb{N}$

FUNZIONI PARI & DISPARI : già viste.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Cons. cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1
(circonferenza)



α angolo ; si misura in RADIANTI

MISURA DI α = LUNGHEZZA DELL'ARCO $\overset{\frown}{PQ}$

ANGOLO GIRO = PERIMETRO del cerchio unitario

= 2π

180° = PIATTO : π

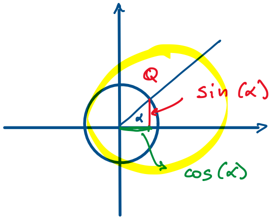
90° = RETTO : $\pi/2$

45° = $\pi/4$

30° : $\pi/6$

60° = $\pi/3$

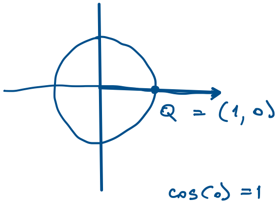
FUNZIONE $\cos : [0, 2\pi] \rightarrow R$



$\sin : [0, 2\pi] \rightarrow R$

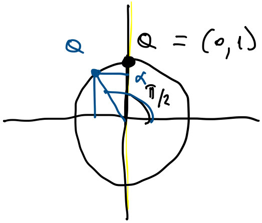
$Q = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$\alpha = 0$:



$\cos(0) = 1$

$\sin(0) = 0$



$\cos(\pi/2) = 0$

$\sin(\pi/2) = 1$

Estendo in modo periodico con periodo $T = 2\pi$ le 2 funzioni a tutto $\mathbb{R}$:

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$

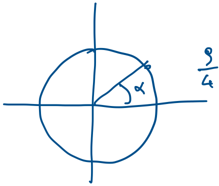
$\alpha \in \mathbb{R}$ dove k è t.c.

$$0 \leq \alpha + k \cdot 2\pi \leq 2\pi$$

$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$

Es: $\alpha = \frac{9}{4}\pi = 405°$

$$\alpha - 2\pi = \frac{9}{4}\pi - \frac{8}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi = 45°$$



$\frac{9}{4}\pi \longrightarrow \frac{1}{4}\pi$

Quindi: cos e sin sono, per costruzione, periodiche di periodo 2π.

OSS.: $\sin(\omega x)$, con $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$

è periodica:

$$\sin(\omega x) = \sin(\omega x + 2\pi)$$

$$= f(x) = f(x+T) = \sin(\omega(x+T))$$

$$= \sin(\omega x + \omega T)$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

: ω FREQUENZA
T periodo

Analog: $\cos(\omega x)$ è periodica di $T = \frac{2\pi}{\omega}$

TEOREMA DI FOURIER:

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T > 0$
"suff. regolare"
allora $\exists$ coeff. $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
$b_1, b_2, b_3, \dots$

t.c.

$$f(x) \text{ "="} \; a_0 + a_1 \cos(\omega x) + a_2 \cos(2\omega x) + a_3 \cos(3\omega x) + \cdot$$

$$+ b_1 \sin(\omega x) + b_2 \sin(2\omega x) + b_3 \sin(3\omega x) + \dots$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$

il membro destro è una SERIE DI FUNZIONI.

Sotto opportune ipotesi, tale serie ammette limite e il limite coincide "quasi ovunque" con $f(x)$ (cioè tolti, eventualmente, dei punti isolati).