# Lezione 18 ottobre 2024

venerdì 18 ottobre 2024 08:20

## SUCCESSIONI

**Def.:** Una successione è una lista ordinata e infinita di numeri reali

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

$$x_n \in \mathbb{R}$$

Interpretiamo questa lista come una FUNZIONE

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(n) = x_n$$

Due modi di assegnare una succ:

ⓐ • esprimere il generico termine con una espressione:

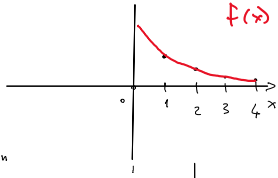
ad es.: $x_n = \frac{1}{n}$ , $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$x_1 = \frac{1}{1} = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{1}{3}$

$x_4 = \frac{1}{4}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ è una funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ INTERPOLANTE i punti della succ.

es.: $x_n = (-1)^n$

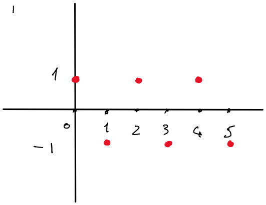
$x_0 = (-1)^0 = 1$

$x_1 = (-1)^1 = -1$

$x_2 = (-1)^2 = 1$

$x_3 = (-1)^3 = -1$

$\vdots$



es.: $x_n = e^n$

es : $x_n = \sin(n)$

ⓑ • assegnare il termine generale in funzione di alcuni termini precedenti.

Ad esempio: SUCCESSIONE DI FIBONACCI

poniamo $x_0 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = x_0 + x_1 = 1+1 = 2$

$x_3 = x_1 + x_2 = 1 + 2 = 3$

$x_4 = x_2 + x_3 = 2 + 3 = 5$

$\vdots$

$x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$

MOTIVAZ. per questa SUCCESSIONE:

" Mettiamo una coppia di conigli in un recinto isolato. Quante coppie di conigli sono prodotte supponendo che ogni mese venga generata una coppia, che a partire dal secondo mese diventa produttiva "

Mese 0 : 1 coppia non fertile

Mese 1 : 1 coppia fertile

Mese 2 : 1 coppia fertile + 1 non fertile

Mese 3 : 2 coppie fertili + 1 non fertile

Mese 4 : 3 coppie fertili + 2 non fertili

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$(x_{n+1} = x_n + x_{n-1})$$

Vedremo: interessante $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}$

Altri esempi:

## PROGRESSIONI ARITMETICHE E GEOMETRICHE:

**Def.:** Una PROGR. ARITM. è una successione di numeri reali

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n - x_{n-1} = d \qquad d \in \mathbb{R}$$

costante

non dipende da n

quindi: $x_0$

$x_1 - x_0 = d$, cioè $x_1 = \underbrace{x_0 + d}$

$x_2 - x_1 = d$, cioè $x_2 = x_1 + d = x_0 + 2d$

$x_3 - x_2 = d$, $\underline{x_3} = x_2 + d = x_0 + \underline{3}d$

....

$$x_n = x_{n-1} + d = x_0 + n \cdot d$$

Se $d > 0$ : la successione è str. crescente

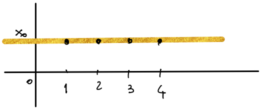
Se $d < 0$ : la succ. è str. decrescente

se $d = 0$

$$x_0$$
$$x_1 = x_0 + d = x_0 + 0 = x_0$$
$$x_2 = x_1 + 0 = x_1 = x_0$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_{n-1} + 0 = x_{n-1} = \dots = x_0$$

è una **SUCCESSIONE COSTANTE**

una funzione interpolante è la funzione costante $f(x) = x_0$



$\tilde{f}$ è una funzione INTERPOLANTE se

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

oppure $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ed è t.c. $\tilde{f}(n) = x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{R}$

( è un' ESTENSIONE della succ. a tutto $\mathbb{R}$ )

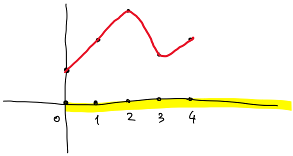
succ. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\subseteq$$

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

t.c. $\tilde{f}\big|_{\mathbb{N}} = f$



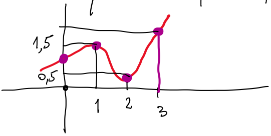
Il modo più semplice di interpolare una
succ. è con una funzione POLINOMIALE

cioè $f(x) = \boxed{a_s} x^s + \boxed{a_{s-1}} x^{s-1} + \boxed{a_{s-2}} x^{s-2} + \dots + \boxed{a_1} x + \boxed{a_0}$

$a_i \in \mathbb{R}$

Funzione con un numero finito di punti

**Lemma:** Dati ⓝ punti del piano, a due a due non su rette verticali, esiste sempre un polinomio di grado $\boxed{s = n-1}$ t.c. $y = f(x)$ passa per i punti dati



ES: 4 punti : $(0, 1)$
$(1, 3/2)$
$(2, 1/2)$
$(3, 2)$

cerco: $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

voglio che la curva di equazione

$$y = \underbrace{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}_{= f(x)}$$

passi per i 4 punti

pass. per $(0, 1)$ : $f(0) = 1$

cioè $a_3 \cdot 0^3 + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = 1$

ovvero $a_0 = 1$

pass. per $(1, 3/2)$ : $f(1) = 3/2$

$$a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + 1 = 3/2$$

cioè $a_3 + a_2 + a_1 + 1 = 3/2$

$$\boxed{a_3 + a_2 + a_1 = 1/2}$$

pass. per $(2, 1/2)$ : $f(2) = 1/2$

$$a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + 1 = 1/2$$

$$\boxed{8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = -\frac{1}{2}}$$

pass. per $(3, 2)$ :

$$a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + 1 = 2$$

$$\boxed{27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 1}$$

$$\boxed{a_0 = 1}$$

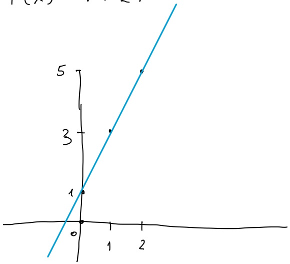
Se $d > 0$:

$d = 2$ , $x_0 = c = 1$

$x_n = x_0 + n \cdot d = x_0 + 2n = 1 + 2n$

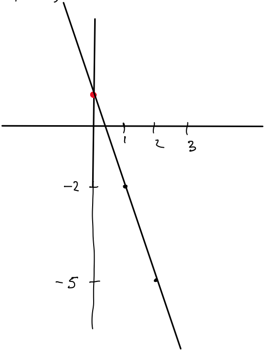
$f(n) = c + 2n = 1 + 2n$

$f(x) = 1 + 2x$



$d < 0 \quad : \quad d = -3 \quad , \quad x_0 = c = 1$

$f(n) = x_n = x_0 + nd = 1 + n \cdot (-3) = 1 - 3n$

$f(x) = 1 - 3x$