ESERCIZI SU MATRICI E SOTTOSPAZI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Considera le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcola:

- $(A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot {}^tB$
- ${}^tB \cdot A$
- $(B + C) \cdot A$
- $(B \cdot A) + (C \cdot A)$
- $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{\text{6 volte}}$

Risoluzione. Abbiamo che

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -9 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -9 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. Inoltre

$$A \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tB \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi in particolare che $A \cdot {}^tB \neq {}^tB \cdot A$. Inoltre

$$B + C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad (B + C) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot A) + (C \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che $(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$. Inoltre

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{\text{6 volte}}$ è la matrice nulla 3×3.

Esercizio 2

Considera le matrici

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcola

- $(P_{12} \cdot P_{12})$ e $(P_{13} \cdot P_{13})$ e $(P_{23} \cdot P_{23})$
- $(P_{12} \cdot A)$ e $(P_{13} \cdot A)$ e $(P_{23} \cdot A)$
- $(A \cdot P_{12})$ e $(A \cdot P_{13})$ e $(A \cdot P_{23})$

Noti qualcosa?

Risoluzione. Vale che

$$P_{12} \cdot P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{13} \cdot P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{23} \cdot P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{13} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad P_{23} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot P_{13} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A \cdot P_{23} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Notiamo quindi che per ogni $k\ell \in \{12, 13, 23\}$, moltiplicare la matrice $P_{k\ell}$ per se stessa restituisce la matrice unità; moltiplicare $P_{k\ell}$ per A scambia le righe k-esima ed ℓ-esima di A; moltiplicare A per $P_{k\ell}$ scambia le colonne k-esima ed ℓ-esima di A.

Esercizio 3

Considera una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ovvero A è una matrice quadrata con n righe ed n colonne). **Dimostra** che le matrici

$$A + {}^tA \quad \text{e} \quad A - {}^tA$$

sono rispettivamente una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica. Usa questo fatto per mostrare che ogni matrice quadrata è la somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Risoluzione. Ricordiamo che una matrice quadrata B è *simmetrica* se vale $B = {}^tB$. Pertanto, per mostrare che $A + {}^tA$ è simmetrica, dobbiamo mostrare che

$$A + {}^tA = {}^t(A + {}^tA)$$

Ora, per le proprietà della trasposta

$${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$$

e quindi $A + {}^tA$ è simmetrica.

Ricordiamo che una matrice quadrata B è *antisimmetrica* se vale $B = -{}^tB$. Pertanto, per mostrare che $A + {}^tA$ è simmetrica, dobbiamo mostrare che

$$A - {}^tA = -{}^t(A - {}^tA)$$

Ora, per le proprietà della trasposta

$${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$$

e quindi $A + {}^tA$ è antisimmetrica (qui abbiamo anche usato che la trasposta dell'opposta è uguale all'opposta della trasposta, che si può dimostrare usando le definizioni).

Data quindi una matrice quadrata A, possiamo scrivere

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\text{simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\text{antisimmetrica}}$$

Quindi la matrice A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica con una matrice antisimmetrica.

Esercizio 4

Ricorda che abbiamo introdotto quattro matrici 2×2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e abbiamo visto che data una qualsiasi matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

allora vale che

$$A = a_{11}E + a_{12}F + a_{21}G + a_{22}H\,, \tag{$*$}$$

ovvero abbiamo espresso A come una *combinazione lineare* delle matrici E, F, G e H. **Dimostra** che l'espressione ($*$) è l'*unico* modo di scrivere A come combinazione lineare di E, F, G e H, ovvero che se vale

$$A = \lambda_1 E + \lambda_2 F + \lambda_3 G + \lambda_4 H\,,$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, allora deve essere

$$\lambda_1 = a_{11}\,, \quad \lambda_2 = a_{12}\,, \quad \lambda_3 = a_{21}\,, \quad \lambda_4 = a_{22}\,.$$

Risoluzione. Supponiamo che valga

$$A = \lambda_1 E + \lambda_2 F + \lambda_3 G + \lambda_4 H\,, \tag{$\triangle$}$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Per definizione abbiamo che

$$\begin{aligned}\lambda_1 E + \lambda_2 F + \lambda_3 G + \lambda_4 H &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dal momento che due matrici sono uguali se e solo se sono uguali tutte le loro entrate, l'uguaglianza ($\triangle$) implica che

$$\lambda_1 = a_{11}\,, \quad \lambda_2 = a_{12}\,, \quad \lambda_3 = a_{21}\,, \quad \lambda_4 = a_{22}\,.$$

Esercizio 5

Ricorda che abbiamo visto che se $\mathcal{F}$ è l'insieme delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (le cosiddette "funzioni reali di variabile reale"), allora possiamo definire due operazioni:

$$\begin{array}{rccc} (+): & \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (\lambda, f) & \mapsto & \lambda \cdot f \end{array}$$

dove la funzione $f+g$ è definita da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)\,,$$

mentre la funzione $\lambda \cdot f$ è definita da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda\, f(x)\,.$$

Con queste due operazioni, la terna $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. **Verifica** che il sottoinsieme $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ dato da

$$\mathcal{F}_0 := \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $(\mathcal{F}, +, \cdot)$.

Risoluzione. Ricordiamo che l'elemento neutro della somma in $\mathcal{F}$ è la funzione identicamente nulla, ovvero la funzione

$$\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto 0 \end{array}$$

Al fine di dimostrare che $\mathcal{F}_0$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, dobbiamo mostrare che

(1) $N \in \mathcal{F}_0$;
(2) se $f, g \in \mathcal{F}_0$, allora $f + g \in \mathcal{F}_0$;
(3) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}_0$, allora $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}_0$.

Dimostriamo questi tre punti.

- Dato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che $N(x) = 0$, in particolare vale che $N(0) = 0$ e dunque $N \in \mathcal{F}_0$.
- Siano $f, g \in \mathcal{F}_0$. Allora $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$. Quindi $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$ e pertanto $f + g \in \mathcal{F}_0$.
- Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $f \in \mathcal{F}_0$. Allora $f(0) = 0$. Quindi $(\lambda \cdot f)(0) = \lambda\, f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$ e pertanto $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}_0$.

Esercizio 6

Una matrice quadrata si dice *diagonale* se tutte le sue entrate al di fuori della diagonale principale sono nulle (le entrate della diagonale possono essere sia nulle che non nulle). Pertanto, una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonale se e solo se è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$. **Dimostra** che l'insieme

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ è diagonale}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

Risoluzione. Al fine di dimostrare che $\mathcal{D}_2$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$, dobbiamo mostrare che

(1) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{D}_2$;
(2) se $A, B \in \mathcal{D}_2$, allora $A + B \in \mathcal{D}_2$;
(3) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{D}_2$, allora $\lambda \cdot A \in \mathcal{D}_2$.

Dimostriamo questi tre punti.

(1) La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ è della forma $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$, infatti è sufficiente scegliere $a_{11} = 0$ e $a_{22} = 0$. Pertanto $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{D}_2$.
(2) Siano $A, B \in \mathcal{D}_2$. Allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

per qualche $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ e $b_{11}, b_{22} \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Quindi $A + B$ è diagonale e dunque appartiene a $\mathcal{D}_2$.
(3) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $A \in \mathcal{D}_2$. Allora

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & 0 \\ 0 & \lambda\, a_{22} \end{pmatrix}$$

Quindi $\lambda \cdot A$ è diagonale e dunque appartiene a $\mathcal{D}_2$.