Prodotto e invertibilità

Oss: l'analogia tra invertibilità di un numero reale e invertibilità di una matrice <u>non</u> si estende fino a dire che ogni matrice non nulla è invertibile

Esempio: consideriamo $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mostriamo che A <u>non</u> è invertibile, sebbene $A \neq 0$; supponiamo che esista $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

tale per cui valga

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da questo segue che, osservando le entrate di posto 11 e 21 di $A \cdot B$

$$\left.\begin{aligned} 11: \quad b_{11} + b_{21} &= 1 \\ 21: \quad b_{11} + b_{21} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{queste due uguaglianze } \underline{\text{non}} \text{ possono valere contemporaneamente.}$$

Campi

Notiamo che fino ad ora abbiamo solamente utilizzato la somma e il prodotto nei numeri reali, assieme alle loro operazioni inverse e alle loro proprietà. Questo ci fa intuire che sia possibile sviluppare tutta la teoria degli spazi vettoriali e delle matrici vista fino ad ora usando un insieme sul quale siano definite due operazioni che soddisfino talune proprietà soddisfatte dalla somma e dal prodotto di numeri reali.

Def: sia K un insieme sul quale siano definite due operazioni, che chiamiamo di somma e di prodotto:

$$+: K \times K \longrightarrow K \qquad\qquad \cdot: K \times K \longrightarrow K$$
$$(a, b) \quad a+b \qquad\qquad (a, b) \quad a \cdot b$$

l'insieme K si dice un <u>campo</u> se valgono le seguenti proprietà:

K1: (commutatività) $\forall a, b \in K$ vale
$$a+b = b+a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

K2: (associatività) $\forall a, b, c \in K$
$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

K3: (esistenza dell'elemento neutro)
esiste un elemento $0 \in K$ tale che $\forall a \in K$ vale $a+0 = 0+a = a$
esiste un elemento $1 \in K$ tale che $\forall a \in K$ vale $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
inoltre chiediamo che $0 \neq 1$.

K4: (esistenza di opposto e inverso)
$\forall a \in K$ esiste $b \in K$ tale che $a+b = b+a = 0$; tale elemento, che si dimostra essere unico, si denota $-a$.
$\forall a \in K \setminus \{0\}$ esiste $c \in K$ tale che $a \cdot c = c \cdot a = 1$; tale elemento, che si dimostra essere unico, si denota con a^{-1} oppure $1/a$.

K5: (distributività): $\forall a, b, c \in K$ vale
$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Tutte le definizioni di spazio vettoriale si possono quindi riscrivere sostituendo ai numeri reali un qualsiasi campo K. Si parla in questo caso di <u>spazio vettoriale su K</u> oppure di <u>K-spazio vettoriale</u>.

Esempio: $\mathbb{R}$ è un campo, $\mathbb{Q}$ è un campo, $\mathbb{C}$ è un campo
$\mathbb{N}$ non è un campo, $\mathbb{Z}$ non è un campo

Esempio: l'insieme delle funzioni razionali:
$$\left\{ \frac{p}{q} \text{ dove } p \text{ e } q \text{ sono polinomi in una variabile} \right\}$$
può essere dotato di una somma e di un prodotto che lo rendono un campo.

Esempio: l'insieme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (simboli, <u>non</u> numeri reali), su cui definiamo somma e prodotto

$$+: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \qquad\qquad \cdot: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$
$$(a, b) \longmapsto a+b \qquad\qquad (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

è un campo (con 2 elementi)

Sistemi lineari

Def: sia K un campo; un <u>sistema lineare</u> di m equazioni in n incognite a coefficienti in K è un sistema di equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

dove ogni $a_{ij} \in K$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$ e ogni $b_i \in K$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$; $x_1, \dots, x_n$ sono dette <u>incognite</u>, mentre gli elementi $b_1, \dots, b_m$ sono detti <u>termini noti</u> e gli elementi a_{ij} sono detti <u>coefficienti</u> del sistema; una <u>soluzione</u> è una n-upla ordinata di elementi di K (che rappresentiamo come un vettore colonna) $s \in K^n$, ovvero
$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$
tale che sostituendo s_i a x_i per ogni i, tutte le uguaglianze del sistema risultano vere;
il sistema si dice <u>omogeneo</u> se $b_1 = 0, \dots, b_m = 0$, ovvero tutti i termini noti sono nulli; il sistema si dice non-omogeneo se non è omogeneo, ovvero se almeno un termine noto è non-nullo;
il sistema si dice <u>compatibile</u> se esiste almeno una sua soluzione; altrimenti si dice <u>incompatibile</u>.

Oss: se un sistema lineare è omogeneo, allora la n-upla nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è sempre soluzione; pertanto tutti i sistemi lineari omogenei sono compatibili.

Def: dato un sistema lineare come nella definizione precedente definiamo

$$A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}} \in M_{m,n}(K)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$$

allora il sistema si può scrivere come

$$\underbrace{\underbrace{A}_{m \times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1}}_{m \times 1} = \underbrace{b}_{m \times 1}$$

Esempio: consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 2 \text{ equazioni} \\ 2 \text{ incognite} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

il sistema <u>non</u> è omogeneo; il sistema <u>non</u> è compatibile; se infatti esistesse una soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, allora avremmo che
$$\begin{cases} s_1 + 2s_2 = 3 \\ s_1 + 2s_2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow 3 = 5, \text{ assurdo.}$$

Esempio: consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \qquad \text{non è chiaro se questo sistema sia compatibile o meno.}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + 1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_2 = 2 \\ x_1 = x_2 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2/3 \\ x_1 = 5/3 \end{cases}$$

il sistema ha pertanto un'unica soluzione, quindi è compatibile pur non essendo omogeneo.
(il motivo per il quale siamo sicuri che la soluzione trovata sia l'unica è che per passare dal sistema iniziale a quello finale abbiamo utilizzato operazioni che <u>non</u> cambiano l'insieme delle soluzioni).

Def: due sistemi lineari si dicono <u>equivalenti</u> se ammettono le medesime soluzioni, ovvero se gli insiemi delle soluzioni dei due sistemi sono uguali.

Esempio: consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 2(3 - 2x_2) + 4x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 6 - 4x_2 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 \\ 6 = 6 \longleftarrow \text{sempre vero!} \end{cases}$$

pertanto, assegnando un valore a x_2, trovo il corrispondente valore di x_1, ovvero le soluzioni si possono scrivere come

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$