<u>Notazione</u>: d'ora in poi identificheremo i seguenti due spazi vettoriali

$$M_{m,1}(K) \quad e \quad K^m.$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u>: (teorema di Cramer)

consideriamo un sistema lineare $AX = b$ dove A sia una matrice quadrata $(A \in M_n(K))$; supponiamo che A sia invertibile; allora esiste un'unica soluzione del sistema lineare precedente ed essa è data da $A^{-1}\cdot b$.

<u>Oss</u>: questo teorema non ci dice solo che il sistema precedente è compatibile, ma ci dà anche un modo per calcolare l'unica soluzione.

Dim.: per dimostrare il teorema, dimostriamo due cose:

1. che $A^{-1}\cdot b$ è soluzione del sistema;
2. che $A^{-1}\cdot b$ è l'unica soluzione del sistema, ovvero, che se abbiamo una soluzione s del sistema, allora deve essere che $s = A^{-1}\cdot b$.

1. per dimostrare che $A^{-1}\cdot b$ è soluzione del sistema sostituiamo X con $A^{-1}\cdot b$ e verifichiamo se l'uguaglianza sia vera:

$$A\cdot(A^{-1}\cdot b) \overset{?}{=} b$$

associatività

$$\underbrace{\underbrace{(A\cdot A^{-1})}_{\mathbb{1}_n}\cdot b}_{b}$$

abbiamo verificato che l'uguaglianza è vera, quindi $A^{-1}\cdot b$ è soluzione, pertanto il sistema è compatibile.

2. consideriamo una soluzione s del sistema $AX = b$; l'obiettivo è mostrare che $s = A^{-1}\cdot b$; dato che s è soluzione, vale

$$A\cdot s = b$$

ora moltiplichiamo il membro sinistro e il membro destro a sinistra per A^{-1} e otteniamo

$$\underbrace{A^{-1}\cdot(A\cdot s)}_{(A^{-1}\cdot A)\cdot s} = A^{-1}\cdot b$$

$$\underbrace{\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{\mathbb{1}_n}\cdot s}_{s}$$

Pertanto abbiamo dimostrato che

$$s = A^{-1}b$$

e quindi $A^{-1}\cdot b$ è l'unica soluzione del sistema $AX = b$ □

<u>Teorema</u>: (teorema di struttura per sistemi lineari omogenei)

consideriamo un sistema lineare omogeneo con m equazioni ed n incognite ovvero del tipo

$$AX = 0 \longleftarrow \text{matrice } m\times 1 \text{ nulla}$$

siano $s, s' \in K^n$ due soluzioni del sistema e sia $\lambda \in K$; allora

1. $s+s'$ è soluzione del sistema lineare
2. $\lambda\cdot s$ è soluzione del sistema lineare.

pertanto, ricordando che il vettore nullo $0 \in K^n$ è sempre soluzione di $A\cdot X = 0$, possiamo dire che l'insieme delle soluzioni di $A\cdot X = 0$, ovvero l'insieme

$$\{r \in K^n : A\cdot r = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di K^n.

<u>Oss</u>, vale che, se $A \in M_{m,n}(K)$ e $\lambda \in K$ ed $s \in K^n$, allora

$$A\cdot(\lambda\cdot s) = \lambda\cdot(A\cdot s)$$

Dim. 1. supponiamo che $s, s' \in K^n$ siano soluzioni di $AX = 0$, ovvero

$$As = 0, \quad A\cdot s' = 0,$$

dobbiamo mostrare che $s+s'$ è soluzione di $AX = 0$, ovvero dobbiamo mostrare che $A\cdot(s+s') = 0$; calcoliamo

$$A\cdot(s+s') = A\cdot s + A\cdot s' = 0 + 0 = 0$$

proprietà distributiva

quindi $s+s'$ è soluzione

2. supponiamo che $s \in K^n$ sia soluzione di $AX = 0$ e che $\lambda \in K$; vogliamo mostrare che λs è soluzione di $AX = 0$, ovvero che vale $A(\lambda\cdot s) = 0$; calcoliamo

$$A\cdot(\lambda\cdot s) \underset{\uparrow}{=} \lambda\cdot(A\cdot s) = \lambda\cdot 0 = 0$$

per l'osservazione precedente

quindi $\lambda\cdot s$ è soluzione.

<u>Oss</u>: supponiamo ora di considerare un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove $A \in M_n(K)$ è invertibile; per il teorema di Cramer questo sistema ammette un'unica soluzione, ovvero $A^{-1}\cdot 0 = 0$, ovvero il vettore nullo è l'unica soluzione di un sistema di questo tipo.

<u>Teorema</u>: (teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari)

consideriamo un sistema lineare

$$AX = b \quad \text{con } A \in M_{m,n}(K) \text{ e } b \in K^m$$

e sia $\tilde{s}$ una sua soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ (che in generale può dipendere da s) tale che

$$s = \tilde{s} + s_0$$

ed s_0 sia soluzione di $AX = 0$ (quest'ultimo si dice il sistema lineare omogeneo associato ad $AX = b$).