Teorema: (teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari)
consideriamo un sistema lineare

$$AX = b \qquad \text{con } A \in M_{m,n}(K) \text{ e } b \in K^m$$

e sia $\tilde{s}$ una sua soluzione; allora un elemento $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ (che in generale può dipendere da s) tale che

$$s = \tilde{s} + s_0$$

ed s_0 sia soluzione di $AX = 0$ (quest'ultimo si dice il sistema lineare omogeneo associato ad $AX = b$).

Dim: abbiamo fissato una volta per tutte una soluzione $\tilde{s} \in K^n$ di $AX = b$; dobbiamo mostrare che

$s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ $\iff$ esiste $s_0 \in K^n$ che sia soluzione di $AX = 0$ e tale che $s = \tilde{s} + s_0$

"$\Rightarrow$" supponiamo che $s \in K^n$ sia soluzione di $AX = b$; dobbiamo determinare $s_0 \in K^n$ soluzione di $AX = 0$ tale che $s = \tilde{s} + s_0$; scegliamo $s_0 := s - \tilde{s}$; con quest'ultima scelta vale che $s = \tilde{s} + s_0$, infatti

$$\tilde{s} + s_0 = \tilde{s} + s - \tilde{s} = s$$

rimane da dimostrare che s_0 scelto in questo maniera è soluzione di $AX = 0$; per farlo, sostituiamo s_0 a X e calcoliamo:

$$A \cdot s_0 = A \cdot (s - \tilde{s}) = As - A\tilde{s} = b - b = 0$$

quindi s_0 è soluzione di $AX = 0$

"$\Leftarrow$" supponiamo che $s_0 \in K^n$ sia soluzione di $AX = 0$ e definiamo $s = \tilde{s} + s_0$; dobbiamo mostrare che tale $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$. per farlo, sostituiamo s a X in $AX = b$ e verifichiamo che l'uguaglianza sia vera; calcoliamo:

$$A \cdot s = A(\tilde{s} + s_0) = A\tilde{s} + A \cdot s_0 = b + 0 = b$$

pertanto s è soluzione di $AX = b$.

Quindi, se un sistema lineare $AX = b$ è compatibile e fissiamo una sua soluzione $\tilde{s}$, allora l'insieme di tutte le soluzioni di $AX = b$ è

$$\{ \tilde{s} + s_0 : s_0 \text{ è soluzione di } AX = 0 \}$$

Oss: le soluzioni di $AX = b$ formano un sottospazio vettoriale di K^n se e solo se $b = 0$.
"$\Rightarrow$" se le soluzioni di $AX = b$ sono un sottospazio vettoriale, allora il vettore nullo è soluzione di $AX = b$ e quindi $b = A \cdot 0 = 0$.
"$\Leftarrow$" se $b = 0$, allora il sistema $AX = b$ è omogeneo e in tal caso abbiamo dimostrato che le sue soluzioni sono un sottospazio vettoriale.

Esempio: consideriamo il sistema

$$x + 2y - 3z = 2$$

con coefficienti in $\mathbb{Q}$; posto in forma $AX = b$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = (2)$$

scegliamo come soluzione particolare $\tilde{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (avremmo potuto scegliere anche $\tilde{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oppure una qualsiasi altra soluzione particolare); per calcolare tutte le soluzioni di $AX = b$ è sufficiente pertanto calcolare tutte le soluzioni di $AX = 0$, ovvero di

$$x + 2y - 3z = 0$$

notiamo che questo sistema è equivalente a

$$x = 3z - 2y$$

quindi possiamo assegnare un qualsiasi valore u a y e un qualsiasi valore v a z e determinare il corrispondente valore per x, pertanto l'insieme delle soluzioni di $AX = 0$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3v - 2u \\ u \\ v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{Q} \right\}$$

notiamo che

$$\begin{pmatrix} 3v - 2u \\ u \\ v \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

concludendo, l'insieme delle soluzioni di $AX = b$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{Q} \right\}$$

Il nostro obiettivo ora diventa essere in grado di calcolare tutte le soluzioni di un sistema lineare, omogeneo o meno. Per cominciare, ci focalizziamo su un tipo particolare di sistemi lineari, quelli a scala o a gradini.

Def: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $r \in \{0, \dots, m\}$ il numero di righe non tutte nulle di A; diciamo che A è una matrice a <u>scala</u> o a gradini se e solo se:

- $r = 0$ (ovvero A è la matrice nulla);
- oppure se $r > 0$ e vale che $A_{(i)} \neq (0, \dots, 0)$ $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ (ovvero le eventuali righe nulle di A sono "in fondo") ed inoltre sia $\bar{j}$ l'indice della prima colonna non nulla di A e definiamo

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \qquad j_i := \min \{ j : a_{ij} \neq 0 \}$$

(notiamo che i numeri j_i sono ben definiti dal momento che per ipotesi, quando $i \in \{1, \dots, r\}$, la riga $A_{(i)}$ non è tutta nulla e pertanto ha senso chiedersi quale sia l'indice di colonna minimo tale che la corrispondente entrata di $A_{(i)}$ sia non nulla)
allora deve valere che $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r$ (tutti questi valori sono maggiori o uguali a $\bar{j}$); gli elementi a_{ij_i} sono detti elementi di <u>pivot</u>.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad r = 3, \ \bar{j} = 2 \qquad j_1 = 2 \quad j_2 = 3 \quad j_3 = 4$$

dato che $j_1 < j_2 < j_3$, la matrice è a scala

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = 2, \ \bar{j} = 1 \qquad j_1 = 1 \quad j_2 = 3$$

l'unica riga nulla è in fondo e vale $j_1 < j_2$, quindi la matrice è a scala.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad r = 3, \ \bar{j} = 1 \qquad j_1 = 1 \quad j_2 = 3 \quad j_3 = 3$$

$j_2 = j_3 \Rightarrow A$ <u>non</u> è a scala

Cerchiamo di capire quando un sistema lineare $AX = b$ con A a scala abbia soluzione. Sicuramente se $AX = b$ ha soluzione e le righe $A_{(r+1)}, \dots, A_{(m)}$ sono nulle, allora per ogni soluzione $s \in K^n$ vale che se considero $A \cdot s$, le entrate di posto $(r+1), \dots, m$ di quest'ultimo vettore sono tutte nulle, il che implica che deve essere necessariamente $b_{(r+1)} = \dots = b_m = 0$. Ci chiediamo se valga il viceversa.

Esempio: consideriamo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

il sistema lineare è

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \\ x_3 = 5 - 4x_4 \end{cases}$$

posso assegnare a piacimento un valore a x_4 e calcolare da questa equazione il corrispondente valore di x_3

prendiamo $x_4 = 1$ e otteniamo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3 \cdot 1 + 1 = -4 \\ x_3 = 5 - 4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -8 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

nuovamente posso assegnare a piacimento un valore a x_2 e calcolare il corrispondente valore di x_1 dalla prima equazione; scegliamo $x_2 = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 = 1 - 8 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -7/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Prop: sia $AX = b$ un sistema lineare dove $A \in M_{m,n}(K)$ è a scala e supponiamo che il numero di righe non nulle di A sia r; allora

$AX = b$ ammette soluzione (ovvero, è compatibile) $\iff$ $b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$