Tutorato di Analisi 1

Foglio di esercizi 1

1. Dimostrare per induzione le seguenti relazioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   (d) $n! \geq 2^{n-1}$

   (e) $n^n \geq n!$

   (f) $2^n > 10 \cdot n$ se $n \geq 6$

2. Posto $s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, dimostrare che $s_{2^n} > \frac{n}{2}$.

3. Dimostrare che se a_1, ..., a_n sono numeri positivi, con $a_1 \cdot ... \cdot a_n = 1$, si ha $a_1 + ... + a_n \geq n$.

4. Risolvere le seguenti equazioni:

   (a) $z^2 + i\overline{z} = 1$

   (b) $|z|^2 + 5z + 10i = 0$

5. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

   (a) $1 + i - \dfrac{i}{1-2i}$

   (b) $\dfrac{1}{1-i} + \dfrac{2i}{i-1}$

(c) $\dfrac{3-i}{(1+i)^2} - \dfrac{1}{1-i}$

6. Verificare che se $|z| = 1$, si ha

$$\left| \frac{3z-i}{3+iz} \right| = 1$$

7. Trovare l'estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi:

   (a) $\left\{ x = \dfrac{3n-2}{2n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$

   (b) $\left\{ x = \dfrac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$

   (c) $\left\{ x = \dfrac{t+1}{t-2} : t \in \mathbf{R},\ t > 2 \right\}$

   (d) $\left\{ x = \dfrac{n^2}{n+3} : n \in \mathbf{N} \right\}$

   (e) $\big\{ |x| : x^2 + x < 2 \big\}$

8. Dati A e B due sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, sia $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

   Dimostrare che $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ e $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

9. Dato un punto $x \in \mathbf{R}$ e un insieme $E \subseteq \mathbf{R}$, si definisce

$$d(x, E) := \inf\{d(x, y) : y \in E\}$$

   Dati $E,\ F \subseteq \mathbf{R}$, si definisce

$$d(E, F) := \inf\{d(x, y) : x \in E,\ y \in F\}$$

   (a) Provare che $d(E,F) \le d(x,E) + d(x,F)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $E,\ F \subseteq \mathbf{R}$.

   (b) Vale $d(E,F) \le d(E,G) + d(G,F)$ per ogni $G \subseteq \mathbf{R}$?

   (c) Provare che $d(E,F) = \inf\{d(x,F) : x \in E\}$.

10. Trovare i punti interni e di frontiera dei seguenti insiemi:

   (a) $\{x \in \mathbf{R} : 1 < |x| < 2\}$

   (b) $\mathbf{N}$

(c) $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + x < 2\}$

(d) $[0,1] \cap \mathbf{Q}$

(e) $\left\{x = \frac{p}{q} : p,\ q \in \mathbf{N}, q \leq 100\right\}$

(f) $\left\{x = \frac{p}{q} : p,\ q \in \mathbf{N},\ q\ dispari\right\}$

(g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n-1,\ 2n)$

11. Sia $A \subseteq \mathbf{R}$ un insieme aperto; dimostrare che ∂A non può avere punti interni..

12. Dimostrare che il risultato precedente è vero anche quando A è chiuso. Trovare un insieme per cui invece è falso.

13. Sia $K \subseteq \mathbf{R}$ chiuso. Dimostrare che esiste un insieme E tale che $\partial E = K$.