



Sessante 17

I Sottospazi Vettoriali

Def: (Sottospazio vettoriale) Sia fissato un campo K ed uno spazio vettoriale V su K . Un **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** W , sottospazio di V è uno **SPAZIO VETTORIALE** W sullo stesso campo K che si ha anche uno **SOTTOINSIEME** di V . ($W \subseteq V$).

Scriveremo $W \subseteq V$ come insieme e per lo più nel resto del corso intenderemo che uno è un sottospazio vettoriale dell'altro. A parte oggi, dove vedremo per capire meglio degli esempi di $W \subseteq V$ come insieme ma non come sottospazio vettoriale.

Oss: **W DEVE CONTENERE LO ZERO di V .** In particolare **W NON PUÒ ESSERE VUOTO.**

NEUTRO DELLA SOMMA.

Oss: Se $W \subseteq V$ come insieme, per controllare che sia
sottospazio di V è sufficiente controllare che sia
chiuso per somme di vettori e prodotto per scalari:

i) $w_1 + w_2 \in W$

ii) $\alpha \cdot w \in W$

$$\forall w, w_1, w_2 \in W, \forall \alpha \in K$$

in particolare prendendo
 $\alpha = 0 \in K$ troviamo $0 \cdot w = 0 \in W$,
in modo simile per l'opposto...

Esempio 2:

$$S_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 4 \right\}$$

DEFINITO DA UN'EQUAZ.

NON LINEARE, E

SOTTOINSIEME di $V = \mathbb{R}^2$
MA NON SOTTOSPAZIO
VETTORIALE

PER
ESEMPIO:

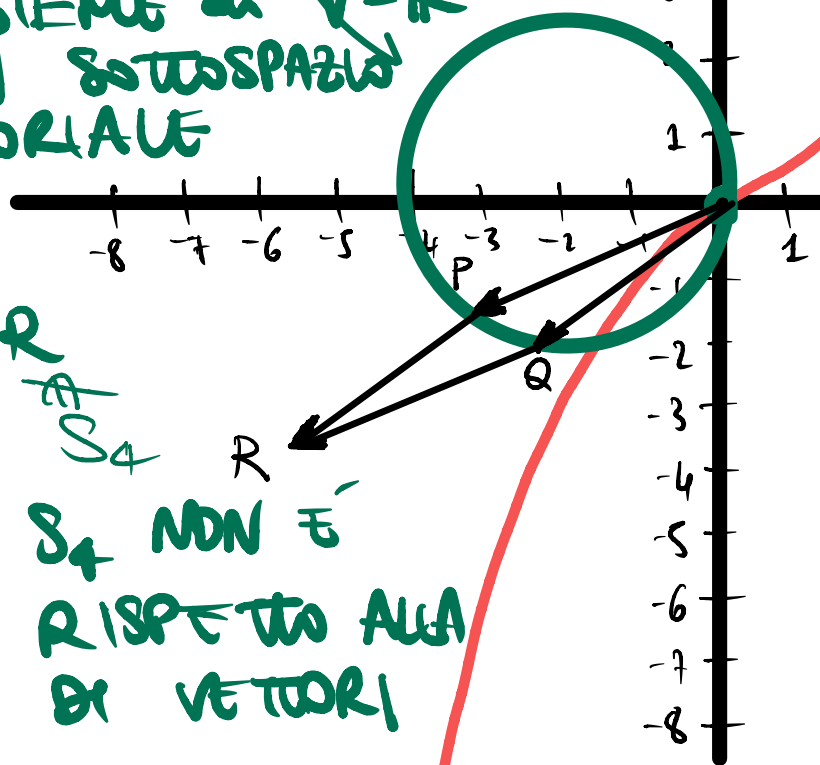
$$P + Q = R$$

$$\begin{matrix} \ni & \ni & \notin \\ S_4 & S_4 & S_4 \end{matrix}$$

S_4 NON È

CHIUSO
SOMMA
DI VETTORI

RISPETTO ALLA



$$S_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - x_1^3 = 0 \right\}$$

DEFINITO DA EQUAZ.

GRADO TRE INVECE

CHE GRADO UNO,

È SOTTOINSIEME MA

NON SOTTOSPAZIO

VETTORIALE (e nemmeno
AFFINE!)

PER ESEMPIO
 $(1, 1) \in S_5$

MA: $\alpha \cdot (1, 1) \notin S_5$ per ogni
 $\alpha \in \mathbb{R}$, infatti per $\alpha = 2$ il punto
 $(2, 2) \notin S_5$ perché $2^3 \neq 2$.

QUINDI S_5 NON È CHIUSO
RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZ.
PER SCALARI del CAMPO.

Esempio 1: Sia $V = \mathbb{R}^2$ SPAZIO VETTORIALE su $K = \mathbb{R}$.

DEFINITO DA SOLUZIONI DI
SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$\downarrow S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$$

$$\Updownarrow \\ x_2 = 2x_1$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

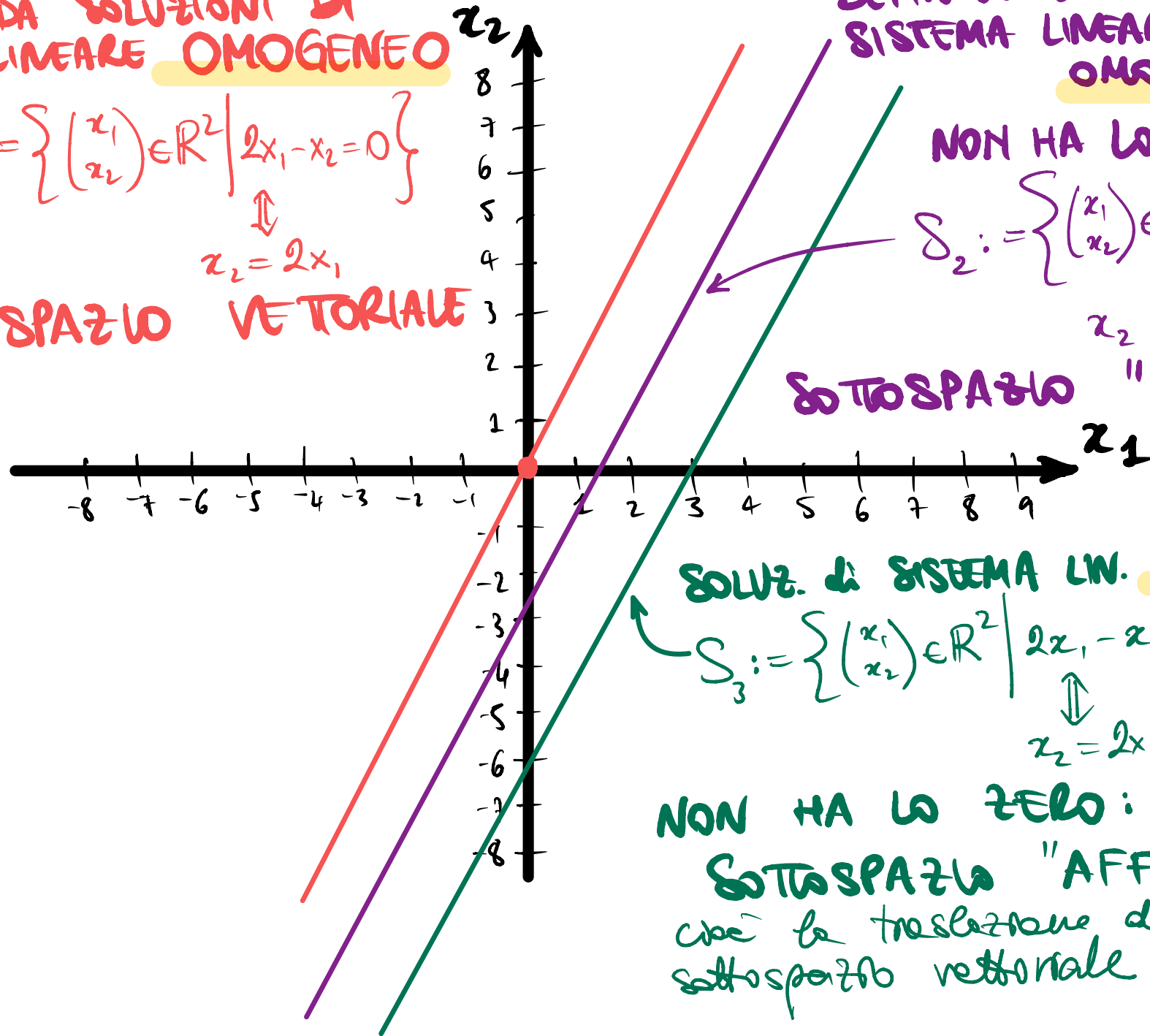
DEFINITO DA SOLUZIONI DI
SISTEMA LINEARE NON
OMOGENEO,

NON HA LO ZERO

$$S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 3 \right\}$$

$$\Updownarrow \\ x_2 = 2x_1 - 3$$

SOTTOSPAZIO "AFFINE"



SOLUZ. DI SISTEMA LN. NON OMOGENEO

$$S_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 6 \right\}$$

$$\Updownarrow \\ x_2 = 2x_1 - 6$$

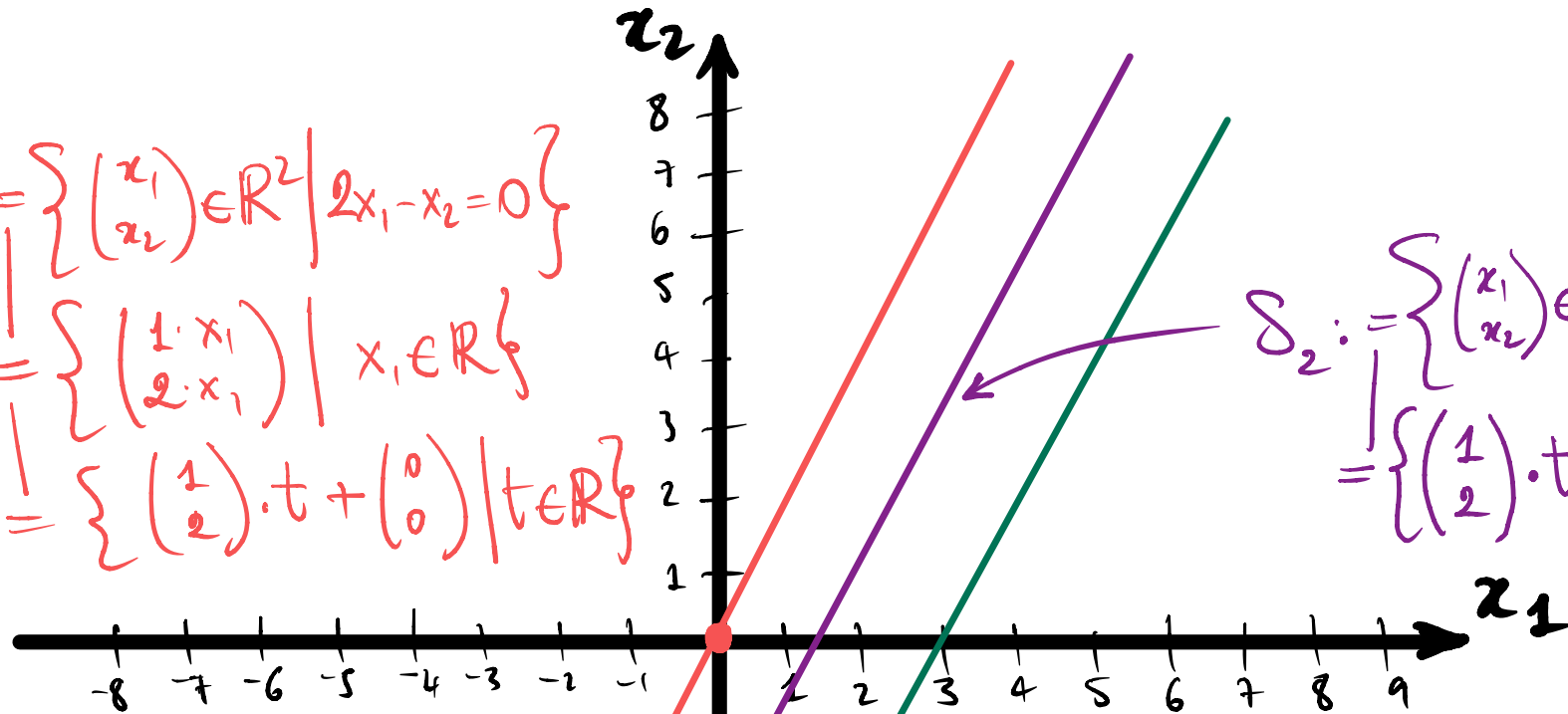
NON HA LO ZERO:

SOTTOSPAZIO "AFFINE"

cioè la traslazione di un
sottospazio vettoriale

Esempio 1:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 2 \cdot x_1 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

ECCE DI QUANTO SONO TRASLATI
 VIA DALL'ORIGINE. SONO
 SPAZI VETTORIALI TRASLATI
 di $-\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e di $-\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ RISPETTIVAM.
 QUINDI NON SONO PIÙ SPAZI
 VETTORIALI perché hanno
 perso lo zero, sono solo
 SPAZI AFFINI, o sottospazi
 AFFINI di $V = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} S_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 6 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 6 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \cdot t \\ 2 \cdot t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot t - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Esempio 3:

Per il TEOREMA di STRUTTURA (delle soluzioni) dei SISTEMI LINEARI, lo spazio

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \mid A \cdot x = b \right\} \subseteq K^m =: V$$

$A \in M_{n \times m}(K)$ sistema lineare a coeff in K

n componenti

È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $V \iff b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
ed altrimenti è soltanto un sottospazio affine di V
in quanto uguale al sottospazio vettoriale

$$W_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m \mid A \cdot x = 0 \right\} \subseteq K^m =: V$$

TRASLATO PERÒ dentro a V del vettore b !

quindi sappiamo
esattamente di quanto e
traslato E IN QUALE
DIREZIONE E VERSO.

Esempio 4:

$$V := K[x] := \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \mid \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in K \end{matrix}\}$$

POLINOMI nella variabile x a coefficienti nel campo K .

$$W := K[x]_d := \{a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in K\}$$

Allora $W \subseteq V$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

Dimostrazione: W è chiaramente chiuso rispetto alle somme di due polinomi di grado d e rispetto alla moltiplicazione per gli scalari del campo K . □

OPERAZIONI TRA SOTTOSPAZI VETTORIALI:

- INTERSEZIONE $\cap$
- UNIONE $\cup$
- SOMMA $+$
- SOMMA DIRETTA $\oplus$
- PRODOTTO CARTESIANO $\times$

Def: Sia fissato un campo K , uno spazio vettoriale V su K , e due sottospazi vettoriali $U \subseteq V$ e $W \subseteq V$.

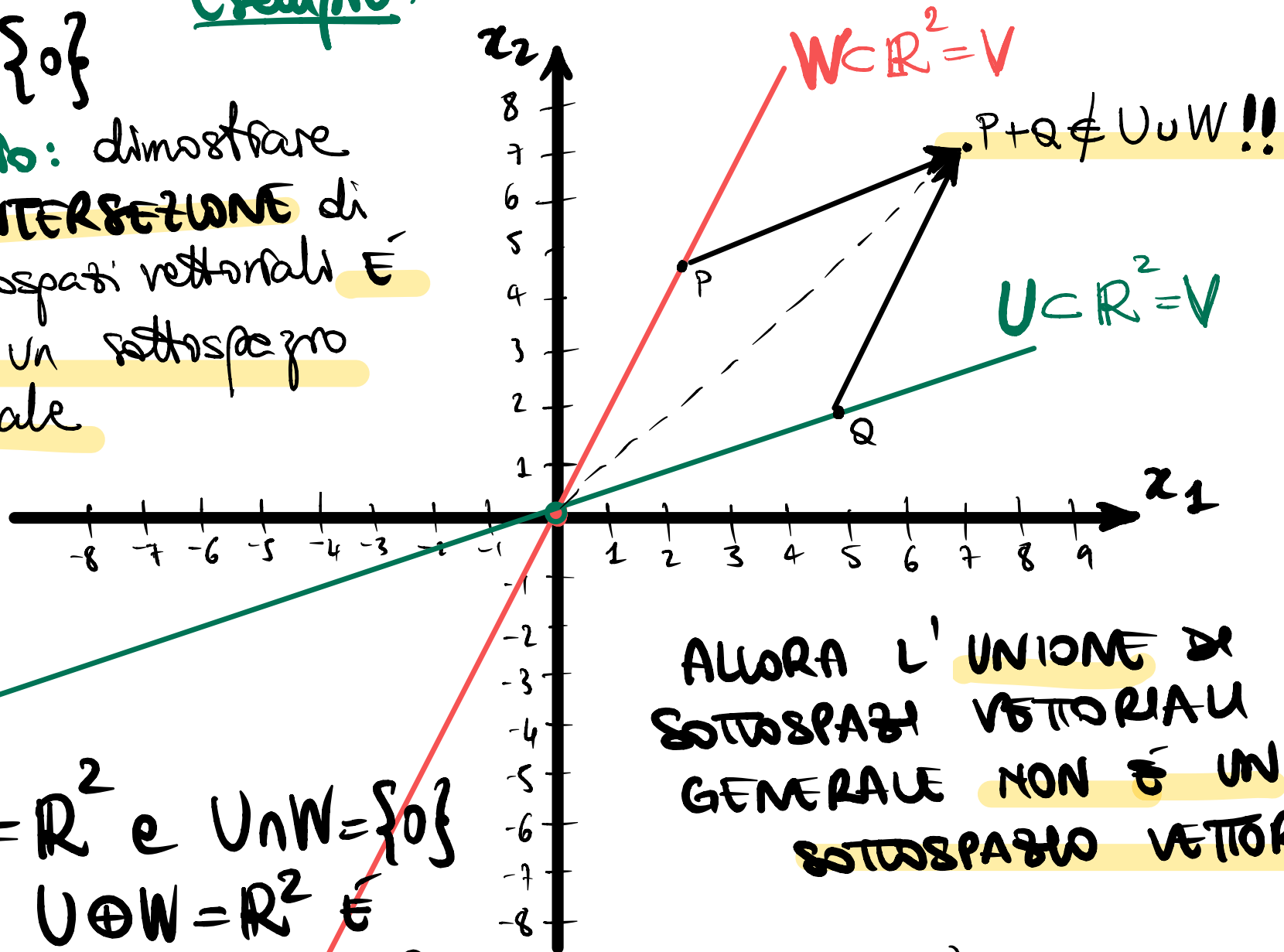
- **UNIONE:** $U \cup W := \{v \mid v \in U \vee v \in W\}$
- **INTERSEZIONE** $U \cap W := \{v \in U \wedge v \in W\}$
- **SOMMA:** $U + W := \{v = u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$
- **SOMMA DIRETTA:** $U \oplus W := U + W$ nel caso in cui si abbia $U \cap W = \{0\}$
- **SPAZI SUPPLEMENTARI:** U, W supplementari se $U \oplus W = V$.
- **PRODOTTO CARTESIANO:** $U \times V := \{(u, v) \mid u \in U \wedge v \in V\}$
con la somma $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ e $\alpha(u, v) = (\alpha \cdot u, \alpha \cdot v)$
ed elemento neutro $(0, 0)$. $\leadsto$ SPAZIO VETTORIALE.

SICURAMENTE
SI INTERSECAANO ALMENO
NELLO ZERO PERCHÉ
LO ZERO STA IN TUTTI
GLI SPAZI VETT.

Esempio:

$$U \cap W = \{0\}$$

Esercizio: dimostrare che L'INTERSEZIONE di due sottospazi vettoriali È SEMPRE un sottospazio vettoriale



$$U + W = \mathbb{R}^2 \text{ e } U \cap W = \{0\}$$

$$\text{ALLORA } U \oplus W = \mathbb{R}^2 \text{ È}$$

UNA SOMMA DIRETTA [e sono SUPPLEMENTARI].

ALLORA L' UNIONE di SOTTOSPAZI VETTORIALI IN GENERALE NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE!

Esercizio: dimostrare che la somma è sempre un sottosp. vettoriale (e quindi in particolare anche la somma diretta).

PROPOSIZIONE. Siano $U \subseteq V \supseteq W$ su K come prima.

Allora: $U+W$ è somma diretta $\iff$ ogni $v \in U+W$ si scrive come $v = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W}$ in modo unico

Dim.: $\Rightarrow$ Supponiamo che:

$$v = \underbrace{u_1}_{\in U} + \underbrace{w_1}_{\in W} = \underbrace{u_2}_{\in U} + \underbrace{w_2}_{\in W}$$

Allora ne possiamo dedurre che:

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

ma $U \cap W = \{0\}$ quindi l'unico elemento in comune a U ed a W è lo zero

$$\text{Quindi } \begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ w_2 - w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ w_1 = w_2 \end{cases} \Rightarrow v \text{ si scrive in modo unico.}$$

$\Leftarrow$ Ssa $v \in U \cap W$. Allora prendendo il vettore nullo zero:

$$0 = \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ U}}{v} - \underset{\substack{\uparrow \\ W}}{v}$$

Ma ogni vettore si deve scrivere in modo unico, anche il vettore nullo, quindi: $\begin{cases} 0 = v \in U \\ 0 = v \in W \end{cases}$

Allora l'unico vettore in entrambi gli spazi è zero

$$\Rightarrow U \cap W = \{0\} \Rightarrow U + W = U \oplus W$$

□

PROPOSIZIONE: $U \times W = \tilde{U} \oplus \tilde{W}$ dove: $\tilde{U} := \{(u, 0) \mid u \in U\}$
 $\tilde{W} := \{(0, w) \mid w \in W\}$

In particolare, OGNI PRODOTTO CARTESIANO È UNA SOMMA DIRETTA.

Dim: Ogni (u, w) si può scrivere come $(u, w) = (u, 0) + (0, w)$.
Inoltre: $\tilde{U} \cap \tilde{W} = \{(0, 0)\}$ allora la somma è diretta
e per la proposizione precedente la scrittura

$$(u, w) = \underbrace{(u, 0)}_{\in \tilde{U}} + \underbrace{(0, w)}_{\in \tilde{W}}$$

è l'unico modo di decomporre (u, w) come somma di elementi in $\tilde{U}$ e in $\tilde{W}$

□