Tutorato Analisi Matematica 1 - 2024/2025

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 5 - Verifiche di continuità - 22/10/2024

Richiamo

- Siano (E, d_E) e (F, d_F) spazi metrici e sia $f: E \to F$. f è continua in $x_0 \in E$ se

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d_E(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

oppure

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

oppure

iii) per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subseteq V$.

- Se $E = F = \mathbb{R}$ e come distanza prendiamo $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ allora la i) diventa

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

NOTA BENE

È implicitamente inteso che δ dipende, in generale, sia da x_0 che da ε. Inoltre, l'intorno $B(x_0, \delta)$ (o $|x - x_0| < \delta$) va eventualmente intersecato con il dominio di f.

$\hookrightarrow$ si veda Es. 2

ESERCIZI

Es. 1

i) Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 2$.

ii) Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es. 2

Dimostrare che $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ è continua $\forall x \geq 0$.

Es. 3

Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non è continua in $x = 0$.

SOLUZIONI

Es. 1

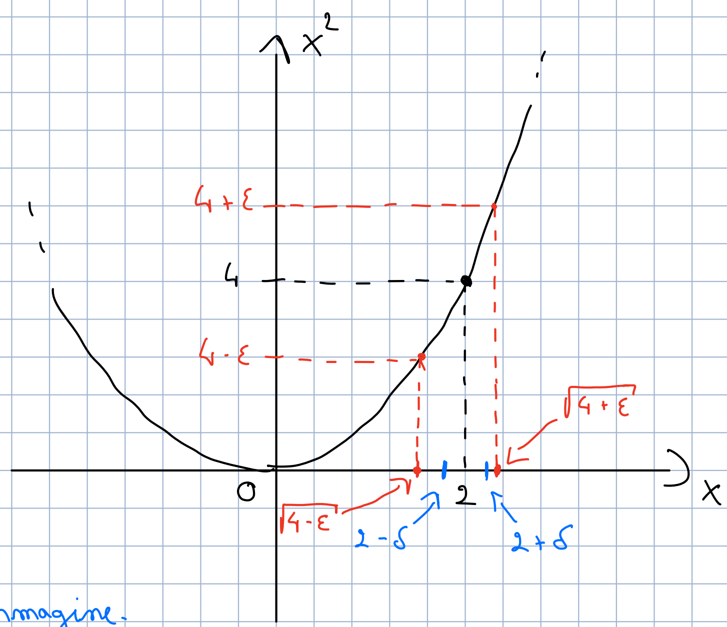
i) Calcoliamo innanzitutto: $f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$. Inoltre $\text{dom} f = \mathbb{R}$.

Dobbiamo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ovvero

se $|x-2| < \delta$ allora $|x^2 - 4| < \varepsilon$

Prima fissiamo un generico ε e individuiamo l'intervallo $(4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$, poi ne facciamo la controimmagine, e infine prendiamo un δ (che in generale dipende dal punto x_0 e da ε!), tale che $[2-\delta, 2+\delta]$ sia dentro questa controimmagine.



$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| \leq |x-2| \cdot (|x| + 2)$$

dis. triang.

Siccome $|x-2| < \delta$, allora per la dis. triang. inversa $|x| - 2 \leq |x-2| < \delta$

$\Rightarrow |x| \leq 2 + \delta$

$|a+b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b| \quad (a = x, b = -2)$

Quindi

$|x^2 - 4| \leq \delta \cdot (2 + \delta + 2) = \delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon$ cerchiamo i δ che soddisfino questa relazione!

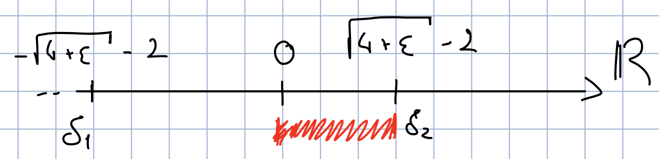
A questo punto dobbiamo dimostrare che per un qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ che soddisfa $\delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon$. Risolviamo quindi la disuguaglianza e determiniamo δ in funzione di ε.

$$\begin{cases} \delta \cdot (\delta + 4) < \varepsilon \\ \delta > 0 \end{cases}$$

$$\delta(\delta + 4) < \varepsilon$$

$$\delta^2 + 4\delta - \varepsilon < 0$$

$$\delta_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \varepsilon}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 < \delta < \delta_2 \\ \delta > 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ la continuità è verificata per $0 < \delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$

ii) Verifichiamo la continuità $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, procedendo esattamente allo stesso modo.

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0|(|x| + |x_0|)$$

Inoltre $|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| \leq |x_0| + \delta$

$$\Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) < \varepsilon$$

imponiamo questo e troviamo δ

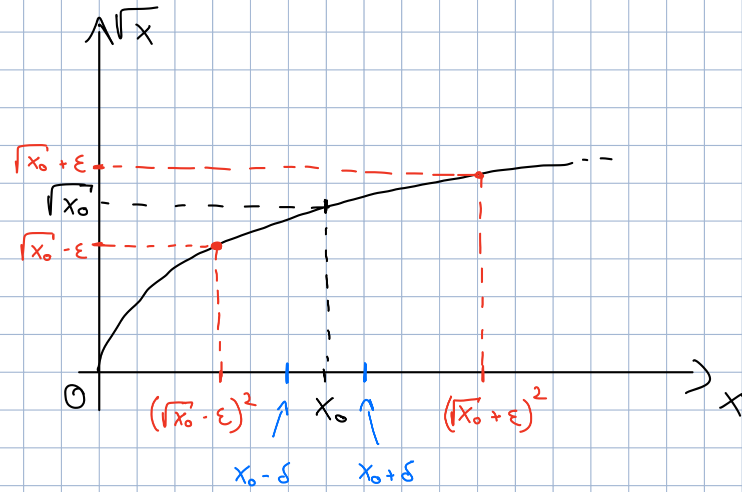
N.B. In generale conviene lavorare sulla differenza $|f(x) - f(x_0)|$ in modo da maggiorarla con $x - x_0$ o con una funzione di $x - x_0$, ed avere quindi una relazione tra δ e ε

$$\begin{cases} \delta \cdot (\delta + 2|x_0|) < \varepsilon \\ \delta > 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{stessi conti di i)}) \Rightarrow$$

$\boxed{\text{la continuità è verificata per } 0 < \delta < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|}$

Es. 2

Notiamo subito che $\text{dom} f = [0, +\infty)$.



graficamente (in modo informale, non rigoroso) diremmo

$x_0+\delta < (\sqrt{x_0}+\varepsilon)^2 = x_0 + 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$

$\Rightarrow \delta < 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$

Dobbiamo dim. che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: se $\underbrace{x \geq 0}_{x \in \text{dom} f}$ soddisfa $|x - x_0| < \delta$, allora $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$.

Lavoriamo su $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ per maggiorarlo con una funzione di $x - x_0$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Quindi, tenendo conto che $\sqrt{x} \geq 0$ dunque $\sqrt{x}+\sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}}$

abbiamo

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \right| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

Fissato ora $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare $\delta > 0$ che soddisfi la continuità, ovvero tale che

$$\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$$

Basta quindi prendere $\underline{0 < \delta < \varepsilon\sqrt{x_0}}$.

N.B.

Graficamente avevamo intuito che il δ più grande possibile era $\delta = 2\varepsilon\sqrt{x_0} + \varepsilon^2$. Con i calcoli ne abbiamo trovato uno più piccolo, che quindi va bene lo stesso.

Notiamo però che se $x_0 = 0$ avremmo $0 < \delta < 0$ (o $0 < \delta \leq 0$ indifferentemente), quindi ovviamente non ammissibile. Dimostriamo a parte il caso $x_0 = 0$.

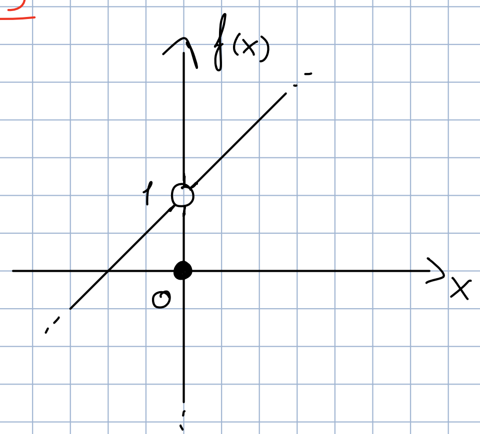
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : 0 < x < \delta \quad \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

ovvero $\sqrt{x} < \varepsilon$

$$\sqrt{x} < \varepsilon \Rightarrow x < \varepsilon^2$$

Basta dunque prendere $0 < \delta < \varepsilon^2$

Es. 3



Per dimostrare la non continuità, basta trovare un $\varepsilon > 0$ per cui, $\forall \delta > 0$ esiste un x che soddisfa $|x - x_0| < \delta$ ma per cui
$$|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon .$$

Per noi $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$.

Per $x \neq 0$ abbiamo

$$f(x) = x + 1 \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = |x + 1|$$

Prendiamo $\varepsilon \in (0, 1)$, ad esempio. Per qualsiasi $\delta > 0$ consideriamo l'intervallo $|x| < \delta$ (ovvero $-\delta < x < \delta$).

Basta prendere $x = \frac{\delta}{2}$ per avere:

$$\left|f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right| = \left|\frac{\delta}{2} + 1\right| > 1 > \varepsilon$$

$\Rightarrow$ ovvero per un qualsiasi $\varepsilon \in (0,1)$ abbiamo mostrato che $\forall \delta > 0 \ \exists x \in |x - x_0| < \delta$ che soddisfa $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.