Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 2

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

18 ottobre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, i, z \in \mathbb{C}, \overline{i \cdot z^n} = \overline{i} \cdot \overline{z}^n.$$

Esercizio 2. Svolgere i seguenti calcoli:

$$-2(i-3, 1+3i) + 4i(-2i+3, i+5), (4i+3)(i,-2) + 5(2i+3, i-1), 7i(1,-i) + 7\left(i^3+2, -\frac{2}{7}i\right) \in \mathbb{C}^2,$$

$$(-3i+2)(-i, 3+2i, 1-i) + (i-1)(3,2,1), \pi\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{3}, \frac{i-1}{6}\right) - \pi\left(\frac{3(1-i)}{2}, \frac{5(1+i)}{3}, \frac{7(i+1)}{6}\right),$$

$$\frac{4}{5}i\left(10i-5, 10+5i, \sqrt{25}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) + \frac{2}{3}\left(\sqrt{9}e^{\frac{3\pi}{4}i}, 27i-6, 18-9i\right) \in \mathbb{C}^3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(2i-4)\begin{pmatrix} -\frac{3+4i}{2i^3} & \frac{3-4i}{2} \\ \frac{1}{2(i-1)} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix} + (4-2i)\begin{pmatrix} \frac{3i-9}{4} & \frac{1}{4(1-i)} \\ -\frac{5+15i}{4} & -\frac{(-1-i)^4}{4i^4} \end{pmatrix}, i\sqrt[3]{2}\begin{pmatrix} \sqrt[3]{4} & -i\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ -i\frac{1}{\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \end{pmatrix} +$$

$$-\sqrt[3]{2}\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt[3]{2}} & -\sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & \frac{i}{\sqrt[3]{2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2_2, \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i & 0 \\ 0 & i-1 & (i-1)^3 \\ \frac{-1}{3-4i} & 0 & i^{360} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1+i & 0 & i-1 \\ (-1+i)^2 & 0 & (i-1)^2 \\ (-1+i)^{-2} & 0 & (i-1)^{-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3_3,$$

$$\begin{pmatrix} (2i-1)^{-1} & -(2-i)^{-1} & 0 \\ 0 & (1+i)^2 & -(1-i)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(4+3i)^{-1} & 0 & (4-3i)^{-1} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 & 0 & -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3_2,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)^3} & 0 \\ & \frac{\frac{4+3i}{4-3i}}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)^3} \\ 0 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}i} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}i} & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2_3.$$

Esercizio 3. Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} \overline{-2i+1} & 0 & \frac{1}{10}|6i-8|(3+i) \\ \frac{5}{1-2i} & i^2 & 3+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^3,\ B = \begin{pmatrix} 2i-1 & 0 \\ -3+2i & i-3 \\ -\frac{1}{\sqrt{32}}|4+4i| & \frac{3i-4i}{8+6i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3^2,$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -1 & 0 & 1+i \\ -i & -1+i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_3^3,\ D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2;$$

calcolare i seguenti prodotti di matrici: $A\overline{B}, \overline{B}A, AC, B\overline{D}, BE, CB, \overline{C}C, \overline{D}D, \overline{E}E, \overline{D}E, \overline{E}D, \overline{A}BD$.

Con $\bar{\cdot}$ si intende la matrice coniugata di $\cdot$, ovvero la matrice ottenuta da $\cdot$ coniugando i suoi elementi.

Esercizio 4. Dato il seguente polinomio $p(x) = x^2 - i \in \mathbb{C}[x]$.

a) Scomporre $p(x)$ sul campo $\mathbb{C}$.

b) Scrivere in coordinate polari gli zeri di $p(x)$.

Esercizio 5. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{F}_p$.

$$\begin{cases} 4x+y+2z=0 \\ -y+4z=4 \\ -8x-2y-4z=4 \end{cases} \quad \text{con } p \in \{2,3,13\}. \qquad \begin{cases} 2x-3z+4=0 \\ 3y-2x=-2 \\ -z+y-3=x \end{cases} \quad \text{con } p \in \{2,3,5\}.$$

$$\begin{cases} x+3z-2y=0 \\ t-4x+z=0 \\ -3x-2y+4z+t=0 \end{cases} \quad \text{con } p \in \{3,5,13\}. \qquad \begin{cases} 2x+3z=5-y \\ 3t-2y=7x \\ 2y-3z=4+t \end{cases} \quad \text{con } p \in \{2,3,5,7\}.$$

Esercizio 6. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari su $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} 2x+iy+z=4 \\ x+y-2z=2 \\ x+y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6ix-y+z=1 \\ 2x+y+3z=2 \\ 2ix+z=-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2y+iz=i \\ ix+y+z=0 \\ -4x+2y-iz=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3ix-z+y=1 \\ -3iy-2x+z=-1 \\ z-2y+ix=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x+iy-3=0 \\ 2y+z=-1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ix+y+z=0 \\ x+iy+z=0 \\ x+y+iz=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+iy+z=4 \\ x+y-2z=2 \\ x+y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6ix-y+z=1 \\ 2x+y+3z=2 \\ 2ix+z=-1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2y+iz=i \\ ix+y+z=0 \\ -4x+2y-iz=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3ix-z+y=1 \\ -3iy-2x+z=-1 \\ z-2y+ix=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+iy-3=0 \\ 2y+z=-1 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} ix+y+z=0 \\ x+iy+z=0 \\ x+y+iz=0 \end{cases}.$$