Lezione 21 ottobre 2024

lunedì 21 ottobre 2024 09:21

Oggi: ricevimento 3B H2 bis 16 - 17

SUCCESSIONI

Visto: (SUCCESSIONE)
PROGRESSIONE ARITMETICA

$x_0 = c$

$x_1 = x_0 + d$, $d \in \mathbb{R}$

$x_2 = x_1 + d = x_0 + 2d$ di **RAGIONE** d

$\vdots$

$x_n = x_{n-1} + d$

ovvero: $x_n = x_0 + n \cdot d$

$f(n) = c + n \cdot d$

visto: posso $f(n)$ estendere a tutto $\mathbb{R}$

$f(x) = c + x \cdot d = d \cdot x + c$

è una funz. polin. di grado 1 (lineare)

Def. : PROG. GEOMETRICA

è t.c. il rapporto tra termini consecutivi è costante $= q \neq 0$

$c = x_0 \neq 0$ q **RAGIONE** della prog. geometrica

$\frac{x_1}{x_0} = q$: $x_1 = q \cdot x_0$

$\frac{x_2}{x_1} = q$ $x_2 = q \cdot x_1 = q \cdot q \cdot x_0 \boxed{= q^2 \cdot x_0}$

$\frac{x_3}{x_2} = q$ $x_{\textcircled{3}} = q \cdot x_2 = q \cdot q^2 = x_0 = q^{\textcircled{3}} \cdot x_0$

$\vdots$

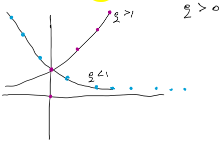
$\frac{x_n}{x_{n-1}} = q$ $x_n = q^n \cdot x_0$

$f(n) = q^n \cdot c = \boxed{c \cdot q^n}$

si può estendere a $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

$\tilde{f}(x) = c \cdot q^x$, $q \neq 0$, è definita solo



LIMITE DI UNA SUCC.

Def: Data una succ. $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

diremo che

① la succ. ha limite $l \in \mathbb{R}$ e

scriveremo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

diremo che x_n è CONVERGENTE

cioè sono cont. in

se " i valori di x_n si avvicinano

intervallo del tipo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ cioè esiste N tale che per ogni

arbitrariamente a l per n sufficientemente

$n \geq N$ "

grandi

cioè: per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ (piccolo a piacere)

esiste $N > 0$ tale che : per ogni $n \geq N$

si ha $l-\varepsilon \leq x_n \leq l+\varepsilon$

ovvero: $|x_n - l| \leq \varepsilon$

Es.: • Progress. geometrica

$$x_n = q^n \cdot x_0 \quad , \quad q>0$$

Se $0<q<1$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$ ⊛

Verifica: $q = \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n}$$

⊛ uso la definizione

scelgo un $\varepsilon > 0$, ad es. $\varepsilon = 10^{-3}$

cerco N t.c. $|x_n - l| \le 10^{-3}$

$$\boxed{|2^{-n} - 0| \le 10^{-3}}$$

$$|2^{-n}| \le 10^{-3}$$

$2^{-n} > 0$ $\qquad$ $2^{-n} \le 10^{-3}$

$\log_2 x$ è strett. crescente

$$\longleftrightarrow \quad \log_2 2^{-n} \le \log_2 10^{-3}$$

$$-n \le -3 \cdot \log_2 10$$

$$n \ge 3 \log_2 10$$

Quindi: se $N = \boxed{3 \log_2 10}$

In generale: $\varepsilon > 0$

per quali n vale $|x_n - l| \le \varepsilon$

$$|2^{-n} - 0| \le \varepsilon$$

$$|2^{-n}| \le \varepsilon$$

$$2^{-n} \le \varepsilon$$

$$\log_2 2^{-n} \le \log_2 \varepsilon$$

$$-n \le \log_2 \varepsilon$$

$$n \ge -\log_2 \varepsilon$$

Pongo $N = -\log_2 \varepsilon$, per $n \ge N$ si ha che $|x_n - l| \le \varepsilon$

- Altra succ. che ha limite è una succ. ott. dalla succ. DI FIBONACCI

$x_0 = 1$

$x_1 = 1$

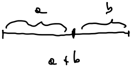
$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$

Cons. la succ. $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n}$

Si può dimostrare $\lim_{n \to \infty} y_n = \Phi$ SEZIONE AUREA

Φ è scoperto antichi Greci

α $\Phi = \frac{a}{b}$, dove $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$



$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ $/ \cdot \Phi$

$\frac{a}{b} = \Phi$ $\qquad \Phi^2 = \Phi + 1$

$$\boxed{\Phi^2 - \Phi - 1 = 0}$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

${}_1\Phi_2 = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$: cons. $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,61 \ldots$

* * *

Def: Diremo che una succ. x_n tende all'∞ oppure che è DIVERGENTE se

$-\infty$ DIVERGENTE NEGATIVAMENTE

cioè: per ogni $M > 0$: $x_n \geq M$

" i valori di x_n diventano arbitrariamente grandi (positivi) per indici n sufficientemente

NEGATIVI

esiste N tale che per ogni $n \geq N$

grandi "

per ogni $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, esiste N tale che

per ogni $n \geq N$ si ha $x_n \geq M$

$\boxed{x_n \leq -M}$

Scriveremo: $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, ovvero $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$

DIVERG. DIVERG. NEGAT.

Es.: • prog. aritmetica

$$x_n = x_0 + n \cdot d$$

$d > 0$ tende a $+\infty$

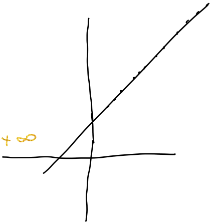
es: $d = 3$

$x_1 = x_0 + 3$

$x_2 = x_0 + 6$

$x_3 = x_0 + 9$

$x_4 = x_0 + 12$



$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, $\boxed{d = 3}$

verifica: cons. $M > 0$ arbitrario; mi chiedo quando vale $x_n \geq M$

$x_n = x_0 + 3n$: $x_0 + 3n \geq M$

$3n \geq M - x_0$

$$\boxed{n \geq \frac{1}{3}(M - x_0)}$$

Cioè: $N = \frac{1}{3}(M - x_0)$, per ogni $n \geq N$ si ha $x_n \geq M$.

è succ. DIVERG. a $+\infty$

invece $d < 0$

$d = -5$ $\quad x_1 = x_0 - 5$

$x_2 = x_0 - 10$

$x_3 = x_0 - 15$

$x_4 = x_0 - 20$

ESERCIZIO : verificare che per $d<0$, la succ. è DIVERG. NEGAT.

Infine: progress. geo.: $x_n = \boxed{\varrho^n} \cdot x_0$, $\varrho > 0$

se $\varrho > 1$: è DIVERGENTE

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$$

OSS.: Può succedere che una succ. NON ABBIA LIMITE

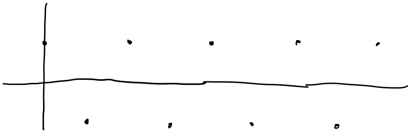
ad es. $x_n = (-1)^n$

$x_0 = 1$

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$



* * *

LIMITI DI FUNZIONI

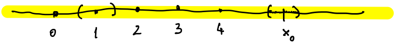
Idea: succ. $x_n = f(n)$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Se ora cons.

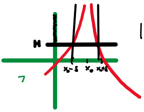
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(opp. $f : I \to \mathbb{R}$
I intervallo)

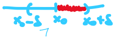


posso cons. il comport. dei valori $f(x)$ per $x \to +\infty$, e anche $x \to -\infty$ e anche $x \to x_0$

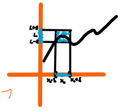
cioè guardo un intervallo centrato in x_0 e analizzo $f(x)$ per x in tale intervallo



$\frac{1}{|(x-x_0)|}$ opp. $\frac{1}{(x-x_0)^2}$



	$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ $f(x) \to L$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$
$x \to x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $x \neq x_0$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M < 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $\Rightarrow f(x) < M$
$x \to x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 < x < x_0 + \delta$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 < x < x_0 + \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M < 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 < x < x_0 + \delta$ $\Rightarrow f(x) < M$
$x \to x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - \delta < x < x_0$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - \delta < x < x_0$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M < 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - \delta < x < x_0$ $\Rightarrow f(x) < M$
$x \to +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M < 0, \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ $\Rightarrow f(x) < M$
$x \to -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$	$\forall M > 0, \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M < 0, \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ $\Rightarrow f(x) < M$



$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\boxed{\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon}$$

e $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

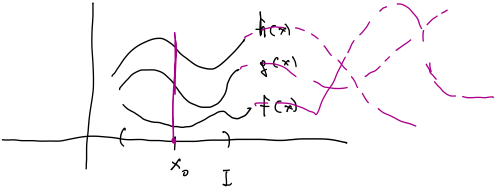
$$\Longleftrightarrow \boxed{\lvert x - x_0 \rvert < \delta}$$

Teorema del CONFRONTO
(o dei 2 CARABINIERI)

Supp. di avere 3 funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, definite in un intorno I di $x_0 \in \mathbb{R}$

Supp. che per ogni x di I valga:

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$



Supp. inoltre che esistano e siano finiti i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0} h(x)$$

$\Rightarrow$ allora esiste il $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ed è uguale a ℓ.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$

Analog.: $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} f(x) = \ell = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} h(x)$

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} g(x) = \ell$$

Varianti: $f(x) \le g(x)$ su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

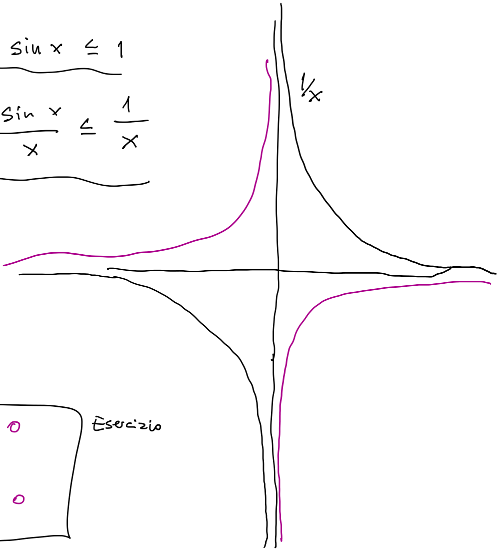
e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

Esempio: $\displaystyle\lim_{\underbrace{x \to +\infty}} \frac{\sin x}{x}$, cons. $x > 0$

$$\underbrace{-1 \le \sin x \le 1}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}}$$



$x \to +\infty$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \end{aligned}}$$ Esercizio

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Esercizio : $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

LIMITI NOTEVOLI:

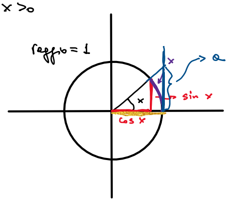
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Idea di costruzione:

$\sin x$ è funz. dispari

$\frac{\sin x}{x}$ è PARI $\qquad \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$

Posso supp. $x \to 0^+$
$x > 0$



2 triangoli simili

$\Longrightarrow$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{a}{1} = a = \operatorname{tg} x$

$\underbrace{x > 0}_{\sin x > 0}$ $\qquad \sin x \le x \le \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad / : \sin x$

$\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x \cdot \cancel{\sin x}}$

$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$

prendendo i reciproci: $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\cos x} \le \frac{\sin x}{x} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1}$

in un intorno destro di 0

Siccome $\frac{\sin x}{x}$ e $\cos x$ sono FUNZ. PARI, vale anche in intorno sinistro

$\Longrightarrow$
Teo. Carabinieri $\qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

FATTO : Se ho $g(x)$

t.c. $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} \frac{\sin g(x)}{g(x)} = 1$$

Esempio: $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin 4x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\downarrow \atop 1}\cdot\underbrace{\frac{4x}{\sin 4x}}_{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^{-1} \atop {\downarrow \atop 1}}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}}_{\downarrow \atop \frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$$

$\sin 4x \neq \sin x + \sin 3x$

$\sin(x+3x) = \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x$