



Scalare-vettore-tensore

Una grandezza descritta da un solo numero è detta **scalare**, come ad esempio la temperatura.

Una quantità descritta da tre numeri, intensità (grandezza), direzione, è detta **vettore**, come la velocità $\underline{v} = [V_x, V_y, V_z]$

Una quantità descritta da più numeri, cioè da 3 direzioni e 3 intensità, è chiamata tensore, come le deformazioni in un mezzo continuo.

$$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Tensore di deformazione



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Una quantità scalare, vettoriale e tensoriale può essere costante o dipendere da una variabile (scalare, vettoriale, tensoriale). Quando dipende da una variabile, la quantità è chiamata **campo** (scalare, vettoriale, tensoriale).

Se il sistema di coordinate cambia, lo scalare è lo stesso, mentre il vettore e il tensore devono essere ricalcolati.

Definiamo quindi una quantità le cui proprietà “fisiche” sono indipendenti dal sistema di coordinate (cioè l'intensità e la direzione del vettore).



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

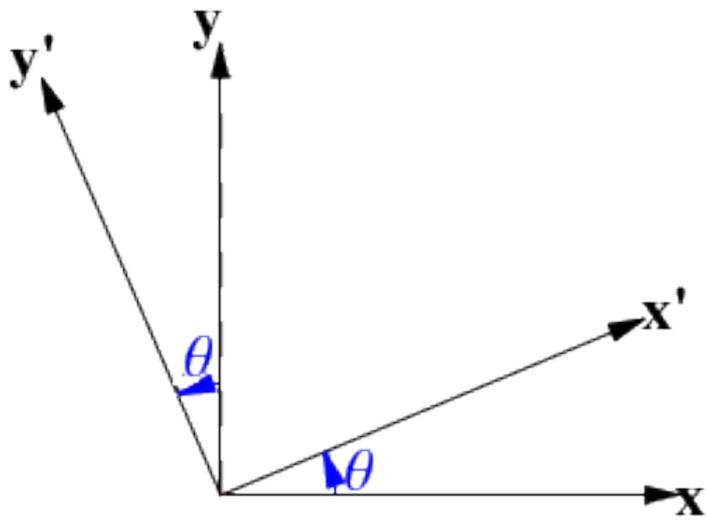
I tensori sono semplicemente oggetti matematici che possono essere utilizzati per descrivere proprietà fisiche, proprio come gli scalari e i vettori. In realtà i tensori non sono altro che una generalizzazione di scalari e vettori; uno scalare è un tensore di rango zero, mentre un vettore è un tensore di primo rango.

Il **rango (o ordine)** di un tensore è definito dal numero di direzioni (e quindi dalla dimensionalità della matrice) necessarie per descriverlo. Ad esempio, le proprietà che richiedono una direzione (**primo rango**) possono essere descritte completamente da un vettore colonna 3×1 , mentre le proprietà che richiedono due direzioni (**tensori di secondo rango**), possono essere descritte da **9 numeri, come una matrice 3×3** . In generale, un tensore di rango n può essere descritto da 3^n coefficienti.

La necessità di disporre di tensori di secondo rango si presenta quando dobbiamo considerare più di una direzione per descrivere una di queste proprietà fisiche.



TRASFORMAZIONI COORDINATE 2-D



$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

e

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

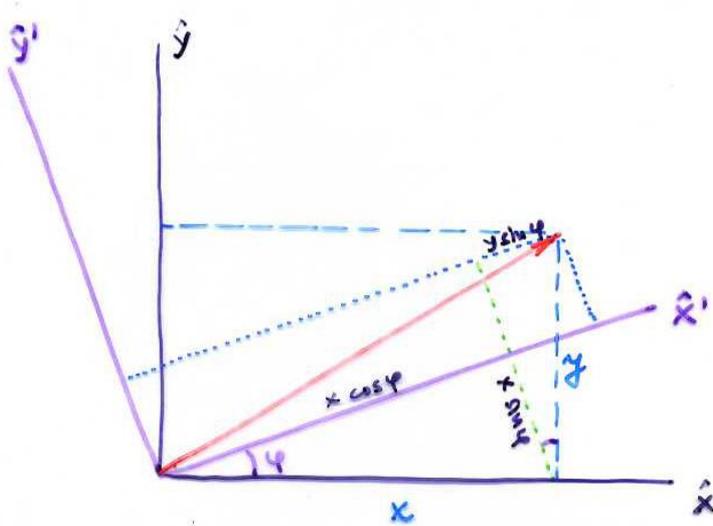
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

TRASFORMAZIONI COORDINATE 2-D



$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \cos \theta_{ij} = \cos[x'_i, x_j]$$

$$x'_i = a_{ij} x_j$$

$$a_{11} = \cos[x'_1, x_1] = \cos \varphi$$

$$a_{12} = \cos[x'_1, x_2] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi$$

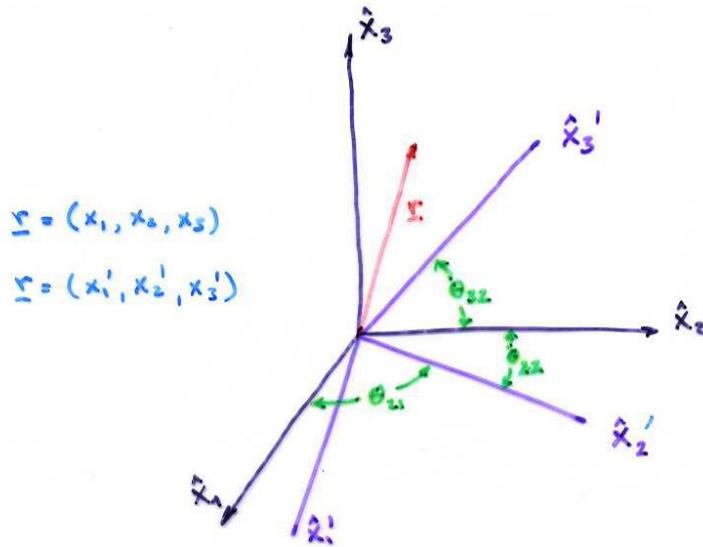
$$a_{21} = \cos[x'_2, x_1] = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin \varphi$$

$$a_{22} = \cos[x'_2, x_2] = \cos \varphi$$

NB: somma implicita su indici ripetuti!



TRASFORMAZIONI COORDINATE 3-D



$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

$$x_i' = a_{ij}x_j$$

$$a_{ij} = \cos \theta_{ij} = \cos[x_i', x_j]$$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

$$x_j = a_{ij}x_i'$$

NB:

$$\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\underline{x}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^T \underline{x}'$$

$$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

TENSORE

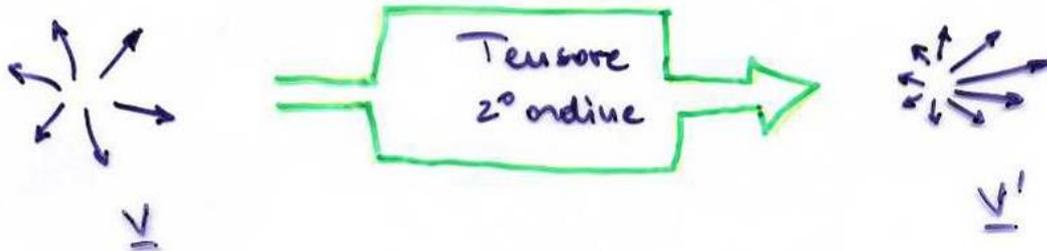
Il tensore di r^{th} mette in relazione due tensori di rango m e n ($m+n=r$)

$$T_m \leftarrow T_{r=m+n} \rightarrow T_n$$

Esempio: un vettore è la trasformazione di un punto in un altro punto.



Un tensore di secondo grado trasforma un vettore (campo vettoriale) in un altro (campo vettoriale).

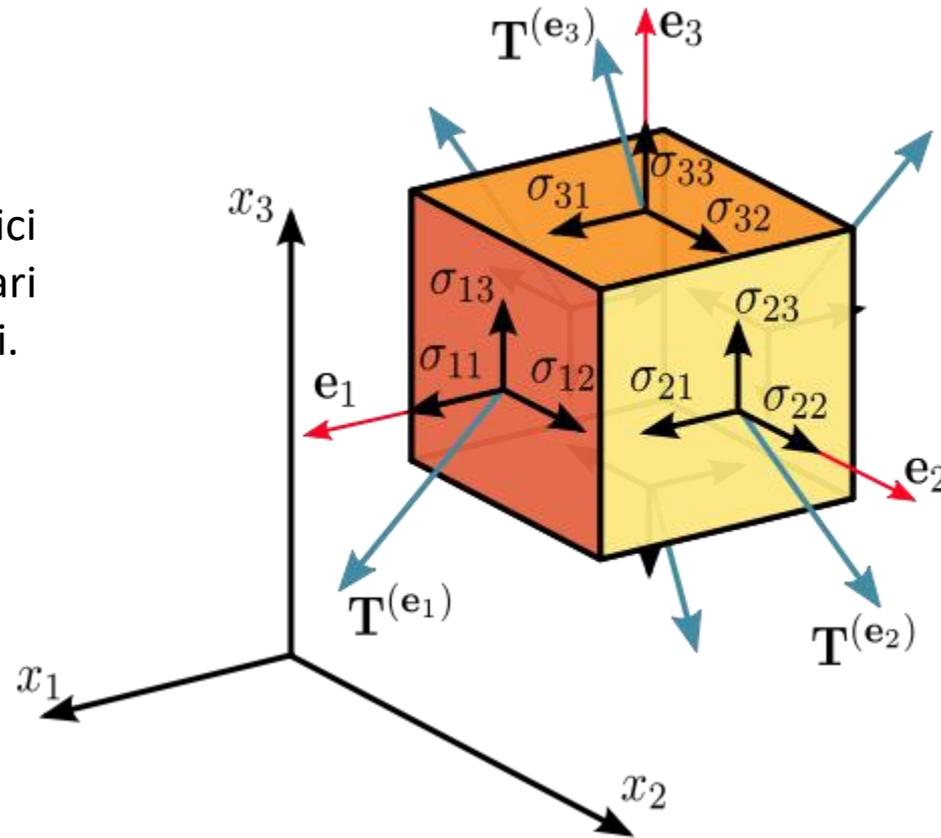




Fisica Terrestre 2024-2025

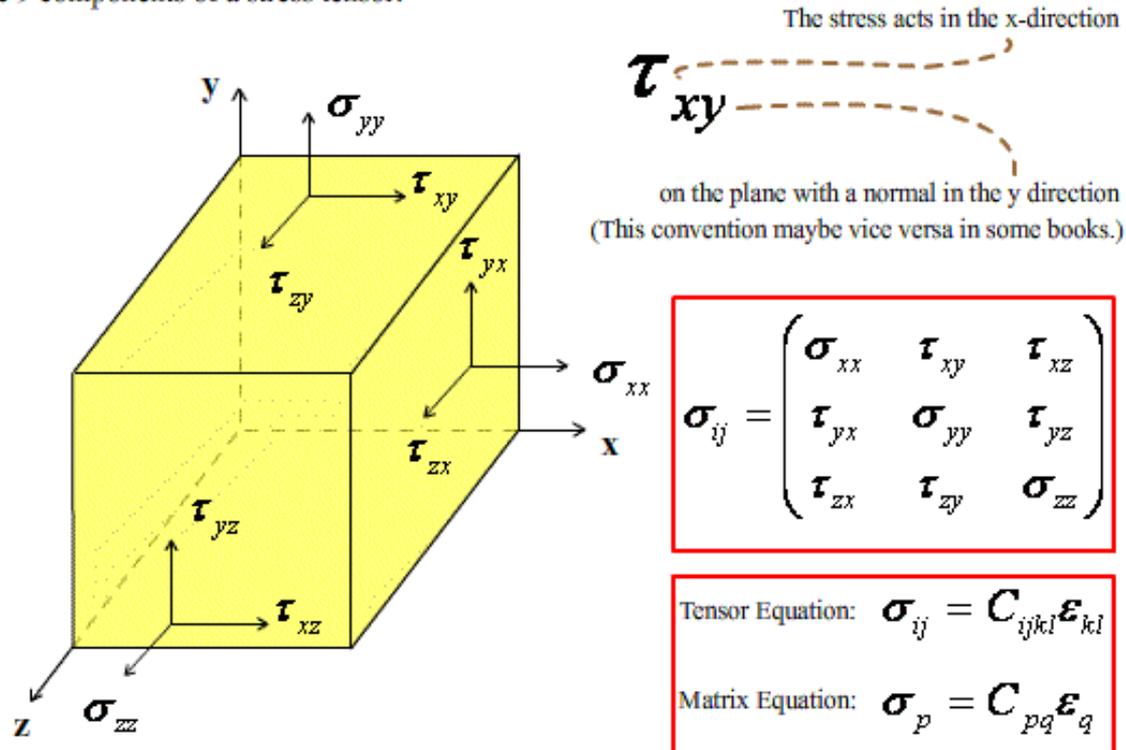
Giovanni Costa

I tensori sono oggetti geometrici che descrivono relazioni lineari tra vettori, scalari e altri tensori.



Stress tensor

The 9 components of a stress tensor:





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

In quasi tutti i casi, i tensori di secondo rango sono:

Simmetrici

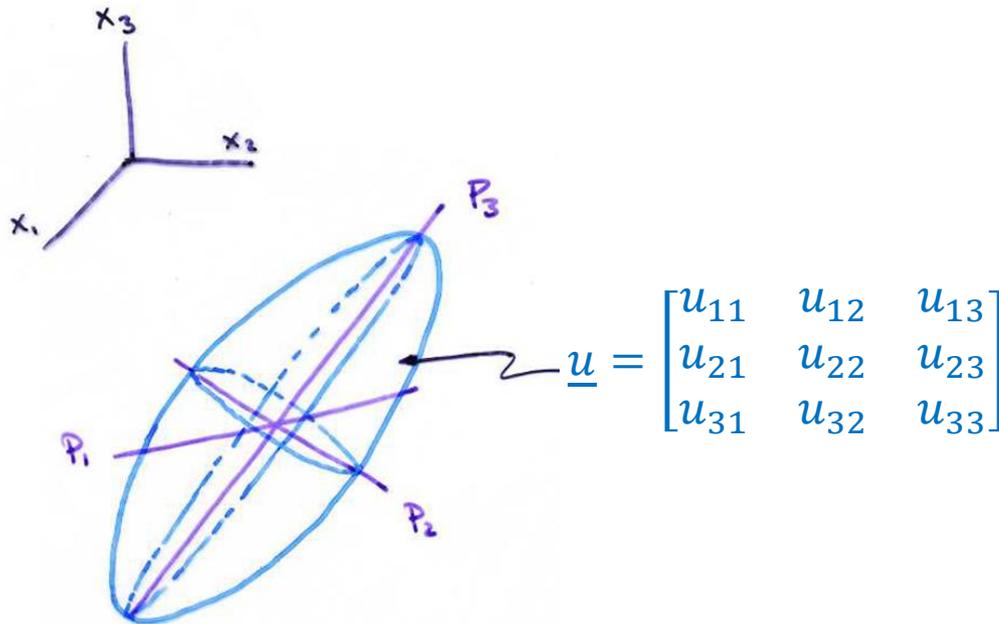
$$u_{ij} = u_{ji} \longrightarrow$$

6 componenti indipendenti

hanno autovalori positivi.

$$\lambda_i > 0$$

Questi tensori possono essere rappresentati da superfici ellissoidali



The intersection of the main axes, P1, P2, P3, correspond to

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$$

where λ_1 , λ_2 , λ_3 are the eigenvalues (major, intermediate, minor).

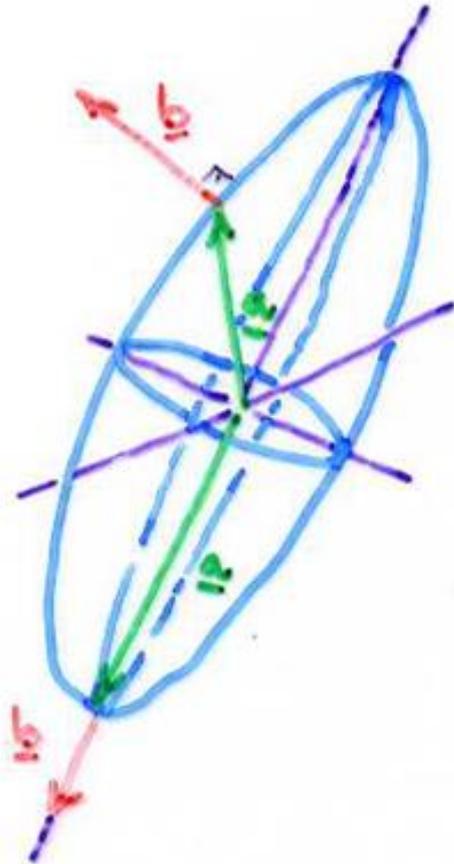


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Un tensore che agisce su un vettore lo trasforma in un altro vettore. La direzione \underline{b} è perpendicolare all'intersezione \underline{a} con l'ellissoide u .

Se \underline{a} è parallelo a uno dei tre assi principali, allora $\underline{b} \parallel \underline{a}$.



$$u_{ij} a_j = b_i$$



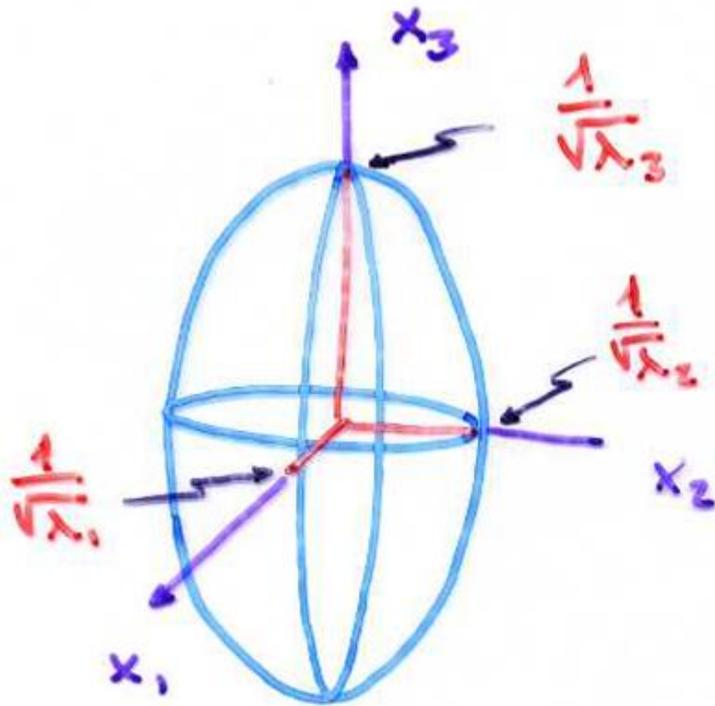
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

La superficie dell'ellissoide di rappresentazione orientata lungo gli assi principali è:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$



$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

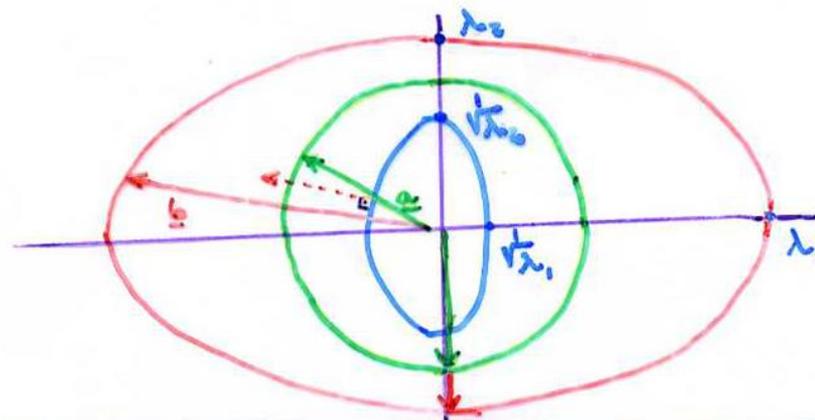
Giovanni Costa

La lunghezza dell'asse maggiore, di quello intermedio e di quello minore è

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

L'ellissoide dell'intensità dà l'intensità del vettore **b** che è (da **ua**)

$$\frac{x_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{x_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{x_3^2}{\lambda_3^2} = 1$$





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

CONTENUTI:

- **Definizione di stress**
- **Sollecitazioni in due dimensioni**
- **Sollecitazioni in tre dimensioni**
- **Traslazioni e rotazioni**
- **Sollecitazioni deviatoriche**
- **Cerchio di Mohr**



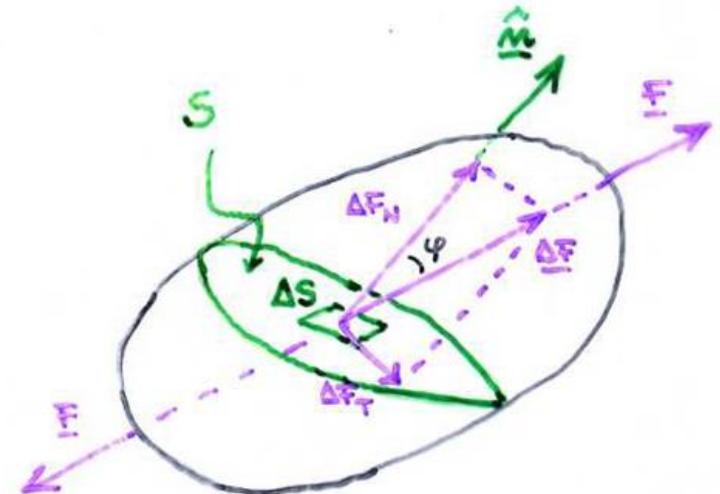
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Quando su un corpo solido agiscono forze esterne (ad esempio, pressione, trazione), il corpo si deforma cambiando forma e/o volume. Il corpo che ritorna alle condizioni iniziali quando le forze esterne cessano, è detto **corpo elastico**. Per piccole deformazioni e su piccola scala temporale (minuti, non milioni di anni), le rocce possono essere considerate elastiche. La teoria dell'elasticità mette in relazione le forze applicate alla superficie esterna di un corpo con le sue variazioni di forma e volume. Questa relazione è espressa in termini di sforzi e deformazioni.

Gli **sforzi** sono forze per unità di superficie trasmesse attraverso un materiale da campi di forza interatomici. Le sollecitazioni trasmesse perpendicolarmente a una superficie sono gli **sforzi normali**; quelle trasmesse parallelamente a una superficie sono gli **sforzi di taglio**. Il valore medio delle sollecitazioni normali è la pressione. Consideriamo un corpo soggetto a una forza di trazione F e ΔS un elemento di superficie di una generica sezione S del corpo la cui normale \vec{n} forma un angolo ϕ con \underline{F} . Se chiamiamo $\underline{\Delta F}$ la forza che agisce su ΔS , lo stress è:

$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\underline{\Delta F}}{\Delta S} = \frac{d\underline{F}}{dS} = \underline{\sigma}(\vec{n})$$



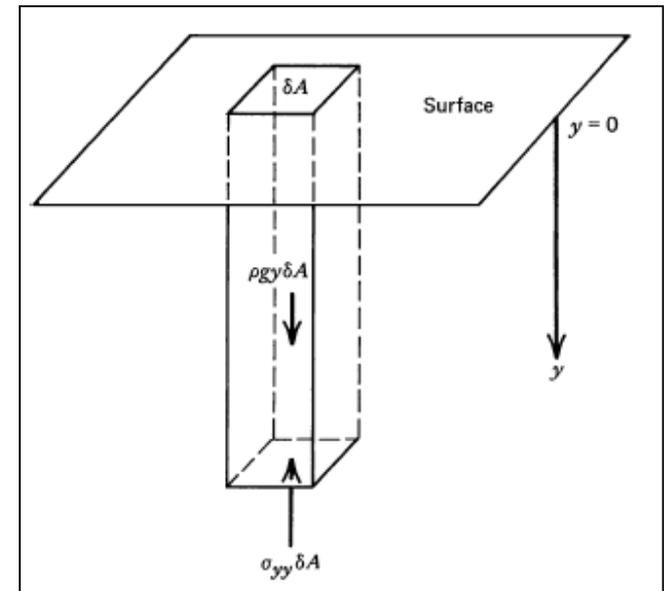
Le unità nel sistema SI sono Pascal: $1\text{Pa}=1\text{Nm}^{-2}$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- Consideriamo la forza che deve agire alla base della colonna di roccia a una profondità y sotto la superficie per sostenere il peso della colonna: il peso della colonna di area trasversale δA , è $\rho g y \delta A$.
- Questo peso deve essere bilanciato da una forza superficiale verso l'alto $\sigma_{yy} \delta A$ distribuita sulla superficie orizzontale di area δA alla profondità y .
- Si ipotizza che sulle superfici laterali della colonna non agiscano forze verticali e che la densità ρ è costante:
- σ_{yy} è quindi la forza superficiale per unità di area che agisce perpendicolarmente a una superficie orizzontale, cioè, uno **sforzo**



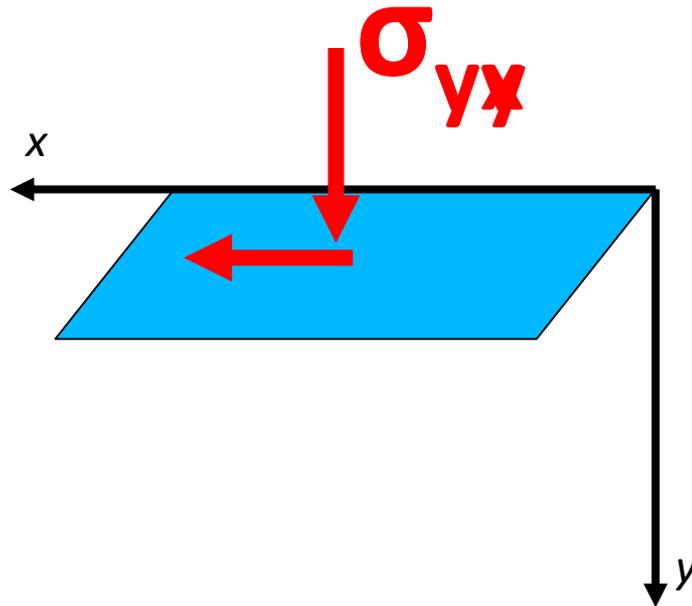
Poiché le forze sulla colonna di roccia devono essere uguali se la colonna è in equilibrio, troviamo:

$$\sigma_{yy} = \rho g y \quad [\text{Eq 1}]$$

La forza normale per unità di superficie sui piani orizzontali aumenta linearmente con la profondità. Lo sforzo normale dovuto al peso della roccia sovrastante o dello strato di copertura è noto come **sforzo o pressione litostatica**.



Il secondo pedice su σ indica la direzione della forza e il primo pedice indica la direzione della normale alla superficie su cui agisce la forza.

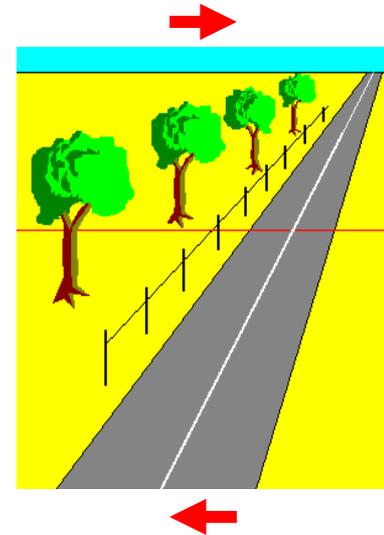
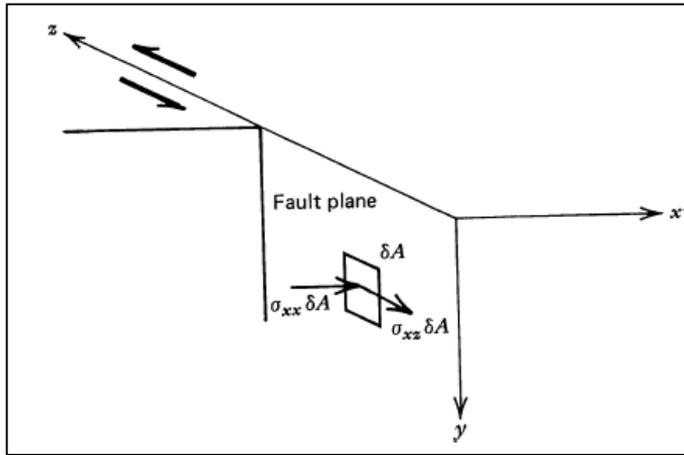




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

- Le forze superficiali possono agire sia parallelamente che perpendicolarmente a una superficie. Un esempio è dato dalle forze che agiscono sull'elemento di superficie δA che giace nel piano di una faglia a scorrimento verticale (strike-slip):



- La forza normale di compressione $\sigma_{xx} \delta A$ che agisce sul fronte di faglia è la conseguenza del peso dello strato di copertura e delle forze tettoniche che tendono a comprimere i due lati della faglia. La forza tangenziale o di taglio sull'elemento $\sigma_{xz} \delta A$ si oppone alle forze tettoniche che guidano il movimento laterale sinistro sulla faglia.

- Questa forza di taglio è il risultato della resistenza di attrito al movimento sulla faglia. La quantità σ_{xz} è la forza superficiale tangenziale per unità di area o lo sforzo di taglio: il primo pedice si riferisce alla direzione normale all'elemento superficiale e il secondo pedice alla direzione della forza di taglio.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Convenzione sui segni

Lo **sforzo tensivo** (diretto verso l'esterno del corpo) è positivo.

Lo **sforzo di compressione** (diretto verso l'interno del corpo) è negativo.

La componente lungo la direzione positiva di un asse è positiva.

La componente lungo la direzione negativa di un asse è negativa.

Il segno della sollecitazione è il prodotto di questi segni (sopra).

Esempio: la componente di uno sforzo di compressione diretta lungo l'asse negativo è positiva:

$$(-) \times (-) = (+)$$

Lo **sforzo orizzontale** di trazione è una forza per unità di superficie che agisce su piani verticali e tende a tirare su tali piani. Uno **sforzo di compressione** è una forza normale per unità di superficie che tende a spingere su un piano. Consideriamo le sollecitazioni di compressione positive e gli sforzi di trazione negativi, una convenzione generalmente adottata nella letteratura geologica. Questa convenzione è opposta alla convenzione di segno utilizzata nella maggior parte dei libri di testo sull'elasticità, secondo la quale una sollecitazione positiva è una sollecitazione di trazione.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

$$\frac{1N}{m^2} = 1Pa$$

$$1bar = 10^6 \frac{dyne}{cm^2} = 10^5 Pa$$

$$10bar = 1MPa$$

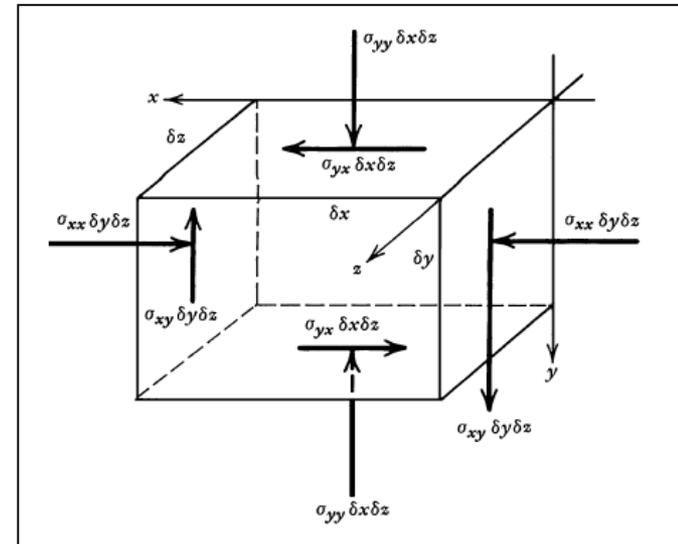
$$\approx 1atm = 760mmHg \approx 101325Pa$$



Sforzi in due direzioni

In questa sezione considereremo uno stato di sforzo bidimensionale; lo stato è bidimensionale nel senso che non ci sono forze superficiali in direzione z e nessuna delle forze superficiali indicate varia in direzione z . Le tensioni normali sono σ_{xx} e σ_{yy} , e le sollecitazioni di taglio sono σ_{xy} e σ_{yx} . La notazione adottata nell'etichettatura delle componenti di sollecitazione consente di identificare immediatamente le forze superficiali associate. Il secondo pedice su σ indica la direzione della forza e il primo pedice indica la direzione della normale alla superficie su cui agisce la forza.

Gli sforzi tangenziali o di taglio σ_{xy} e σ_{yx} hanno forze superficiali associate che tendono a far ruotare l'elemento in Figura intorno all'asse z . Il momento esercitato dalla forza superficiale $\sigma_{xy}\delta y\delta z$ è il prodotto della forza e del momento del braccio δx ; cioè, è $\sigma_{xy}\delta x\delta y\delta z$. Questa coppia è contrastata dal momento $\sigma_{yx}\delta x\delta y\delta z$ esercitata dalla forza superficiale $\sigma_{yx}\delta x\delta z$ con braccio δy .





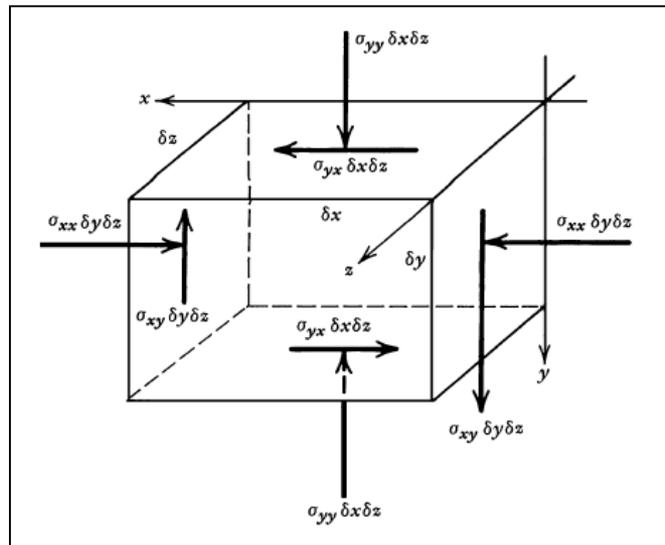
Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Poiché l'elemento non può ruotare se si trova in **equilibrio**:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad [Eq. 6]$$

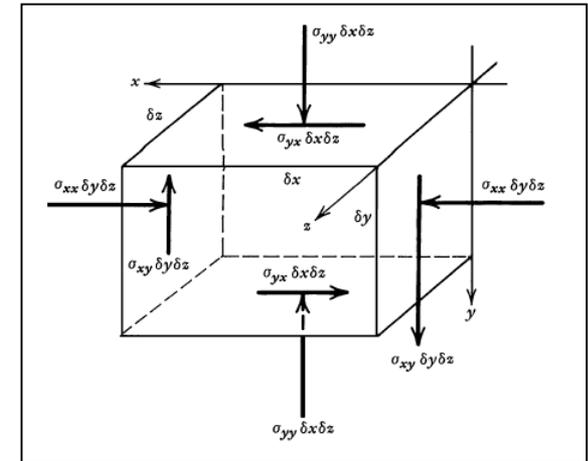
Le sollecitazioni di taglio sono quindi **simmetriche**, in quanto il loro valore è indipendente dall'ordine dei pedici. Tre componenti indipendenti della sollecitazione σ_{xx} , σ_{yy} , and σ_{xy} deve essere specificato per prescrivere lo stato bidimensionale degli sforzi.





Stress in three dimensions

Le componenti di sollecitazione possono essere definite in qualsiasi punto di un materiale. Per illustrare questo punto, è opportuno considerare un piccolo elemento rettangolare con dimensioni δx , δy , e δz definito in base a un sistema cartesiano x , y , z sistema di coordinate, come illustrato nella Figura:

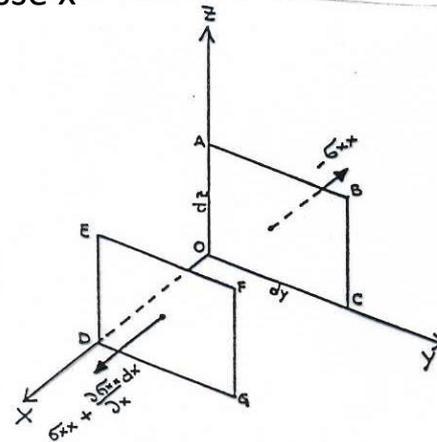


Affinché il parallelepipedo sia in equilibrio statico (non in movimento), è necessario che siano nulle le risultanti delle forze interne ed esterne che agiscono su di esso e anche la risultante dei momenti. Sia la sollecitazione normale che quella di taglio sono funzione delle coordinate del punto a cui si riferiscono; per cui dobbiamo considerare le variazioni di sollecitazione che sono espresse da differenziali parziali degli sforzi .



Traslazione:

Si considerano le forze interne che agiscono sull'asse x. Il contributo delle sollecitazioni normali è quello relativo alle due facce perpendicolari all'asse x



Sulla faccia DEFG lo sforzo è σ_{xx} più il suo incremento lungo l'asse x. Quindi la forza che agisce sul DEFG è:

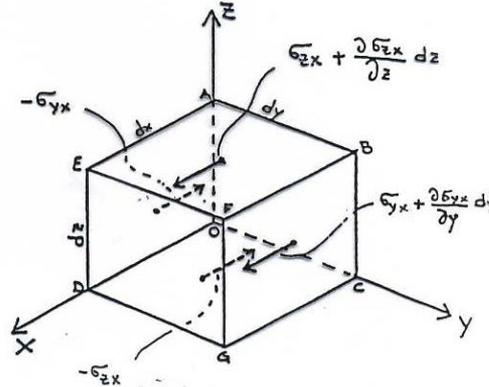
$$forza = (\text{sforzo} \times \text{superficie}) = \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right] dydz$$

Invece la forza sulla faccia ABCO è (il segno negativo è dovuto alla direzione negativa lungo l'asse x):

$$- \sigma_{xx} \cdot dydz$$

La somma delle forze dovute alle sollecitazioni normali è:

$$- \sigma_{xx} dydz + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dydz$$



Il contributo dovuto alle sollecitazioni di taglio è relativo alle due coppie di facce parallele all'asse x. Per le facce perpendicolari all'asse y:

$$-\sigma_{yx} dx dz + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

Invece per i lati perpedicolari all'asse z:

$$-\sigma_{zx} dx dy + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

La risultante delle forze che agiscono lungo l'asse x è:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Lo stesso vale per gli assi y e z: $\left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz$ $\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)dxdydz$

Le forze esterne che agiscono sul parallelepipedo sono dovute alla gravità, con accelerazione g. Se la densità del parallelepipedo è ρ, la forza di gravità che agisce lungo l'asse x è:

$$\rho dVg_x = \rho dxdydzg_x$$

Le condizioni di equilibrio per evitare le traslazioni possono essere espresse come:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z} + \rho g_x = 0 \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z} + \rho g_y = 0 \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z = 0$$

Queste equazioni possono essere facilmente espresse in forma tensoriale o vettoriale come:

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g} = 0$$



Rotazione:

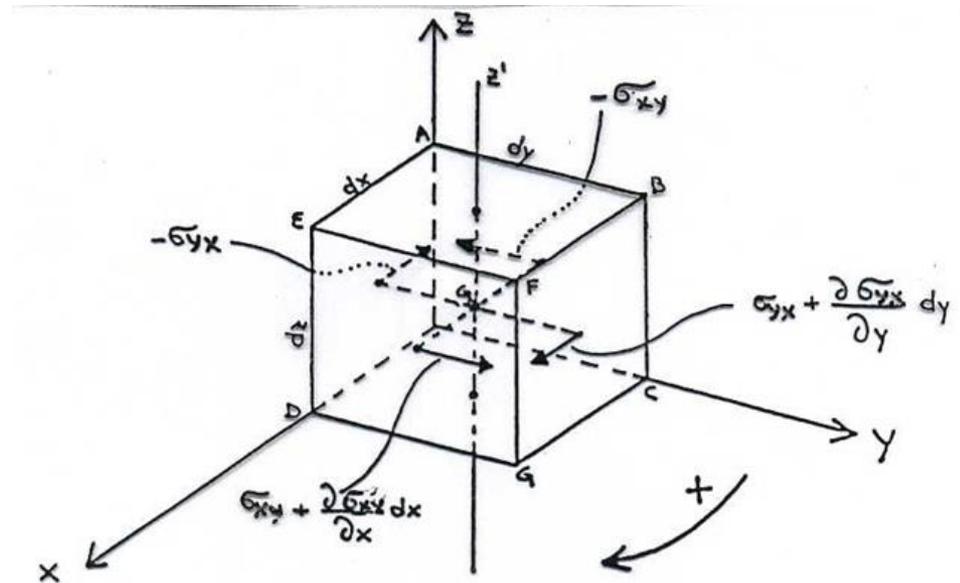
Consideriamo le componenti delle rotazioni attorno ad assi passanti per il baricentro del parallelepipedo e paralleli agli assi x , y , z . Per un asse parallelo a z , le sollecitazioni che causano le rotazioni sono quelle che agiscono lungo x e y .

Considerando positivi i momenti che causano una rotazione in senso orario, il momento relativo alle sollecitazioni di taglio parallele all'asse x è (momento = sforzo x superficie x braccio):

$$\left(-\sigma_{yx}\right) dx dz \left(-\frac{dy}{2}\right) + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz \left(\frac{dy}{2}\right)$$

Lo stesso dicasi per le sollecitazioni parallele all'asse y :

$$-\left\{\left(-\sigma_{xy}\right) dy dz \left(-\frac{dx}{2}\right) + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx\right) dy dz \left(\frac{dx}{2}\right)\right\}$$





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Per non avere rotazioni, la somma dei momenti deve essere nulla. Ignorando i termini del quarto ordine(dx^2dydz), otteniamo:

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})dxdydz = 0$$

da cui abbiamo:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Gli stessi risultati si ottengono per gli altri assi, per cui si ha:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Il tensore delle sollecitazioni è un tensore simmetrico e ha solo sei componenti indipendenti.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Sforzo deviatorico

Nelle profondità della Terra c'è un grande sforzo di compressione dovuto al carico gravitazionale delle rocce sovrastanti. A volte è opportuno eliminare l'effetto del carico e considerare solo lo sforzo residuo che chiamiamo “deviatorico”. Definiamo lo sforzo medio

$$M = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = \sigma_{ii}/3$$

come terza parte della somma degli sforzi normali, cioè la traccia del tensore degli sforzi che è invariante. Quindi anche la sollecitazione media è uguale alla traccia del tensore diagonalizzato diviso tre:

$$M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

La sollecitazione deviatorica è definita eliminando l'effetto della sollecitazione media:

$$D_{ij} = \sigma_{ij} - M\delta_{ij}$$
$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - M \end{pmatrix}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Il tensore di stress deviatorico è il risultato della forza tettonica e della fagliazione e talvolta produce anisotropia nella propagazione delle onde sismiche. Per profondità superiori a qualche km, si assume spesso che esista uno stato di stress litostatico, per il quale gli stress normali sono pari alla pressione dovuta al carico gravitazionale delle rocce sovrastanti con segno meno, e gli stress deviatorici sono pari a zero.

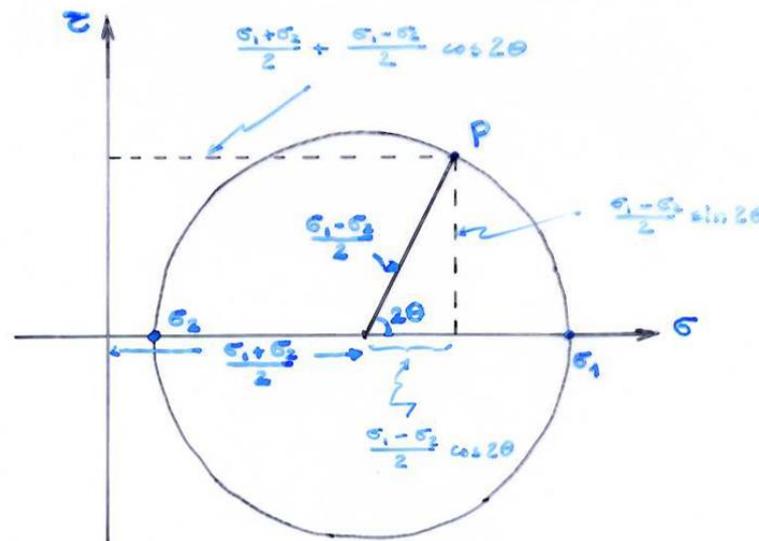
Poiché il peso di una colonna di roccia alta z e con densità ρ è uguale a $\rho g z$, la pressione P a una profondità di 3 km sotto una colonna di roccia con densità 3 g/cm^3 è:

$$P = (3 \text{ g/cm}^3) (980 \text{ cm/s}^2) (3 \times 10^5 \text{ cm}) = 9 \times 10^8 \text{ dyn/cm}^2 = 0.9 \text{ kbar}$$

La pressione a 3 km di profondità è di circa 1 kbar o 100Mpa. Poiché esistono le tensioni deviatrici (piccole), la relazione è solo una buona approssimazione.

CIRCOLO DI MOHR

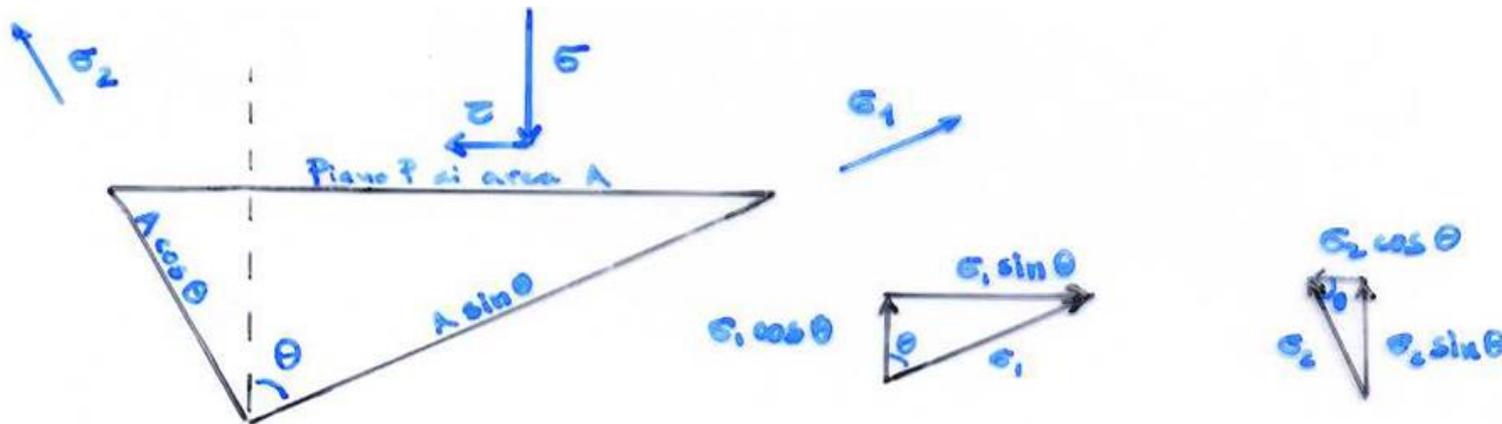
Un mezzo che consente di tracciare due sforzi che agiscono su un piano di orientamento noto come componenti delle sollecitazioni normali e di taglio (derivate separatamente da ciascuna dei due sforzi). Il cerchio di Mohr è una rappresentazione geometrica della trasformazione 2-D dello stato tridimensionale due sforzi e questa rappresentazione grafica è estremamente utile perché consente di visualizzare le relazioni tra gli sforzi normali e di taglio che agiscono su vari piani inclinati in un punto di un corpo sollecitato. Utilizzando il cerchio di Mohr è inoltre possibile calcolare gli sforzi principali, le sollecitazioni massime di taglio e le sollecitazioni sui piani inclinati.





CIRCOLO DI MOHR

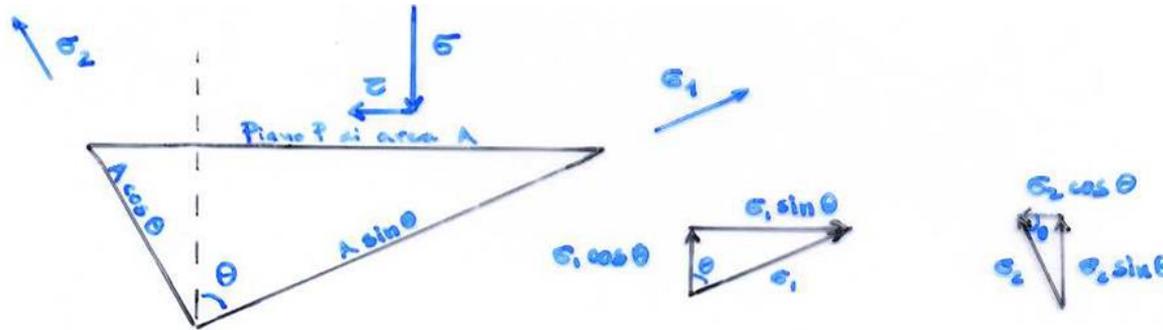
Per ricavare lo sforzo tangenziale e la normale su un piano, si consideri un elemento prismatico con due facce parallele allo sforzo principale σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$) e con la terza faccia P di area A, la cui normale forma un angolo θ con la direzione di σ_1





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa



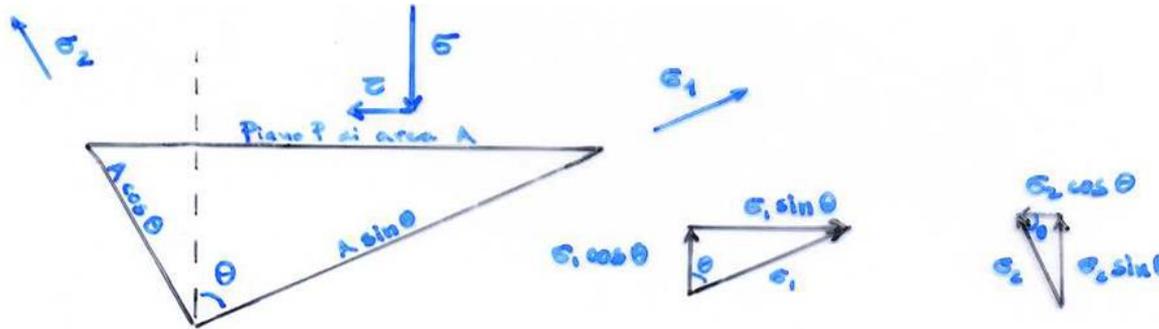
Si consideri l'equilibrio del prisma nelle due direzioni, parallela e perpendicolare, al piano P!
 Per l'equilibrio lungo la direzione parallela:

$$(\sigma_2 \cos \theta) (A \sin \theta) + \tau A = (\sigma_1 \sin \theta) (A \cos \theta)$$

perpendicular surface to σ_2
perpendicular surface to σ_1

Da cui

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta$$



Lo stesso vale per la direzione perpendicolare

$$\sigma A = (\sigma_2 \sin \theta)(A \sin \theta) + (\sigma_1 \cos \theta)(A \cos \theta)$$

Da cui

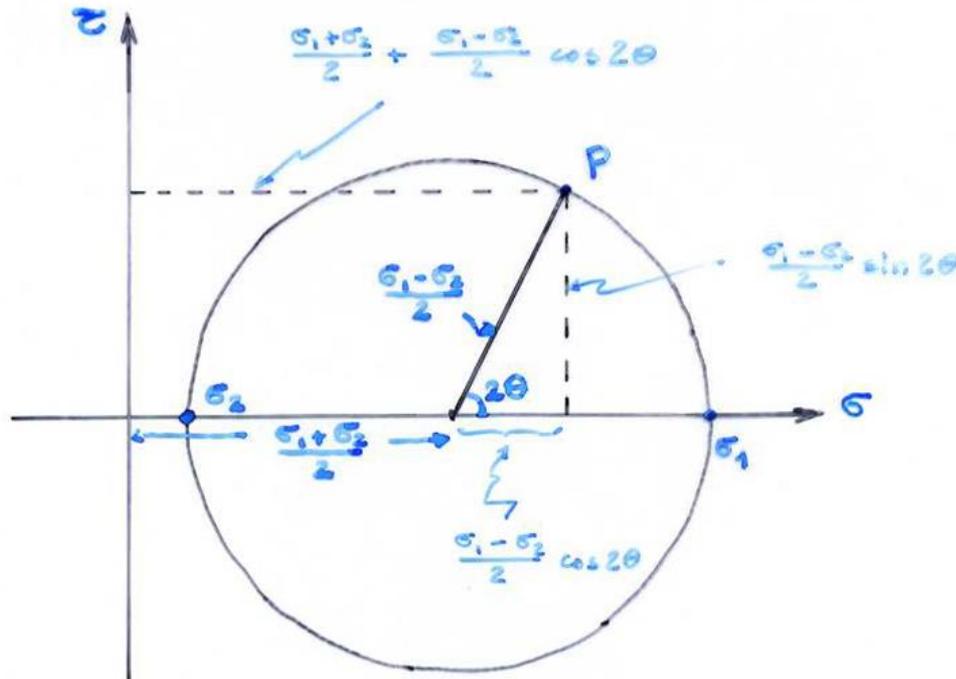
$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma_1 (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sigma_2 (1 - \cos 2\theta) = \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

Da queste equazioni possiamo calcolare le componenti normali σ e di taglio τ su qualsiasi piano, date ϑ , σ_1 e σ_2 . Queste equazioni rappresentano il cerchio di Mohr.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

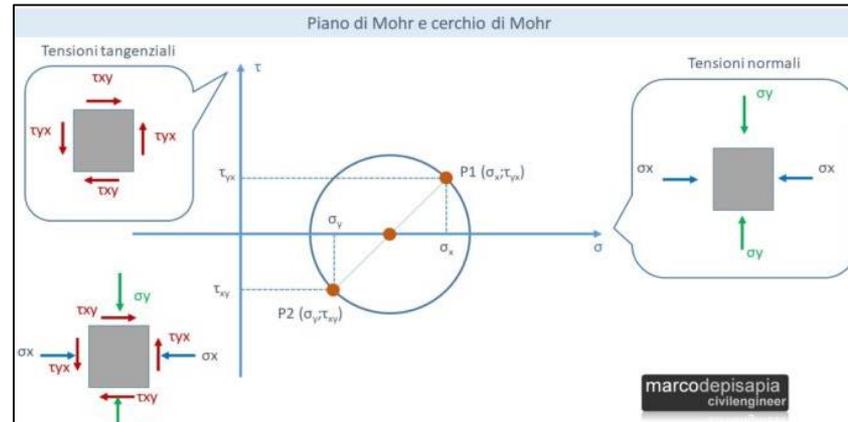
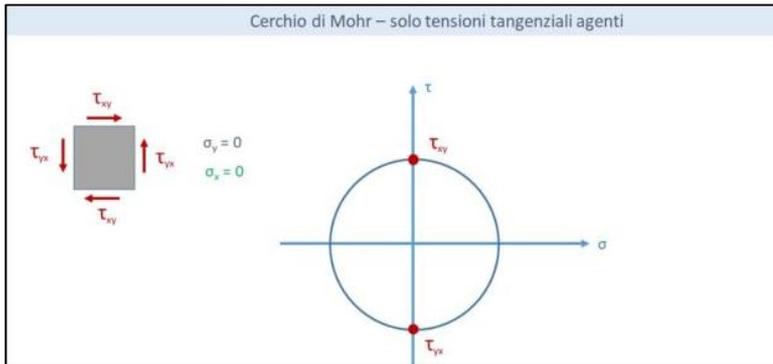
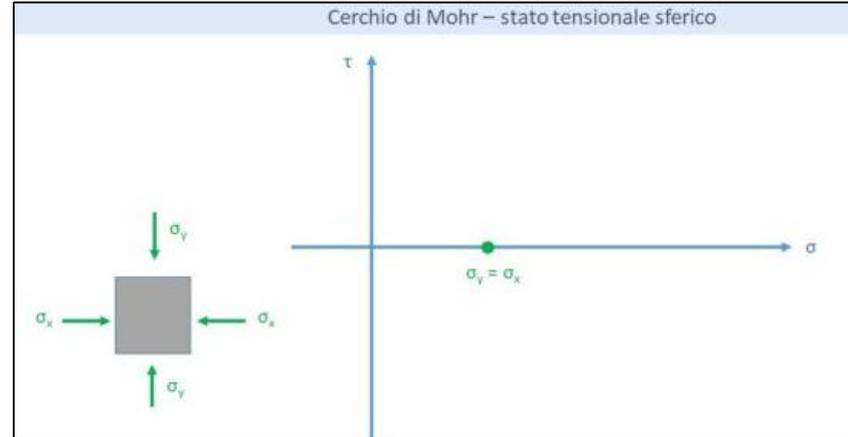
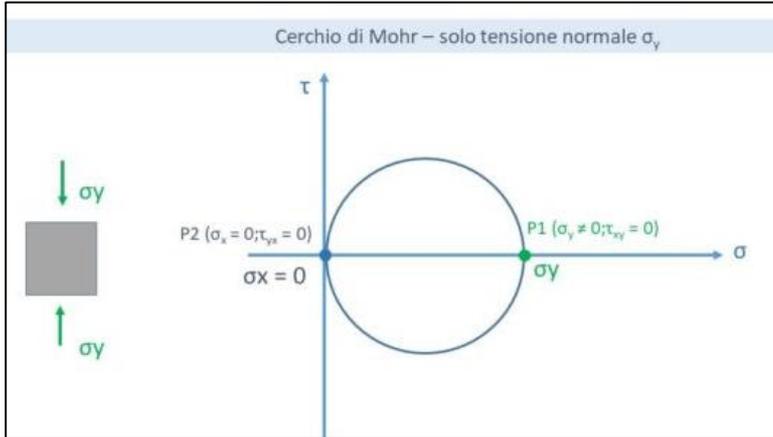


Lo sforzo compressivo è positivo (a destra dell'origine), quella tensionale negativa. Lo sforzo di taglio verso il basso è positivo, gli altri negativi. Gli angoli misurati in senso antiorario rispetto a σ_1 sono positivi.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

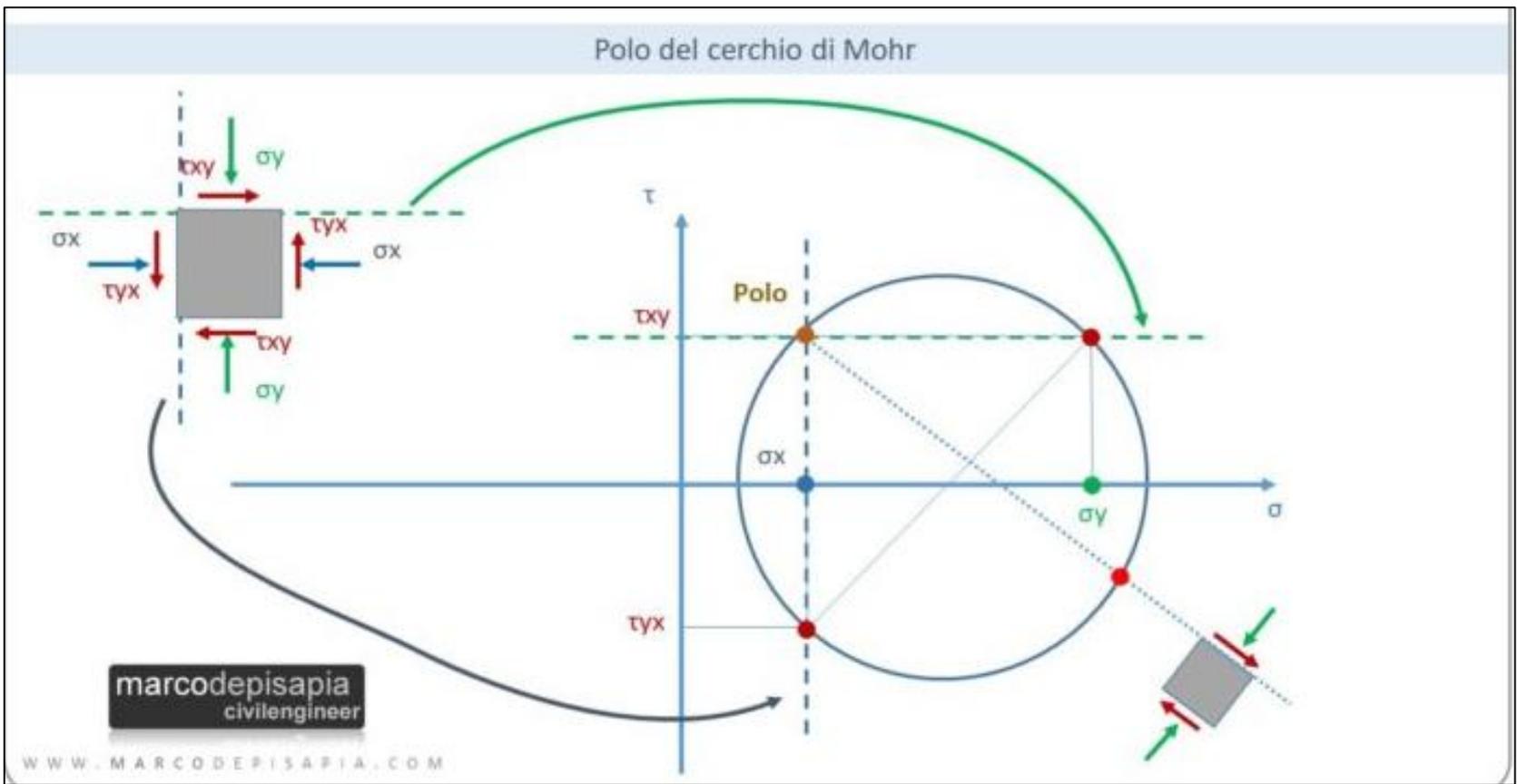


marcodepisapia
civilengineer



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

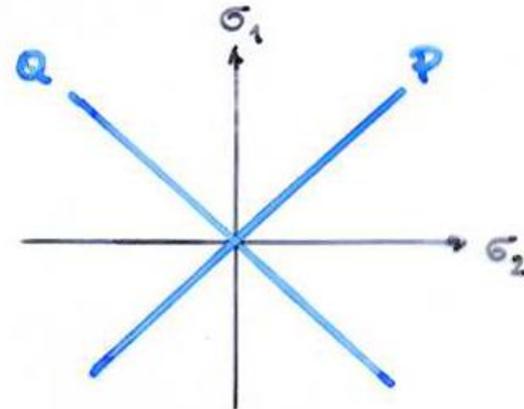
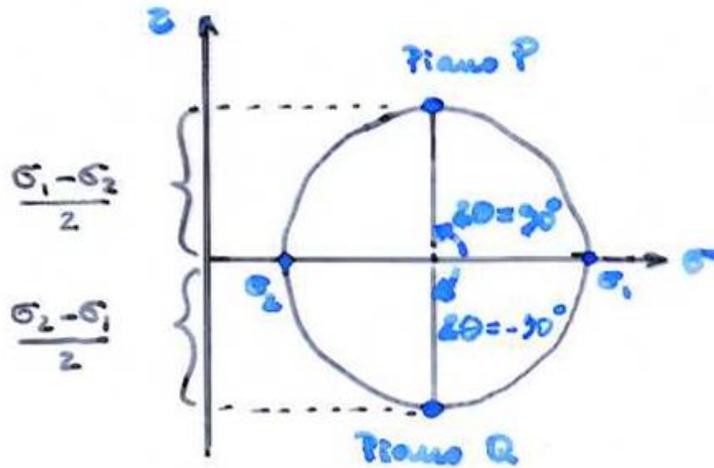




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

The shear stress is the biggest on two perpendicular planes : the first one is at $\vartheta = 45^\circ$ from σ_1 , the second one is at $\vartheta = -45^\circ$ from σ_1 .





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Finora abbiamo considerato una sola sollecitazione di superficie/piano (una delle sollecitazioni principali è nulla), quindi il tensore delle sollecitazioni (assumendo $\sigma_3=0$) è:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{that is} \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Possible bidimensional stress and their representation

TENSIONE IDROSTATICA

TENSIONE GENERALE

TENSIONE UNIASSIALE

SPORTI DI TAGLIO PURO

COMPRESSIONE UNIASSIALE

COMPRESSIONE GENERALE

COMPRESSIONE IDROSTATICA

Non verosimile nella Terra

Posibile vicino alla superficie

Posibile

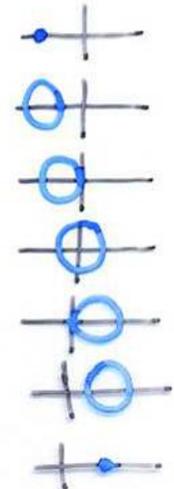
Posibile

Posibile

Comune

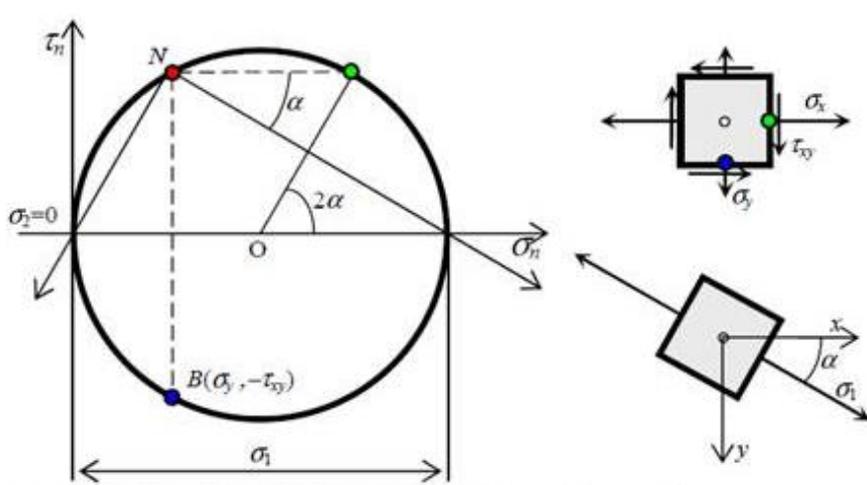
Posibile, specie a grandi prof.

caso speciale
 $\sigma_2 = -\sigma_1$





Esempi cerchio di Mohr



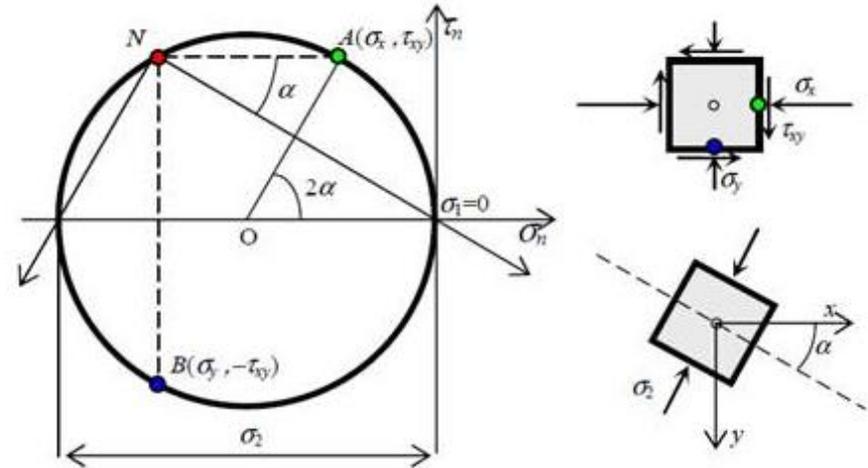
Cerchio di Mohr nel caso di

$$\sigma_1 > 0$$

$$\sigma_2 = 0$$



(tensione monoassiale)



Cerchio di Mohr nel caso di

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_2 < 0$$



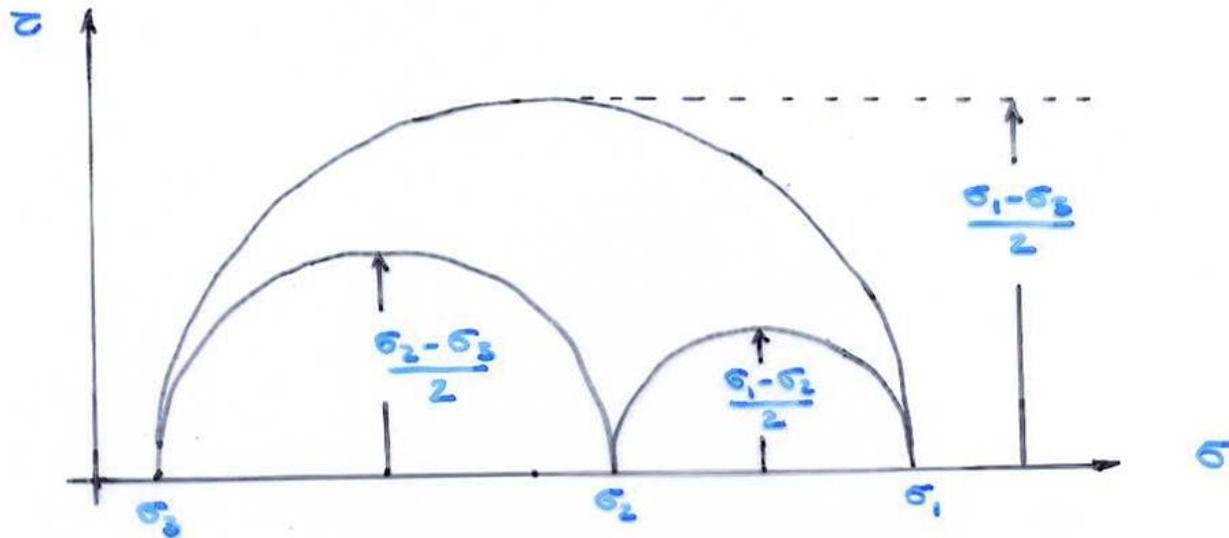
(compressione monoassiale)



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Passing from surface stress to tridimensional one, there will be three couples of main stress with which to build three Mohr's circles, each of ones represent the stress state on the plane containing the main corresponding axes.

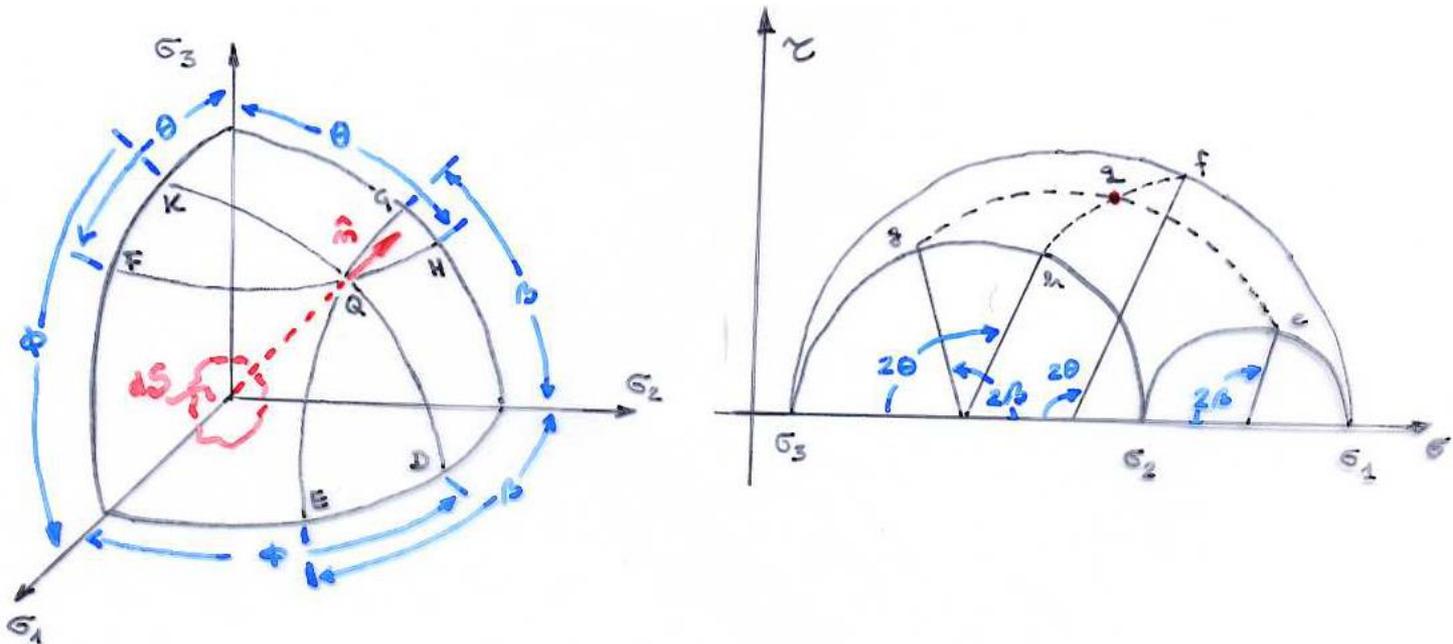




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Per simmetria abbiamo rappresentato solo la parte del grafico corrispondente a $\tau > 0$. Si può dimostrare che qualsiasi punto compreso tra i tre cerchi può rappresentare lo sforzo normale e di taglio su un piano orientato con normale $\hat{n}=(\cos \phi, \cos \beta, \cos \vartheta)$. Per il piano dS il punto è q !

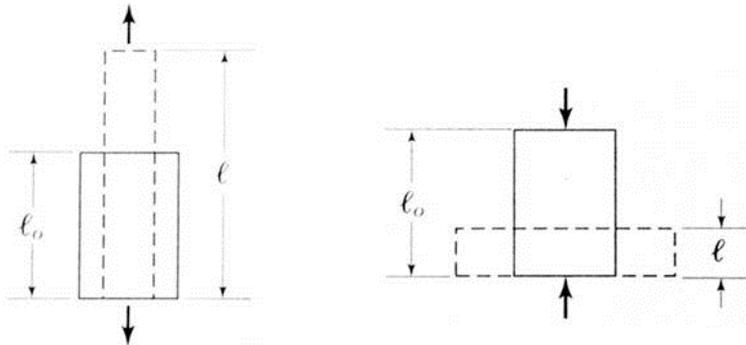




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

I corpi solidi non sono mai completamente rigidi; sotto l'azione di forze applicate questi corpi si deformano. Le deformazioni si dicono elastiche se scompaiono quando cessano le forze che le hanno prodotte, e il corpo su cui queste forze hanno agito, si dirà corpo elastico altrimenti le deformazioni si dicono permanenti. Si consideri lo studio puramente geometrico della distribuzione degli spostamenti e delle deformazioni di un corpo elastico, senza preoccuparsi di considerare le forze che hanno causato questi cambiamenti.



Piccole deformazioni:

Allungamento: $\Delta l = l - l_0$

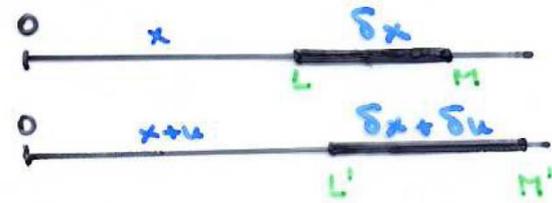
Deformazione lineare : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Si consideri una sollecitazione che agisce in direzione x su un filo elastico. Il punto L del filo si sposta di una distanza u verso il punto L' quando viene applicata la sollecitazione, mentre il punto M si sposta verso il punto M' alla distanza $u + \delta u$. La deformazione in direzione x è indicata con e_{xx} e è definita dal rapporto tra l'allungamento e la lunghezza originale del filo elastico:



$$e_{xx} = \frac{L'M' - LM}{LM} = \frac{\delta x + \delta u - \delta x}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} \xrightarrow{\lim \delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Nella nostra discussione è implicita l'ipotesi che le deformazioni siano piccole.



Fisica Terrestre 2024-2025

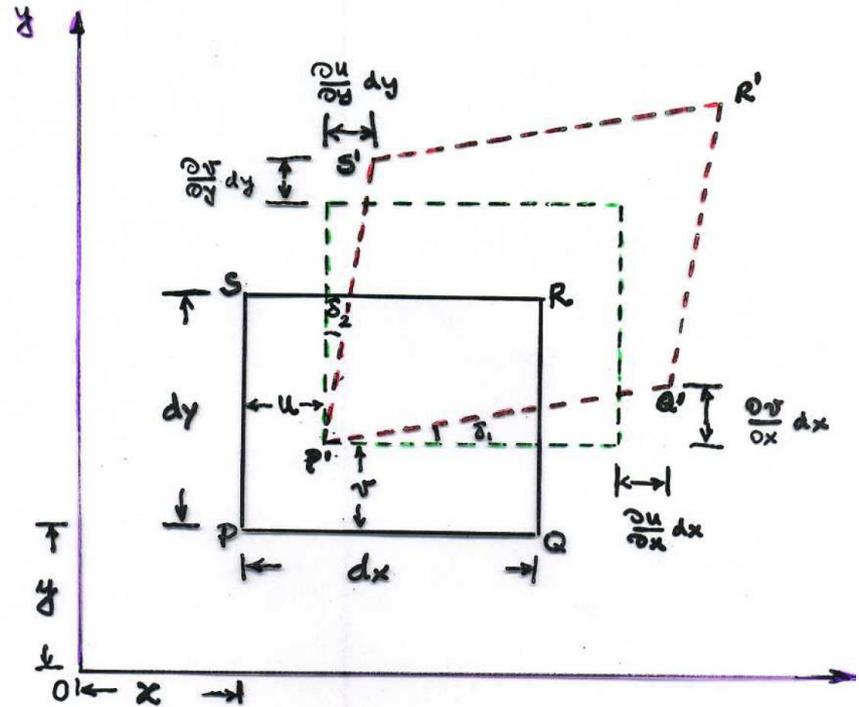
Giovanni Costa

Nel caso bidimensionale, si considerano le deformazioni del rettangolo PQRT nel piano x-y. I punti P, Q, S si spostano in P', Q', S'.

$$P(x, y) \rightarrow P'(x+u, y+v)$$

$$Q(x+dx, y) \rightarrow Q'(x+dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}dx, y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx)$$

$$S(x, y+dy) \rightarrow S'(x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, y+dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}dy)$$



La deformazione in direzione x:

$$e_{xx} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Lo stesso in direzione y:

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$



Fisica Terrestre 2024-2025

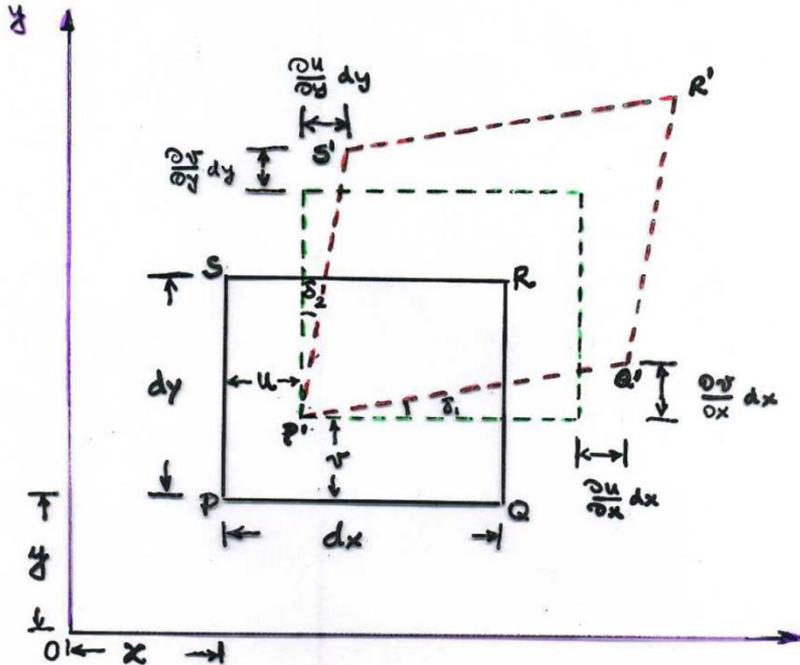
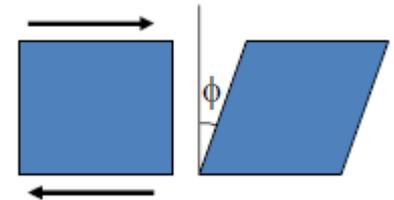
Giovanni Costa

We have so far considered strains or deformations that do not alter the right angles between line elements that are mutually perpendicular in the unstrained state. Shear strains, however, can distort the shapes of small elements. For example, Figure shows a rectangular element in two dimensions that has been distorted into a parallelogram. The shear strain e_{xy} is defined to be one half of the decrease in the angle SPQ:

$$e_{xy} \equiv -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are the angles through which the sides of the original rectangular element are rotated. The angle $\delta_1 + \delta_2$ is called shear angle:

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

In the three dimensions only six shear strains (e_{ij} with $i \neq j$), but $e_{ij} = e_{ji}$ so only three are independent:

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

So the shear angle is double of shear deformation $\delta_1 + \delta_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$



Fisica Terrestre 2024-2025

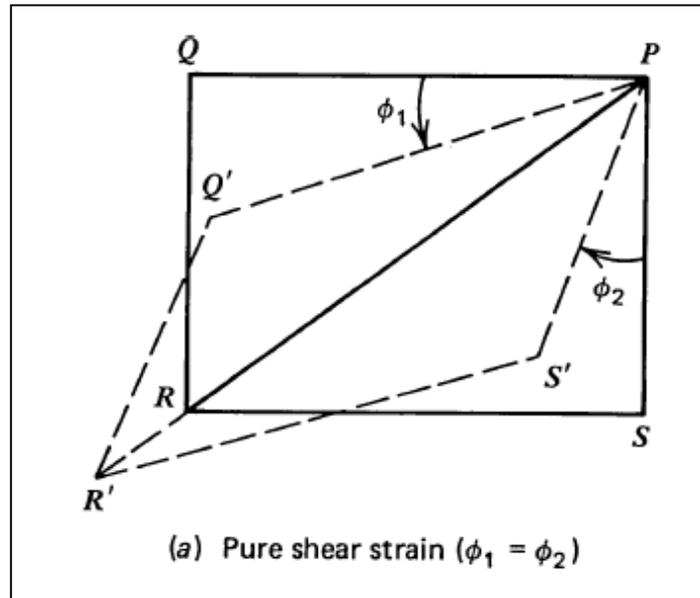
Giovanni Costa

If the amount of solid-body rotation is zero, the distortion is known as pure shear. In this case, illustrated in Figure:

$$\phi_1 = \phi_2; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

and the shear strain is:

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$



If $\delta_1 \neq \delta_2$ there is a rotation around the z axes of the angle: $\Theta_z = \frac{1}{2}(\delta_1 - \delta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$



In three dimensions:

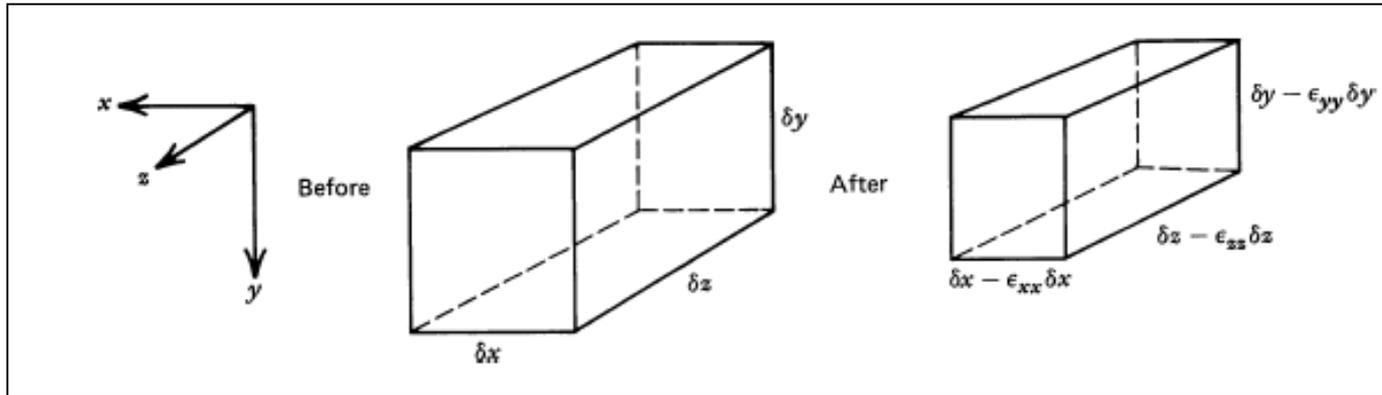
$$\Theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\Theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\Theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



$$2\underline{\Theta} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$$



In three dimensions. Prior to deformation it has sides δx , δy , and δz . The element may be deformed by changing the dimensions of its sides while maintaining its shape in the form of a rectangular parallelepiped. After deformation, the sides of the element are $\delta x - \epsilon_{xx} \delta x$, $\delta y - \epsilon_{yy} \delta y$, and $\delta z - \epsilon_{zz} \delta z$.

The quantity ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} are called normal components of strain. The normal components of strain ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} are assumed, by convention, to be positive if the deformation shortens the length of a side. This is consistent with the convention that treats compressive stresses as positive.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

The elongation $(\delta u, \delta v, \delta w)$ of any point $(\delta x, \delta y, \delta z)$ can be expressed – at the first order – by:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z$$

$$\delta w = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z$$

The equations can be written in vectorial form (matrices) dividing a symmetric part (strains) from an antisymmetric one (rotations):

$$(\delta u, \delta v, \delta w) = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Theta_z & \Theta_y \\ \Theta_z & 0 & -\Theta_x \\ -\Theta_y & \Theta_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \delta \underline{u} = (\underline{e} + \underline{\Theta}) \delta \underline{x}$$

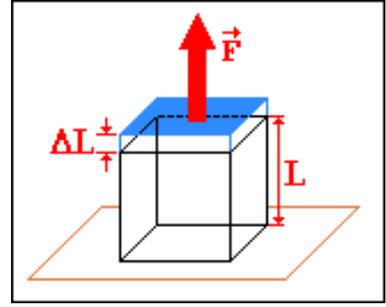
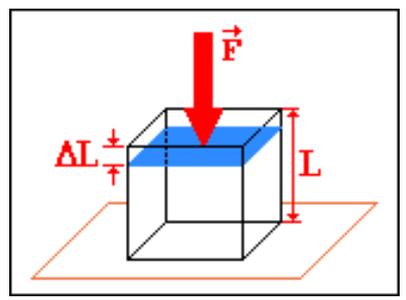
The strain is an a-dimensional quantity! Generally, in seismology, the strain due to a seismic wave is about 10^{-6} .



Fisica Terrestre 2024-2025

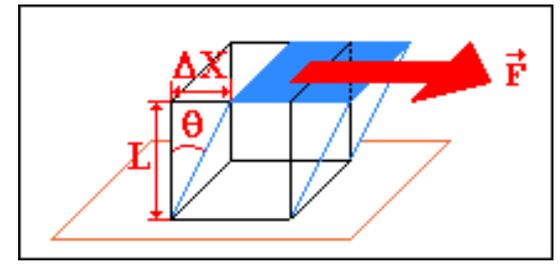
Giovanni Costa

Normal strain:
Length changes



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Shear strain:
Shape changes



$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{L} = \text{tg} \Theta$$



The fractional change in volume (volume change divided by original volume) due to strain is known as the dilatation Δ ; it is positive if the volume of the element is decreased by compression. The original volume of parallelepiped is $V = \delta x \delta y \delta z$. After deformation (at first approximation) the volume is:

$$V + \delta V = (1 + e_{xx})\delta x(1 + e_{yy})\delta y(1 + e_{zz})\delta z$$

The dilatation is:

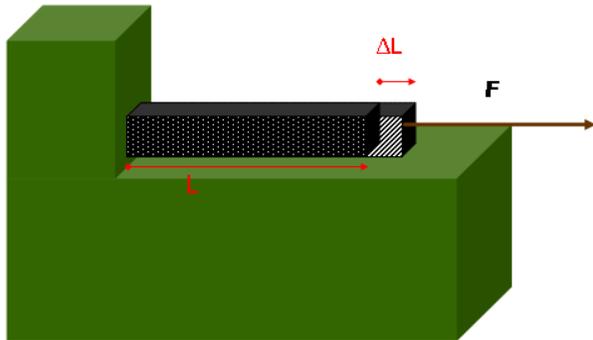
$$\Delta = \frac{V + \delta V - V}{V} = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \left[(1 + e_{xx})(1 + e_{yy})(1 + e_{zz})\delta x \delta y \delta z - \delta x \delta y \delta z \right]$$

If the deformation of the element is so small that squares and higher order products of the strain components can be neglected in computing the change in volume of the element, we obtain:

$$\Delta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

The dilatation is equal to the divergence of displacement.

Usually you want to calculate the deformation having the known stress. **Hooke** proposed that, for small deformations, each deformation is proportional to the stress that it causes: this is Hooke's law that is the **basis of the theory of elasticity**. In other words, Hooke's Law is the relationship of **proportionality between stress and strain**.



If a traction (compression) is applied to a body, the body itself is subject to an elongation (shortening). By Hooke's law:

$$F \propto \Delta L$$

The proportionality constant depends on the material, temperature, geometrical characteristics of the object (body).



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

In a one dimension the **Hooke's law** can be written:

$$\sigma_{xx} = c e_{xx}$$

Where c the constant depending on the medium.

In three dimensions each of **six components** of the **stress tensor** can be linearly dependent on the **six components** of the **strain tensor**

$$\sigma_{xx} = c_1 e_{xx} + c_2 e_{xy} + c_3 e_{xz} + c_4 e_{yy} + c_5 e_{yz} + c_6 e_{zz}$$

.....

$$\sigma_{zz} = c_{31} e_{xx} + c_{32} e_{xy} + c_{33} e_{xz} + c_{34} e_{yy} + c_{35} e_{yz} + c_{36} e_{zz}$$

We have **36 constants**.

By the **symmetry of the stress** and strain tensors and by a **thermodynamic condition**, the number of independent constants is **21**.



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

If we consider an **isotropic medium** (that is its properties not change with the direction), the number of **constants** decreases to **two**:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\Delta + 2\mu e_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu e_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu e_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu e_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu e_{yz}$$

Or in tensorial form:

$$\sigma_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

With δ_{ij} unit tensor ($\delta_{ij} = 1$ per $i=j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$).

The constants λ and μ are known as **Lamè's** parameters. The constant μ ($\mu = \sigma_{xy} / 2e_{xx}$) give a measurement of the resistance of a body to a shear stress, and is called **shear modulus** or **rigidity modulus**. Obviously the shear modulus for a liquid or gas is null. There are also other constants: **Young modulus**, **Poisson modulus**, **Poisson ratio** and **Bulk'** modulus.



According to Hooke's law, when a body deforms elastically, there is a linear relationship between stress and strain. The ratio of stress to strain defines an elastic constant (or elastic modulus) of the body. The elastic moduli, defined for different types of deformation, are **Young's modulus**, the **rigidity modulus**, the **bulk modulus** and the **Poisson's ratio**

MODULO DI YOUNG

Young's modulus is defined from the **extensional deformations**. Each longitudinal strain is proportional to the corresponding stress component. If we apply a stress σ_{xx} we have elongation du along the x axis and shortenings dv and dw along y and z. The extension is proportional to σ_{xx} and to length dx ; is inversely proportional to the resistance of the material:

$$du = \frac{\sigma_{xx} dx}{E}$$

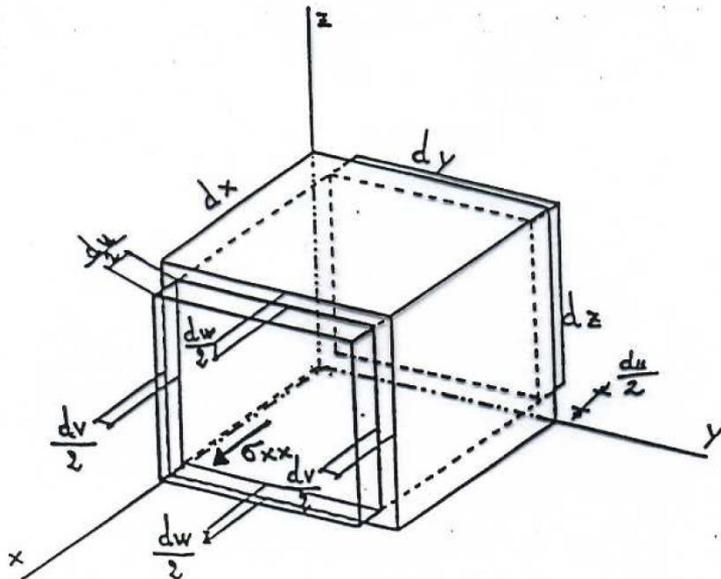
To obtain the relationship between **E** and the Lamé constants λ and μ we write σ_{xx} and e_{xx} using λ and μ . Because only σ_{xx} is different by zero:

$$\sigma_{xx} = \lambda \Delta + 2\mu e_{xx}$$

$$0 = \lambda \Delta + 2\mu e_{yy}$$

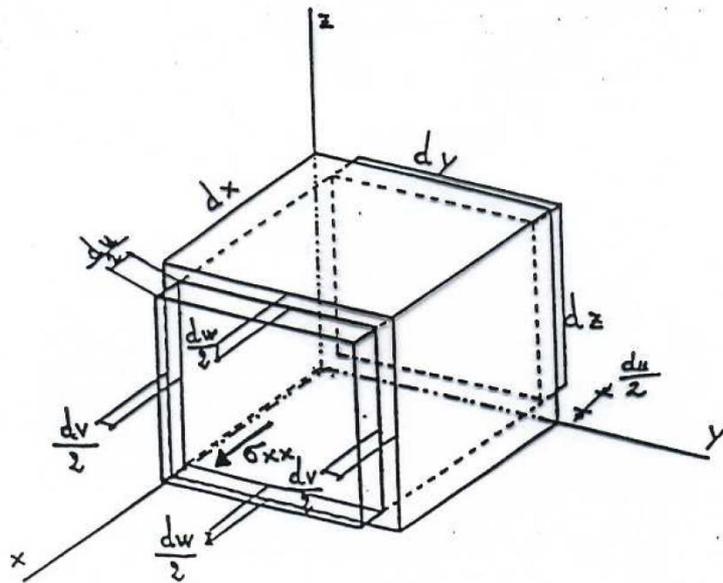
$$0 = \lambda \Delta + 2\mu e_{zz}$$

$$0 = e_{xy} = e_{xz} = e_{yz}$$





MODULO DI YOUNG



Summing the first three equations:

$$\sigma_{xx} = 3\lambda\Delta + 2\mu\Delta$$

And replacing this last equation in the first one:

$$3\lambda\Delta + 2\mu\Delta = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx}$$



$$e_{xx} = (\lambda + \mu) \frac{\Delta}{\mu}$$

So the Young's modul is

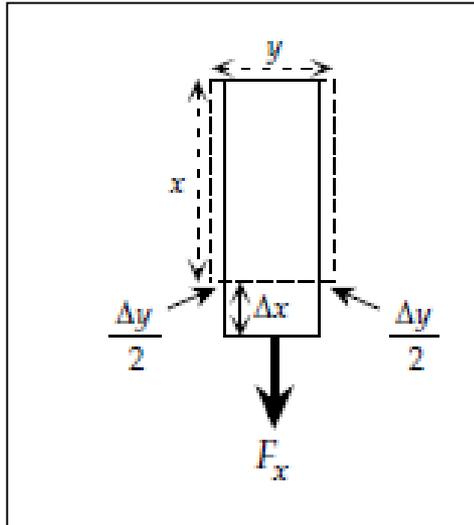
$$E = \frac{\sigma_{xx}}{e_{xx}} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\Delta u}{(\lambda + \mu)\Delta} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

The Young's modul, as Lamé' parameters, is dimensionally like a stress and has large value , as 10^{10} Pa.

POISSON RATIO

In an elastic body the transverse strains e_{yy} and e_{zz} are not independent of the strain e_{xx} . Consider the change of shape of the bar in Figure. When it is stretched parallel to the x -axis, it becomes thinner parallel to the y -axis and parallel to the z -axis. The transverse longitudinal strains e_{yy} and e_{zz} are of opposite sign but proportional to the extension e_{xx} and can be expressed as:

$$e_{yy} = -\nu e_{xx} \quad \text{and} \quad e_{zz} = -\nu e_{xx}$$



The constant of proportionality ν is called **Poisson's** ratio. The values of the elastic constants of a material constrain ν to lie between 0 (no lateral contraction) and a maximum value of 0.5 (no volume change) for an incompressible fluid. In very hard, rigid rocks like granite ν is about 0.45, while in soft, poorly consolidated sediments it is about 0.05. In the interior of the Earth, ν commonly has a value around 0.24–0.27. A body for which the value of ν equals 0.25 is sometimes called an **ideal Poisson body**.



INCOMPRESSIBILITY MODULUS (BULK' MODULUS)

Consider a body subject to a hydrostatic pressure (e.g. Body immersed in a liquid): the ratio between the pressure and the compression (= negative cubic dilatation) is named Bulk' modulus **K**. For a hydrostatic pressure:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

That is

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{xx} = -p$$

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{yy} = -p$$

$$\lambda\Delta + 2\mu e_{zz} = -p$$

Adding these three equations



$$3\lambda\Delta + 2\mu\Delta = -3p$$

So we have

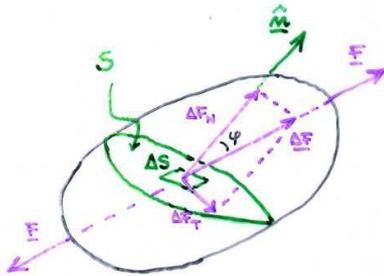
$$K = \frac{\text{pressure}}{\text{compression}} = \frac{\text{pressure}}{-\text{dilatation}} = \frac{-p}{\Delta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

K represents the resistance opposed by a medium to an increasing of hydrostatic pressure. The Young' and Bulk' modulus, the Lamè parameters are all positive. They are measured in $\text{Nm}^{-2}=\text{Pa}$ and their values for rocks are usually ranged from 20 to 120 Gpa.



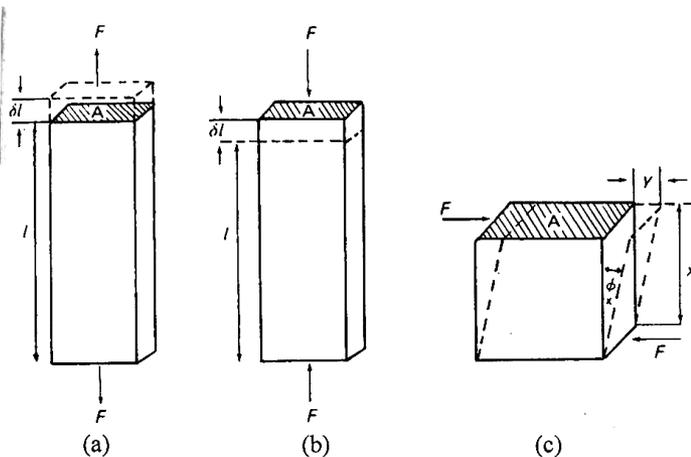
SUMMARIZING...

The application of a force creates a state of stress which causes a deformation in the structure of the body. The stress is the relationship between the force and the surface on which it acts



$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} = \underline{\sigma}(\hat{n}) = T(\hat{n})$$

There are three kind of stress: **traction** (a), **compression** (b) and **shear** (c).



When the force acts normal to surface causes the traction or the compression. Instead if the force acts parallel to the surface causes a shear stress. The unit is Pascal ($1\text{Pa}=1\text{Nm}^{-2}$).



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

A stress that acts on a body causes a change in dimensions and shape of the body itself.

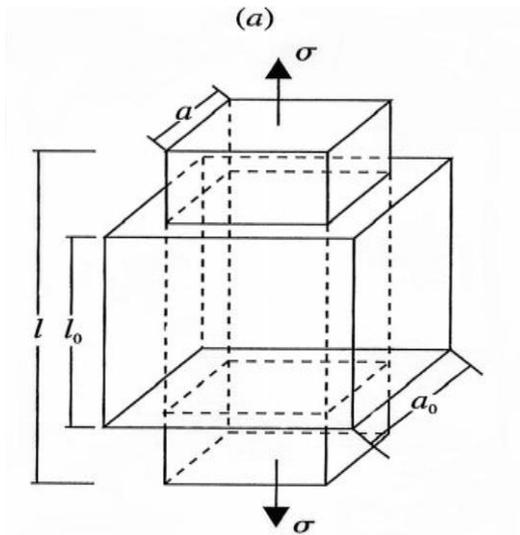
Traction or compression



Normal deformation



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$



where l and l_0 are the body dimension in stress direction first and after its action.

Δl is the dimensional variation due to the stress. The deformation is adimensional!

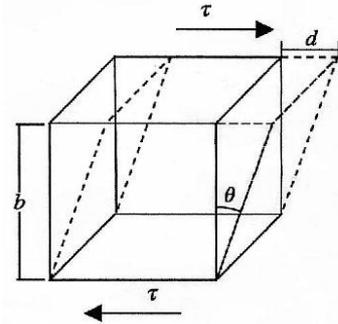


Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

A stress that acts on a body causes a change in dimensions and shape of the body itself.

Shear stress



Shear strain

$$\varepsilon = \frac{d}{b} = \text{tg}\Theta$$

Both the normal and shear strain depend on the derivative of displacement field.

Convention of the σ_{ij} sign:

POSITIVE	NEGATIVE
TENSIVE STRESS (direct to the outside of the body)	COMPRESSIONAL STRESS (direct to the inside of the body)
Componet along the positive axis direction	Componet along the negative axis direction

The sign of the σ_{ij} component is equal to the product of the sign above.

Example: the compressional stress component along the negative axis direction is positive because is equal to $- \times - = +!$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

The **Hooke's** law define a relationship between stress and strain. For a isotropic body:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

where **μ and λ** are **di Lamé's** parameters, Θ is the cubic dilation and δ_{ij} is the **Kronecker** delta.

The Lamé's parameters have the stress dimensions (Mpa).

The dilation is the divergence of the displacement: $\Delta = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$

The Kronecker delta is a unit tensor: $\delta_{ij} = 1$ per $i=j$; $\delta_{ij} = 0$ per $i \neq j$.



ELASTIC PARAMETERS

Rigidity:

resistance of the medium to shear (N/m²)



$$\mu = \frac{\sigma_{ij}}{2\mathcal{E}_{ij}}$$

Young modulus:

Stress dimension (MPa)



$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}$$

Poisson ratio:

Is adimensional and ranged between 0 and 0.5. For liquid ($\mu=0$) $\sigma=0.5$, for compact rocks $\sigma=0.05$. the average value for rocks is 0.25 that correspond to $\lambda=\mu$ that is Poisson ratio.



$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Bulk Modulus (or imcompressibility):

is the relationship between applied pressure and volume variation.



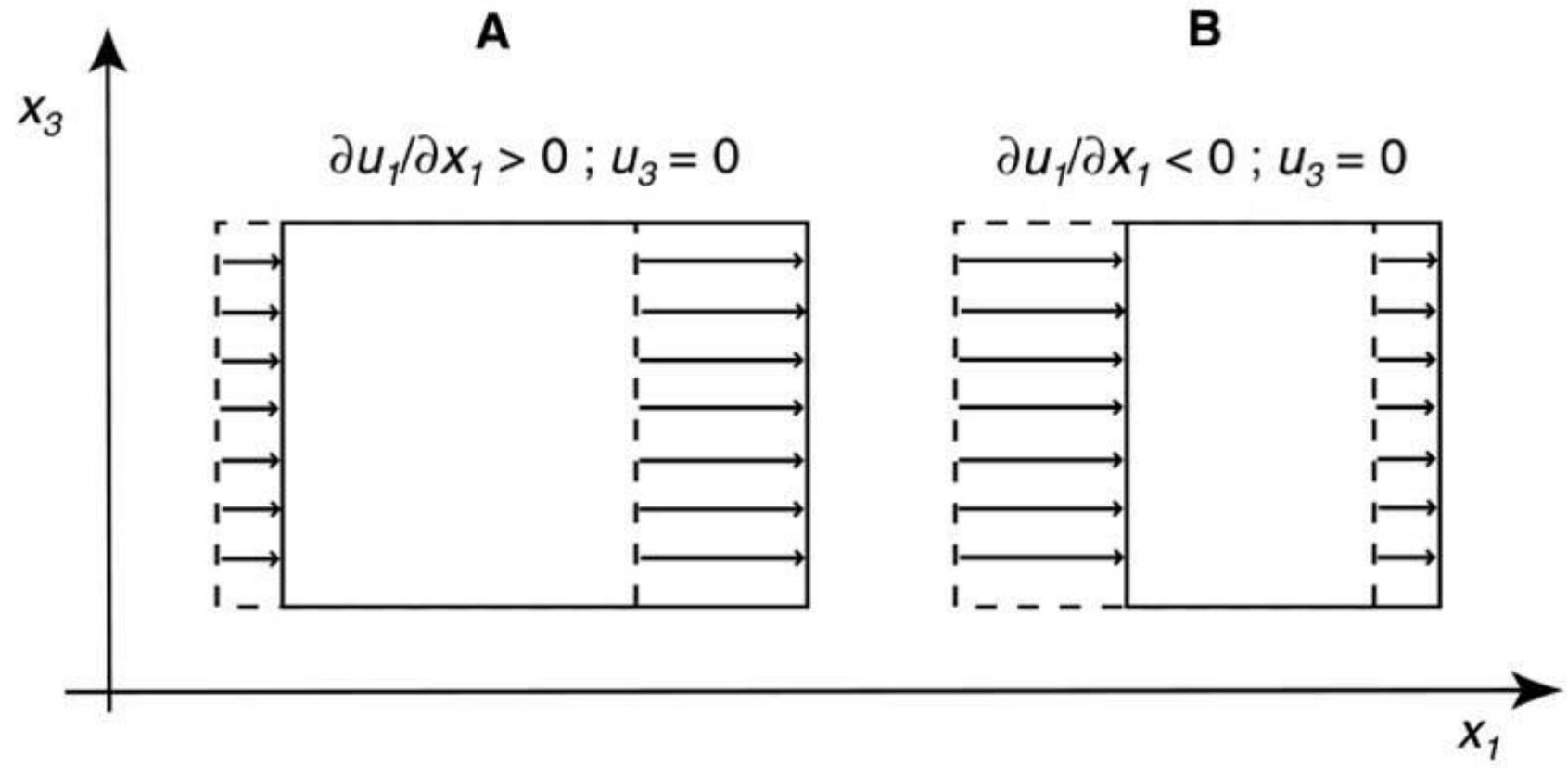
$$k = -\frac{P}{\Delta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$



Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Quali sono le deformazioni?

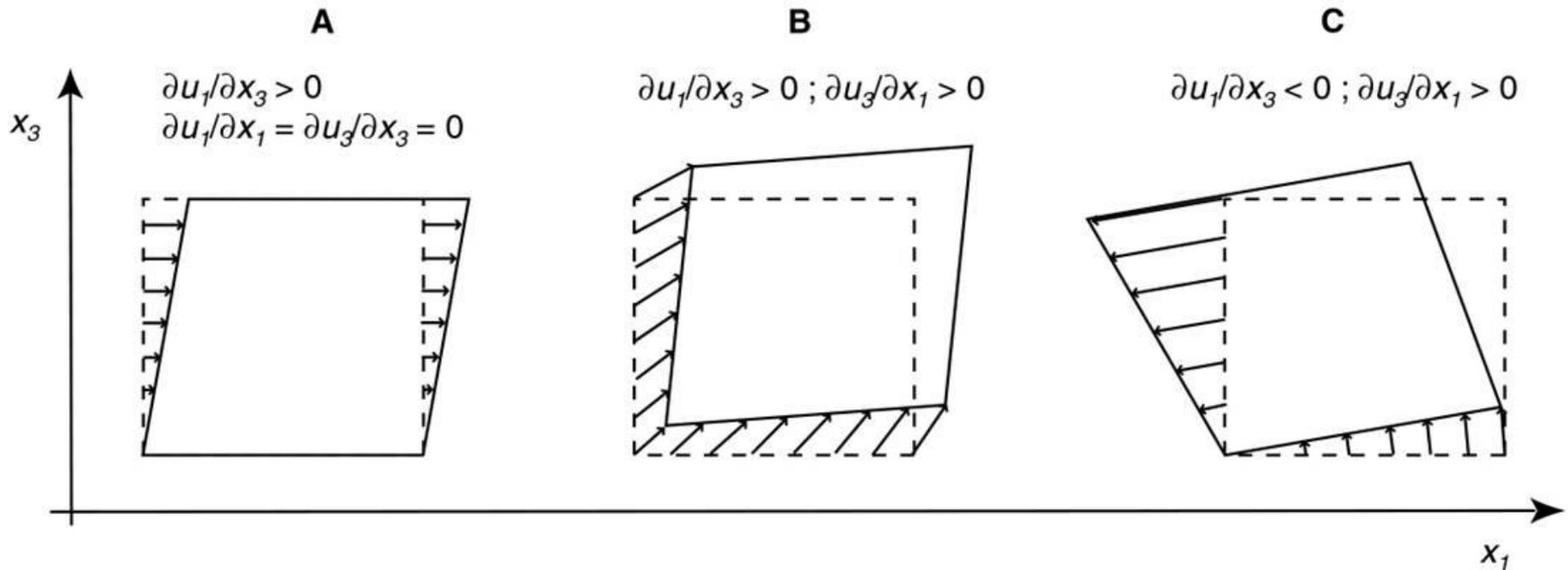




Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Quali sono le deformazioni?





Fisica Terrestre 2024-2025

Giovanni Costa

Quali sono le deformazioni?

