Lezione 15 ottobre 2024

martedì 15 ottobre 2024 16:53

RISULTANTE

Teorema: $K = \overline{K}$, $f, g \in K[t]$ hanno radice in comune $\Leftrightarrow R(f,g) = 0$.

Teorema: $f, g \in A[t]$, hanno un fattore in comune $\Leftrightarrow R(f,g) = 0$.

Cons ora $f, g \in K[x,y]$, $K = \overline{K}$

$$= \underbrace{K[x]}_{=A}[y]$$

Def $R_y(f,g) := \det M_{f,g}$

$\underset{y}{M_{f,g}}$ è la matrice di Sylvester rispetto a y

$$f(x,y) = a_r(x)y^r + a_{r-1}(x)y^{r-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x)$$

$$g(x,y) = b_s(x)y^s + b_{s-1}(x)y^{s-1} + \dots + b_1(x)y + b_0(x)$$

$$R_y(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_r(x) & a_{r-1}(x) & \cdots & a_1(x) & a_0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_r(x) & a_{r-1}(x) & \cdots & a_1(x) & a_0(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_r(x) & a_{r-1}(x) & \cdots\ a_1(x) & a_0(x) \\ b_s(x) & b_{s-1}(x) & \cdots & \cdots & b_1(x) & b_0(x) & 0\ \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_s(x) & b_{s-1}(x) & \cdots & b_1(x) & b_0(x) \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} r \end{matrix}$$

$$= R(x)$$

$R(x) =$
- ① polinomio nullo $\Rightarrow$ $f(x,y)$ e $g(x,y)$ hanno un fattore comune
- ② costante $\neq 0$
- ③ polinomio non nullo di grado ≥ 1 nella x

② $R(x) = c \neq 0$

$R(\bar{x}) \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in K$

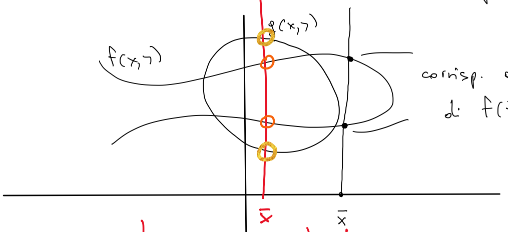
$$\Rightarrow \forall \bar{x} \in K, \text{ le equazioni } \overbrace{f(\bar{x},y)}^{\in K[y]} = 0, \quad \underbrace{g(\bar{x},y)}_{\in K[y]} = 0$$

non hanno fattori comuni

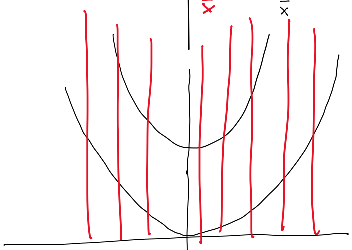
se $(K = \overline{K})$: $\Rightarrow$ non hanno radici comuni

$$\Rightarrow Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ dà informazioni $Z(f(x,y)) \cap Z(g(x,y))$



corrisp. agli zeri di $f(\bar{x},y)$



③ $R(x)$ è polinomio di grado ≥ 1

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$: $R(x)$ ha almeno una radice

$R(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}, y)$ e $g(\bar{x}, y)$ hanno radice in comune $\bar{y}$

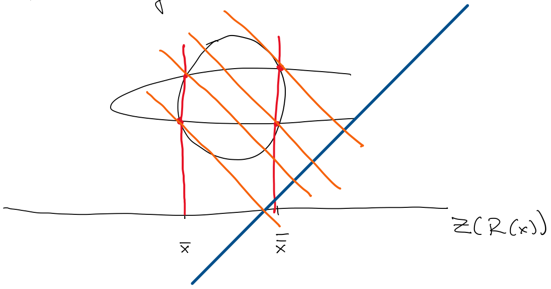
$\Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

cioè $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(f) \cap Z(g)$

PROBLEMI A LAVORARE NELL'AFFINE :

- ci sono curve che non si intersecano, e curve che si intersecano solo in un "piccolo" numero di punti (perché ci sono altri punti di intersez. sulla retta all'∞)
- Vorremmo stimare $\# Z(f) \cap Z(g)$ in modo generale



Altro problema: potrebbe succedere :

$f(x,y) = (1-x)y^2 + y + 1$ $\deg f = 3$

$g(x,y) = (1-x)y + 1$ $\deg g = 2$

$$R_y(f,g) = \det \begin{pmatrix} \boxed{(1-x)} & 1 & 1 \\ \boxed{(1-x)} & 1 & 0 \\ 0 & (1-x) & 1 \end{pmatrix} = (1-x)^2 = R(x)$$

3×3

$R(1) = 0$: $f(1, y) = y + 1$

$g(1, y) = 1 \neq 0$

il problema è che y non compare al grado massimo

$\Longrightarrow$ il piano proiettivo è più facile.

Cons. $Z_p(F), Z_p(G) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$; $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

F omogeneo di grado r, G omogeneo di grado s

$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2] = \mathbb{K}[x_0, x_1][x_2]$, $\deg F = r$

$G \in$ $\deg G = s$

Cons. $R_{x_2}(F,G)$ e vogliamo che x_2 appaia in grado r in F e grado s in G

A_{r-1} è omogeneo, di grado 1

$$F = \underbrace{A_r}_{\in K}\underbrace{x_2^r}_{} + \underbrace{A_{r-1}(x_0,x_1)\,x_2^{r-1}}_{} + \dots + \underbrace{A_1(x_0,x_1)\,x_2}_{\substack{\deg A_1 = r-1\\ \text{omogeneo}}} + \underbrace{A_0(x_0,x_1)}_{\substack{\deg A_0 = r\\ \text{omogeneo}}}$$

$A_r \neq 0 \iff$

OSS. che $F(0,0,1) = A_r$

se $(0:0:1) \notin Z_p(F) \iff A_r \neq 0$

$$G = B_s x_2^s + B_{s-1} x_2^{s-1} + \dots + B_1 x_2 + B_0$$

supp. $\underset{= B_s}{G(0,0,1)} \neq 0$

B_i sono omogenei di grado $s-i$

Cons. $R_{x_2}(F,G) = R(x_0,x_1)$

Teorema: Nelle condizioni sopra, il risultante $R_{x_2}(F,G)$ è nullo, oppure è omogeneo $R(x_0,x_1)$, di grado esattamente $r \cdot s$

Dim. Dimostriamo che $\boxed{R(tx_0,tx_1)} = t^{rs} R(x_0,x_1)$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
t\cdot A_r & \underbrace{t^2}_{\text{omog. di grado 1}} A_{r-1} & \underbrace{t^3 A_{r-2}}_{\text{ondi grado 2}} & \cdots & t^{r} A_1 & t^{r+1} A_0 & 0 \cdots & 0 \\
0 & t^2\cdot A_r & t^3 A_{r-1} & \cdots & & t^{r+1} A_1 & t^{r+2} A_0 & 0\cdots 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & & \\
0 & \cdots & 0 \; t^s\cdot A_r & t A_{r-1} & \cdots & & t^{r-1+s} A_1 & t^{r+s} A_0 \\
t\cdot B_s & t^2 B_{s-1} & t^3 B_{s-2} & \cdots & t^{s} B_1 & t^{s+1} B_0 & 0 \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 \; t^r B_s & t^{r+1} B_{s-1} & \cdots & & t^{s-1+r} B_1 & t^{s+r} B_0
\end{array}\right|
\begin{array}{l} \cdot t \\ \cdot t^2 \\ \vdots \\ t^s \\ \cdot t \\ \vdots \\ \cdot t^r \end{array}$$

$$\underbrace{\overbrace{t\cdot t^2 \cdots t^s}^{\frac{s(s+1)}{2}} \cdot t \cdot t^2 \cdots t^r \cdot R(tx_0,tx_1)} = t\cdot t^2 \cdot t^3 \cdots t^{r+s} \cdot R(x_0,x_1)$$

= det della matrice ottenuta da $M(f,g)(tx_0,tx_1)$ moltiplicando le righe per le opport. potenze di t

$$\cancel{t^{\frac{s(s+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2}}} \cdot R(tx_0,tx_1) = t^{\frac{(r+s)(r+s+1)}{2}} \cdot R(x_0,x_1)$$

$$\frac{(r+s)(r+s+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\cancel{r^2} + 2rs + \cancel{s^2} + \cancel{r} + \cancel{s} - \cancel{s^2} - \cancel{s} - \cancel{r^2} - \cancel{r}\right)$$

$= r \cdot s$

$$\Longrightarrow \quad R(tx_0, tx_1) = t^{r \cdot s} R(x_0, x_1)$$

Esempio: $r = 3$ $s = 2$: $R(tx_0, tx_1)$

$$\det \left(\begin{array}{ccccc} tA_3 & t^2A_2 & t^3A_1 & t^4A_0 & 0 \\ 0 & t^2A_3 & t^3A_2 & t^4A_1 & t^5A_0 \\ tB_2 & t^2B_1 & t^3B_0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2B_2 & t^3B_1 & t^4B_0 & 0 \\ 0 & 0 & t^3B_2 & t^4B_1 & t^5B_0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot t \\ \cdot t^2 \\ \cdot t \\ \cdot t^2 \\ \cdot t^3 \end{array}$$

OSS: Supp. $R(x_0, x_1) = R_{x_2}(F, G) \neq 0$

su $K = \overline{K}$ si fattorizza nel prodotto

di $r \cdot s$ fattori lineari del tipo $(c_1x_0 - c_0x_1)$

$\Rightarrow$ $(c_0 : c_1) \in \mathbb{P}^1$ annulla $R(x_0, x_1)$

$R(c_0, c_1) = 0$

$\Rightarrow$ $F(c_0, c_1, x_2)$ e $G(c_0, c_1, x_2)$

fattore comune $\Rightarrow$ radice comune c_2

$F(c_0, c_1, c_2) = 0$
$G(c_0, c_1, c_2) = 0$

Viceversa: se $(c_0 : c_1 : c_2) \in Z_p(F) \cap Z_p(G)$

$\Rightarrow$ $F(c_0, c_1, x_2)$ e $G(c_0, c_1, x_2)$

hanno una radice comune $\Rightarrow$ $R(c_0, c_1) = 0$

$\Rightarrow$ se F e G non hanno una comp comune, $\# Z_p(F) \cap Z_p(G) < +\infty$

$R(x_0, x_1) \neq 0$ $\Rightarrow$ ha # finito di coppie omogenee t.c. $R(c_0, c_1) = 0$

$\Rightarrow$ $F(c_0, c_1, x_2)$ e $G(c_0, c_1, x_2)$ ha almeno una radice comune; in ogni caso sono in numero finito $\Rightarrow$ # finito di possibili intersezioni.