Lezione 18 ottobre 2024

venerdì 18 ottobre 2024 10:59

Visto: Teo Bézout

APPLICAZIONE : $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

Possiamo caratterizzare curve alg. proiettive di grado $d \geq 1$ che hanno un punto SINGOLARE DI MOLTEPLICITÀ d:

Def.: Un punto $Q \in Z_p(F)$ si dice **SINGOLARE DI MOLTEPLICITÀ m (≥ 2)** : m_Q

se ogni retta $L \ni Q$ verifica

$$I_Q(F, L) \geq m$$

e esistono rette t.c.

$$I_Q(F, L) = m$$

Se $m = 2$, Q si dice **DOPPIO**

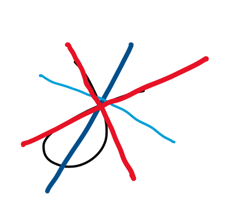
$m = 3$, Q si dice **TRIPLO**

QUADRUPLO

⋮

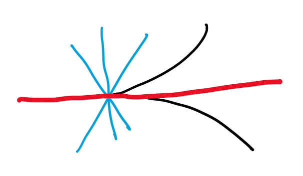
m – UPLO

es.:

-  $x_2^2 x_0 - x_1^3 + x_1^2 x_0 = 0$
  $(y^2 - x^3 + x^2 = 0)$

$Q = (1:0:0)$ **PUNTO DOPPIO**

- Cubica cuspidata $x_2^2 x_0 - x_1^3 = 0$
  $(y^2 - x^3 = 0)$

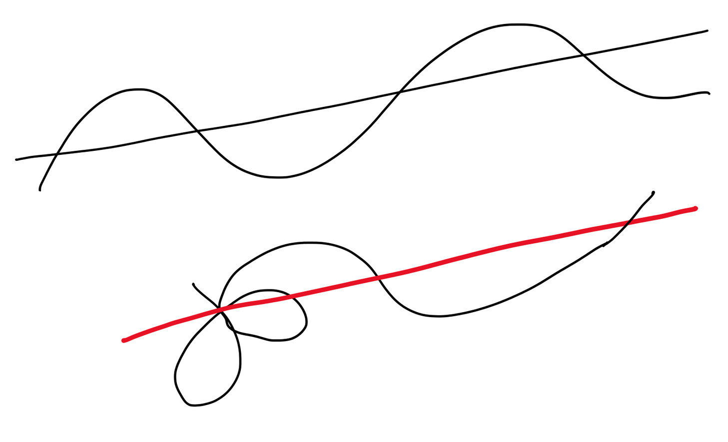


$Q = (1:0:0)$

PUNTO DOPPIO

OSS. Se F ha grado $d \geq 1$,

e se Q è un punto singolare di molteplicità $m_Q \geq 2$, posso limitare m_Q in funzione di d?



Sì, per Bezout: $L \cap Z_p(F)$ sicché:

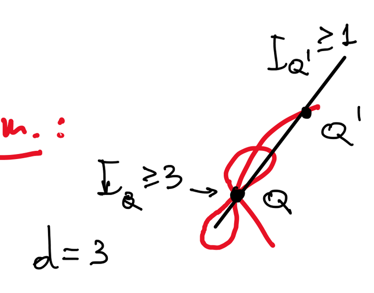
- $L \subseteq Z_p(F)$
- $I_Q(L, F) \leq d \cdot 1 = d$

$\Rightarrow$ $\forall$ Q singolare, $m_Q \leq d$.

Lemma: Una curva di grado d ha un punto sing. Q con $m_Q = d$

$\Longleftrightarrow$

Dim.:



$L = \overline{QQ'}$

$$\Rightarrow \sum_{R \in L \cap Z_p(F)} I_R(L, F) \geq 3+1 = 4 > d \cdot 1 = 3$$

$\Rightarrow L \subseteq Z_p(F)$

Sia $Q' \in Z_p(F)$

$Q' \neq Q$, cons. $\overline{QQ'} = L$

$I_Q(L, F) \geq d$, $I_{Q'}(L, F) \geq 1$

$$\sum_{R \in Z_p(F) \cap L} I_R(L, F) \geq d+1 > d$$

$\overset{\text{Bézout}}{\Longrightarrow}$ $L = \overline{QQ'} \subseteq Z_p(F)$

$\Rightarrow$ il polinom. lineare che definisce L divide F

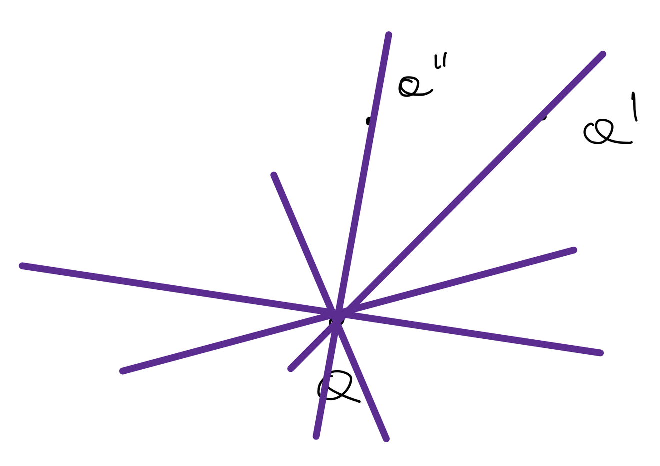
Se $d = 1$, $L = Z_p(F)$

Sia ora $Q'' \in Z_p(F)$, $Q'' \notin \overline{QQ'}$

se $d \geq 2$, Q'' c'è

cons. $\overline{QQ''}$ retta, rifaccio ragionamento

trovo $\overline{QQ''} \subseteq Z_p(F)$



Iterando il ragionamento un # finito di volte, trovo che

$$Z_p(F) = \text{unione di } d \text{ rette}$$

passanti per Q; F è riducibile e è prodotto di d polinomi lineari (non necessariamente distinti)

Vedremo: $\exists$ curve irriducibili di grado $d \geq 3$ con 1 punto Q singolare di molteplicità $d-1$; ad esempio:

$$f(x, y) = f_d + f_{d-1}$$

$$hf = f_d(x_1, x_2) + x_0 \cdot f_{d-1}(x_1, x_2)$$

e tale che $f_d(x, y)$ e $f_{d-1}(x, y)$

SENZA FATTORI COMUNI

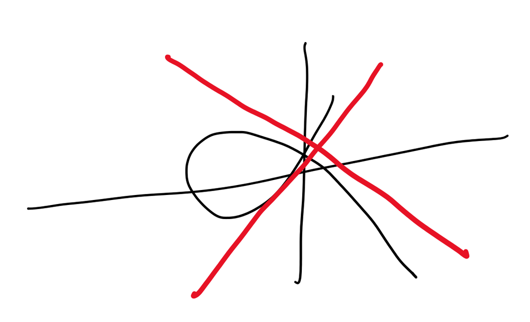
il punto $Q = (1:0:0)$ ha $m_Q = d-1$

OSS: $d = 3$: $y^2 + x^3 - x^2 = 0$

ha punto di molt. $d-1 = 2$

$$\underbrace{x^3}_{\substack{f_d \\ x \cdot x \cdot x}} + \underbrace{y^2 - x^2}_{f_{d-1}} = 0$$

$f_{d-1} \to (y-x)(y+x)$

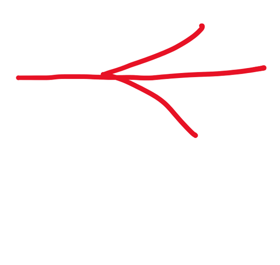


(Ricorda: $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $f_d(x, y)$ e $f_{d-1}(x, y)$ essendo omogenei e in 2 indeterminate, sono SEMPRE FATTORIZZ. nel prodotto di fattori lineari)

oltre cubica: $y^2 - x^3 = 0$

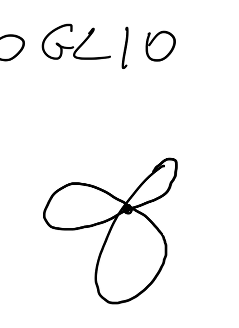
$$\underbrace{-x^3}_{\substack{f_d \\ x \cdot x \cdot x}} + \underbrace{y^2}_{f_{d-1}} = 0$$

$f_{d-1} \to y \cdot y$



Posso produrre punti singolari a piacere:

$d = 4$: TRIFOGLIO

 $f_4 + f_3 = 0$

ad es. $(x-y)(x+y)xy + \underline{(x+2y)(x-2y)(x+3y)} = 0$