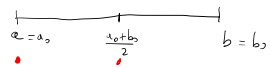


22 ottobre

Teorema (degli zeri) Sia $f \in C^0([a, b])$ $a < b$
due numeri reali. Sia $f(a)f(b) < 0$. Allora
 $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

Dim Definiamo una successione di intervalli. Non
è sufficiente assumere $f(a) < 0 < f(b)$.



Chiusura $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Considero il punto
mediante $\frac{a_0+b_0}{2}$. Se $f(\frac{a_0+b_0}{2}) = 0$ pongi
 $c = \frac{a_0+b_0}{2}$. Se $f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0$ allora
pongi $[a_1, b_1] = [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$

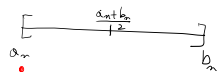
se invece $f(\frac{a_0+b_0}{2}) < 0$

pongi $[a_1, b_1] = [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$

Si procede così per individuare iterando una
sequenza finita di infiniti di intervalli.

$[a_0, b_0], \dots, [a_n, b_n]$

con $f(a_j) < 0 < f(b_j)$ $0 \leq j \leq n$



Se $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = 0$ si pone $c = \frac{a_n+b_n}{2}$

altrimenti si pone $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ quella metà
per la quale $f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1})$

supponiamo in pratica monotonici di generare una
successione infinita $\{[a_n, b_n]\}$ dove

$$f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Abbiamo $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n = 0, \dots$

$$\Rightarrow a_0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_0 \quad \forall n = 0, \dots$$

$\{a_n\}$ ed $\{b_n\}$ sono successioni monotone
crescente decrescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_a \in [a, b]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_b \in [a, b]$$

ora dimostriamo che $c_a = c_b$.

$n \geq 1$

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

limite di $[a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \quad \text{Prendendo il limite}$$

per $n \rightarrow +\infty$

$$c_b - c_a = 0 \Rightarrow c_a = c_b =: c$$

Vogliamo dimostrare che $f(c) = 0$

Ricordiamoci che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$$

$$f(c) = 0.$$

Corollario Sia $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0$
 un polinomio a coefficienti reali di grado dispari
 $2n+1$. Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $P(c) = 0$

Osservazione Il corollario è falso se il grado è pari.

Es. $P(x) = x^2 + 1$ non ha radici reali.

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot n^{100}}{n^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot n^{100\pi}}{n^n}$$

Dim

$$P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0$$

Non è restrittivo assumere $a_{2n+1} > 0$

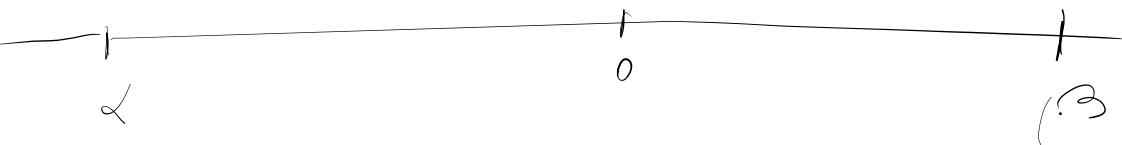
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = -\infty$$

$$\Rightarrow \exists \alpha < \beta \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$P(\alpha) < 0 < P(\beta)$$

$$P \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow P \in C^0([\alpha, \beta])$$



Per il teorema degli zeri vale che $\exists c \in (\alpha, \beta)$ t.c.
 $P(c) = 0$.

Teor (Valori intermedi) Sia $f \in C^0([a, b])$ e sia

y_0 un numero intermedio tra $f(a)$ ed $f(b)$

(cioè $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ se $f(a) \leq f(b)$,

oppure $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ se $f(a) \geq f(b)$)

Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = y_0$.

Dim Se $y_0 = f(a)$ possiamo scegliere $c = a$
 $y_0 = f(b)$ $c = b$.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, $f(a) < y_0 < f(b)$

Sia $g(x) = f(x) - y_0$. Allora $g \in C^0([a, b])$

con $g(a) = f(a) - y_0 < 0 < f(b) - y_0 = g(b)$

$g(a) < 0 < g(b)$. Applicando il teorema degli
zeri si ha che $\exists c \in (a, b)$ t.c. $g(c) = 0 = f(c) - y_0$
 $\Rightarrow f(c) = y_0$.

Esercizio Diciamo che $X \subseteq \mathbb{R}$ è connesso se

X è o un intervallo o un singolo punto.

Il teorema dei valori intermedi è equivalente

alla seguente proposizione: se $f \in C^0(I)$ con I
un intervallo allora $f(I)$ è un connesso in $\mathbb{R}$.

Corollario Sia $b > 1$ e consideriamo la funzione esponenziale $\mathbb{R} \ni x \mapsto b^x > 0$. Allora b^x è una funzione biettiva da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$. (La funzione inversa la denotiamo con $\log_b x$)

Dim Diamo per scontato che b^x è strettamente crescente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \sup \{ b^x : x \in \mathbb{R} \} \geq$$

$$\geq \sup \{ b^n : n \in \mathbb{N} \} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty$$

Perché le disuguaglianze sono ugualitarie e

$$\text{e } \boxed{\sup \{ b^x : x \in \mathbb{R} \} = +\infty} = \sup \mathbb{R}_+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{b^{-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^y} = 0 \quad y = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \inf \{ b^x : x \in \mathbb{R} \}$$

$$Y := \{ b^x : x \in \mathbb{R} \}$$

$$\sup Y = +\infty, \quad \inf Y = 0. \quad b^x \in C^0(\mathbb{R})$$

Per il teo dei valori intermedi $\forall 0 < \gamma_0 < +\infty$

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad b^{x_0} = \gamma_0.$$

$$Y = \begin{cases} (0, +\infty) & \leftarrow \\ \text{più} \\ [0, +\infty) \end{cases}$$

L'immagine è $Y = (0, +\infty)$.

$$b^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$$

$$\longleftarrow \log_b x$$

Esercizio Dimostrare che se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{biettiva strettamente crescente}$$

Dimostrare che la funzione inversa $Y \rightarrow X$ è strettamente crescente.

$$b > 1$$

$$\lg_b : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_b x = \sup \{ \lg_b x : x > 0 \} = \sup \mathbb{R} = +\infty$$

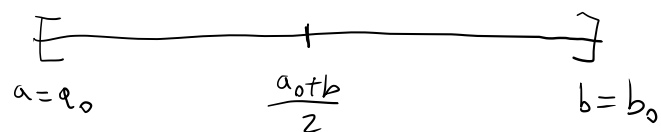
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_b x = \inf \{ \lg_b x : x > 0 \} = \inf \mathbb{R} = -\infty$$

Teorema (Bolzano Weierstrass) Siano $a < b$ due numeri

reali e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $[a, b]$.

Allora $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che ha limite ed il limite $L \in [a, b]$.

Dim Si procede in modo simile al teorema degli zeri definendo una ~~opportuna~~ successione decrescente di intervalli



Si sceglie come $[a_1, b_1]$ una metà che contenga elementi della successione per infinite valori dell'indice.

Resta definito una successione $\{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ di

intervalli. Definisco una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad \forall k = 0, \dots$

$$x_{n_0} \in [a_0, b_0] = [a, b]$$

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1] \quad n_0 < n_1$$

$$\text{Con } n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

Come nella dimostrazione del teorema degli zeri

$$\exists c \in [a, b] \quad \text{t.c.} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = c = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = c \quad \text{per i Corollari.}$$