Elementi di Matematica Finanziaria per l'Estimo

Raul Berto

rberto@units.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

La Matematica Finanziaria

La matematica finanziaria è lo strumento operativo per **analizzare le operazioni economico-finanziarie**, intese come le operazioni che hanno per oggetto l'impiego di uno o più capitali monetari o riconducibili al metro monetario.

Essa fornisce gli strumenti per:

- confrontare fatti economici e finanziari che avvengono in momenti diversi;
- stimare il valor capitale di flussi di redditi futuri (rendite);
- stimare il valore attuale di un credito futuro;
- stimare il valore futuro di un investimento attuale;
- determinare l'ammontare della rata di un mutuo;
- stimare l'ammontare di interessi su debito;
- …

Le Prestazioni Finanziarie

- Le prestazioni finanziarie sono rappresentate da **flussi di costo e di ricavo**.

- Perché una prestazione finanziaria sia definita univocamente dobbiamo conoscerne:
  - **l'ammontare;**
  - **la scadenza**.

L'Interesse

L'interesse è il **prezzo d'uso del capitale** e si esprime con saggio/tasso.

- Il saggio (tasso) d'interesse r può essere espresso in **termini percentuali** $r = 5\%$ o in termini unitari $r = 0{,}05$. L'**interesse unitario** è l'interesse maturato da una unità di moneta in una unità di tempo (anno).

- Il saggio di interesse è **direttamente proporzionale al rischio** (ad un rischio maggiore corrisponde un maggiore tasso di interesse).

Il Montante

- Il **montante** M o C_n è la somma del capitale iniziale C_0 e dei relativi interessi I maturati in un certo periodo di tempo n.
- Il **montante unitario** (*q*) è la somma fra un capitale iniziale pari a 1 € (o altra valuta) e degli interessi maturati in un anno:

$$C_1 = C_0 + C_0\, r = C_0(1 + r) = C_0\, q$$

(es. $r = 0{,}05 \quad q = 1{,}05$)

Interesse semplice e composto

L'**interesse semplice**

- gli interessi maturati non producono a loro volta altri interessi (nella pratica si usa quando si considera un periodo di tempo uguale o inferiore ad 1 anno o quando è previsto per legge).

L'**interesse composto**

- gli interessi maturati maturano a loro volta altri interessi (si usa quando si considera un periodo di tempo superiore ad 1 anno).

Interesse semplice: periodo uguale all'anno

- Interesse $I = C_0 \ r$
- Montante $C_1 = C_0 \, q$
- Valore scontato $C_0 = C_1 \ q^{-1}$

La somma di 1.000 € viene depositata in banca al saggio di interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare:

a) degli **interessi** dopo un anno

$$I = C_0 \, r = 1.000 \cdot 0{,}05 = 50 \text{ €}$$

b) del **montante** dopo un anno

$$C_1 = C_0 + I = C_0(1 + r) = C_0 \, q = 1.000 \cdot 1{,}05 = 1.050 \text{ €}$$

Interesse semplice: periodo inferiore all'anno

La durata viene indicata come **frazione di anno**: $n = gg/365$

- Interesse $I = C_0 rn$
- Montante $C_n = C_0(1 + rn)$
- Valore scontato $C_0 = C_n(1 + rn)^{-1}$

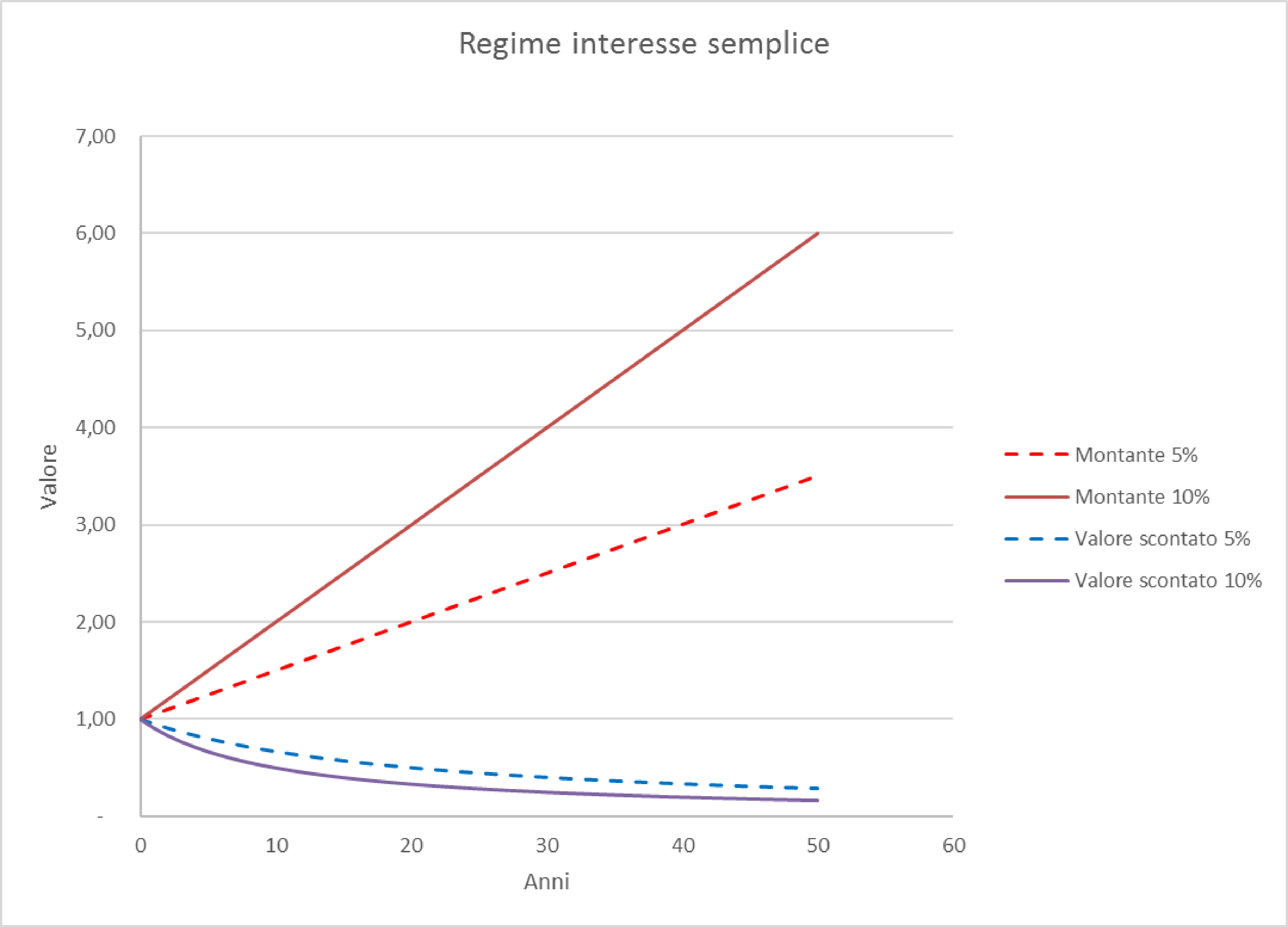
La somma di 1.000 € viene depositata in banca per 90 giorni all'interesse del 5%. Si vuol conoscere l'ammontare:

a) degli **interessi**

$$I = C_0 rn = 1.000 \cdot 0{,}05 \cdot (90/365) = 12{,}39\ €$$

b) del **montante**

$$C_n = C_0 + C_0 rn = C_0(1 + rn) = 1.012{,}39\ €$$


Regime interesse semplice
Valore
Anni
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
-
0
10
20
30
40
50
60
Montante 5%
Montante 10%
Valore scontato 5%
Valore scontato 10%

Interesse composto: la determinazione del montante dopo n anni

Dopo 1 anno: $C_1 = C_0 + C_0 r = C_0 (1 + r)$

Dopo 2 anni: $C_2 = C_1 + C_1 r = C_1 (1 + r)$

essendo

$C_1 = C_0 (1 + r)$

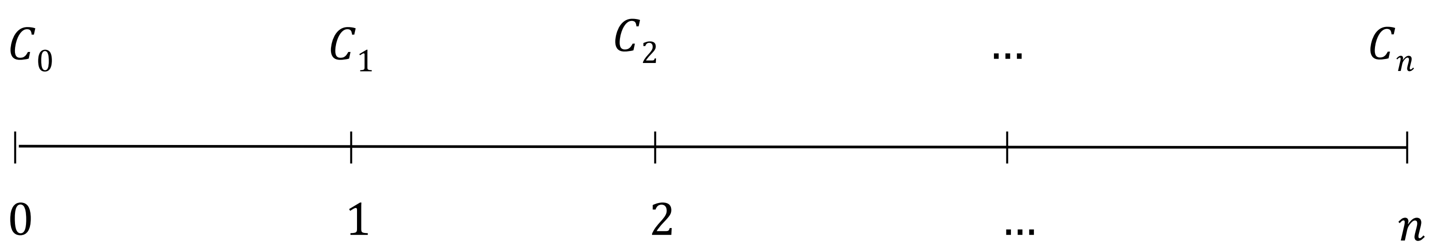
avremo

$C_2 = C_0 (1 + r)(1 + r)$

$C_2 = C_0 q^2$

Quindi $\boldsymbol{C_n = C_0 q^n}$ è il montante

$\boldsymbol{C_0 = C_n q^{-n}}$ è il valore scontato



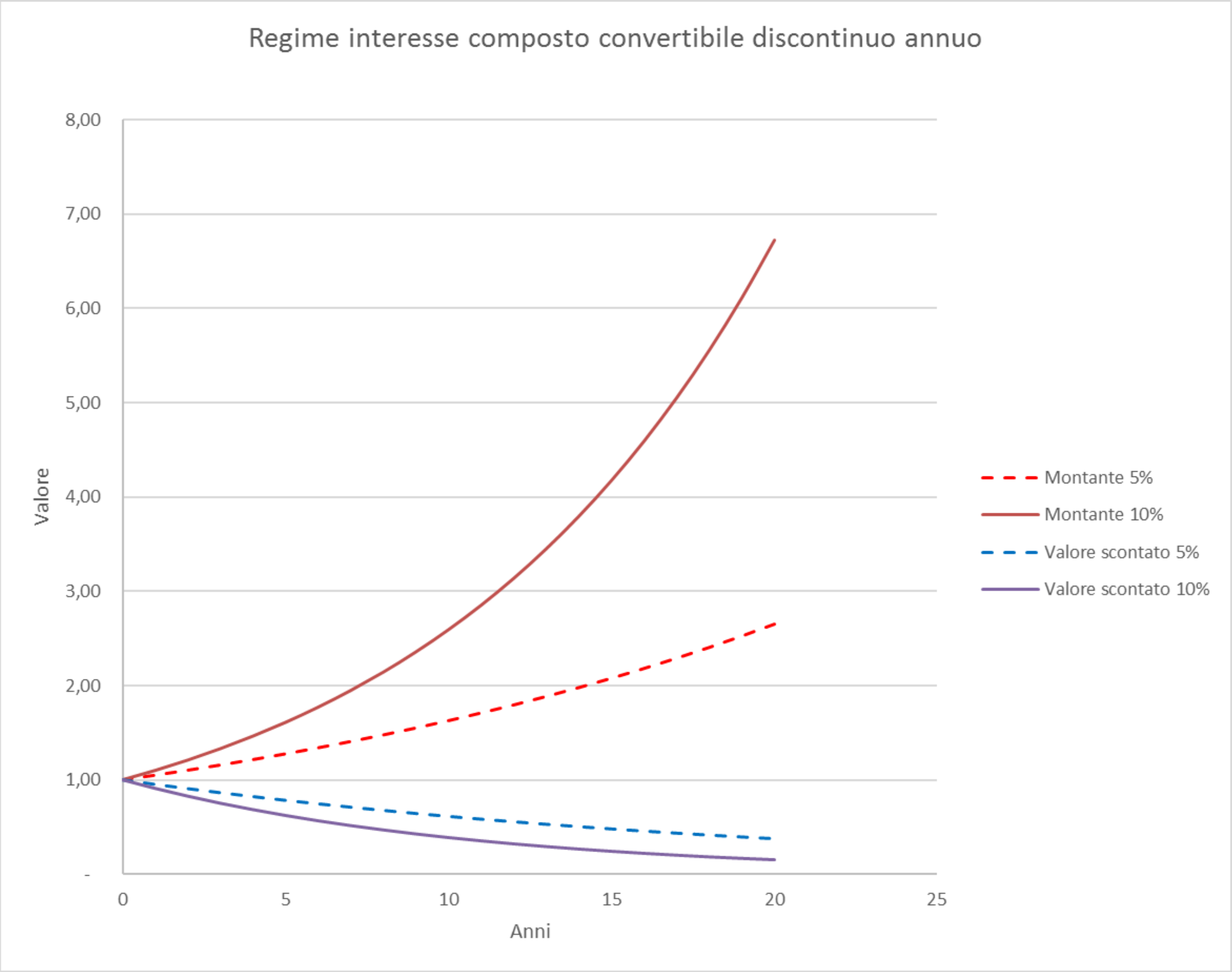
Interesse composto: esempio

- A quanto ammonterà, tra **10 anni** (n), il capitale di **1.000 €** (C_0) investito in titoli al saggio del **5%**, nell'ipotesi che la convertibilità dell'interesse sia annua?

$$M = C_0\, q^n$$

$$1.000 \times 1{,}05^{10} = 1.629\ €$$

- Se l'interesse non fosse composto, cioè se gli interessi non maturassero altri interessi, il montante sarebbe 1.500 €.


Regime interesse composto convertibile discontinuo annuo
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
-
Valore
0
5
10
15
20
25
Anni
Montante 5%
Montante 10%
Valore scontato 5%
Valore scontato 10%

Tasso Annuo Nominale e Tasso Annuo Effettivo

Tasso Annuo Nominale (TAN)

Tasso interesse puro che corrisponde al Tasso Annuo Effettivo in regime di interesse composto convertibile annuo.

Tasso Annuo Effettivo (TAE)

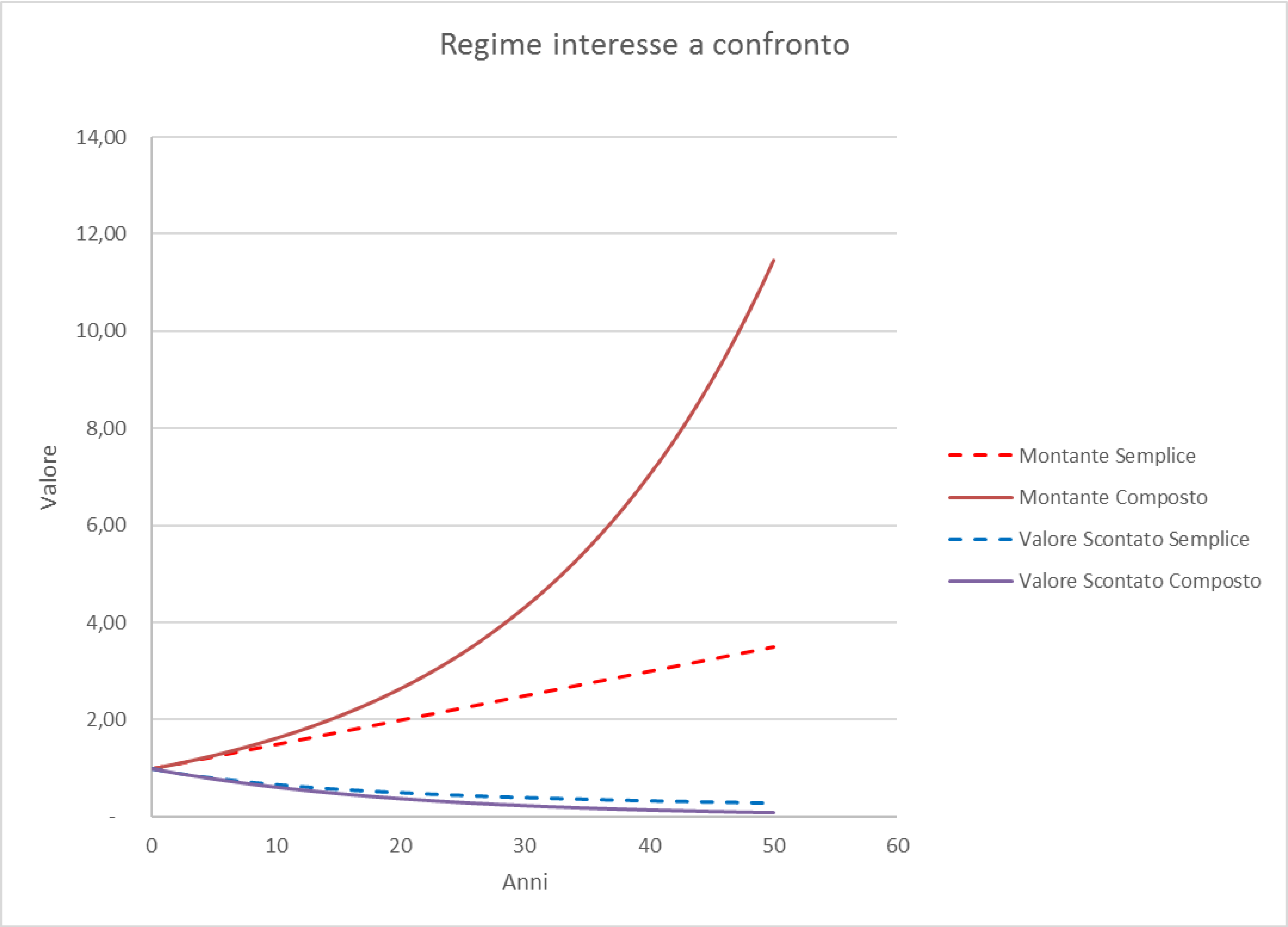
Tasso di interesse annuo effettivamente pagato sul capitale e dipende dal numero di volte k che l'interesse monta a capitale in un anno (semestralmente: $k = 2$, mensilmente: $k = 12$, ecc.)

Il TAN differisce dal TAE in ragione di k.

$$TAE = \left(1 + \frac{TAN}{k}\right)^{k} - 1$$

Tasso Annuo Nominale e Tasso Annuo Effettivo

Convertibilità interessi	k	TAN	TAE
Annuale	1	0,06	0,06000
Semestrale	2	0,06	0,06090
Trimestrale	4	0,06	0,06136
Mensile	12	0,06	0,06168
Giornaliera	365	0,06	0,06183
Istantanea	∞	0,06	0,06184

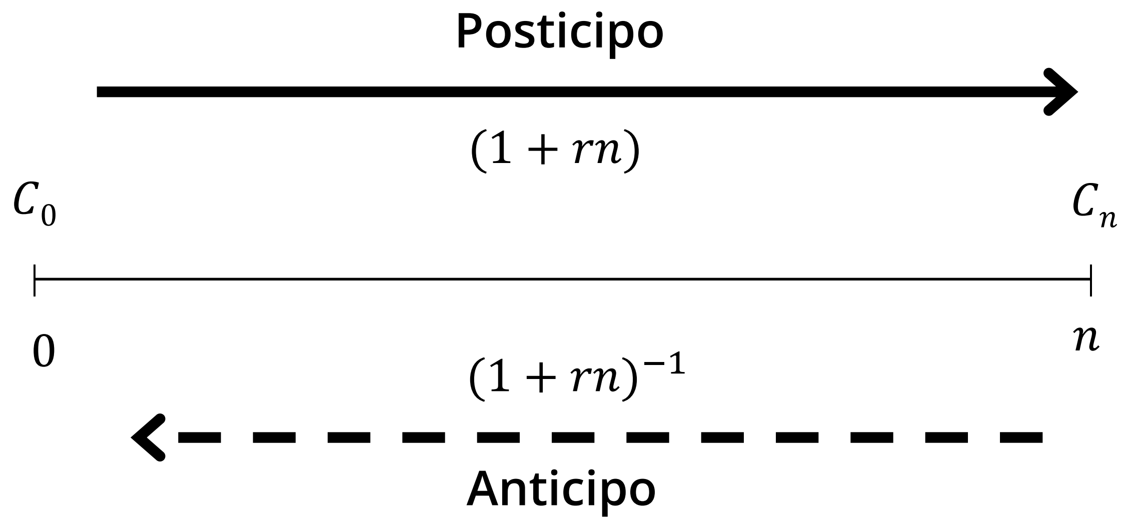

Regime interesse a confronto
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
-
Valore
0
10
20
30
40
50
60
Anni
Montante Semplice
Montante Composto
Valore Scontato Semplice
Valore Scontato Composto

Spostamento di capitali nel tempo

- Non è possibile addizionare, sottrarre o confrontare tra loro valori differiti nel tempo, se prima non sono riportati allo stesso momento.
- E’ necessario individuare le formule che consentono di anticipare o di posticipare ciascun valore.
- Un valore spostato nel futuro si trasforma in **montante**, spostato nel passato si trasforma in **valore scontato**.

Periodi inferiori o uguali all'anno
Regime interesse semplice

- Coefficiente di posticipazione $(1 + rn)$
- Coefficiente di anticipazione $(1 + rn)^{-1}$



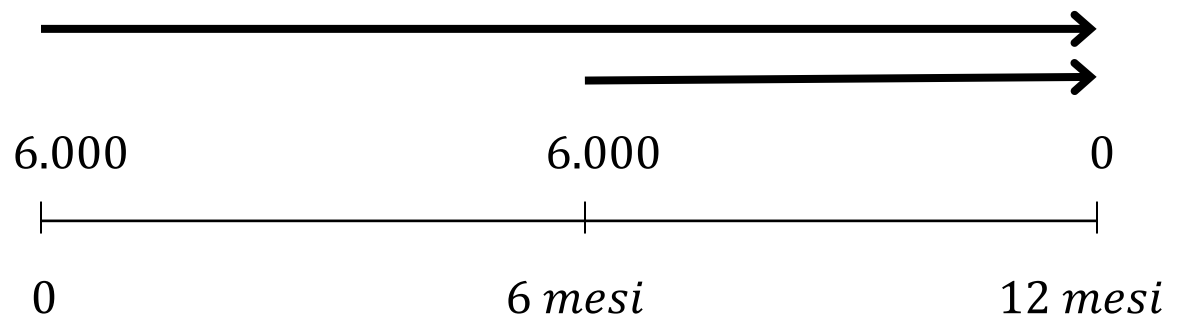
Esercizio

Il canone annuo del vostro appartamento è suddiviso in due semestralità anticipate di 6.000 € ciascuna.

A quanto ammonta l'affitto percepito dal proprietario, riferito a fine anno?

Sia $r = 5\%$

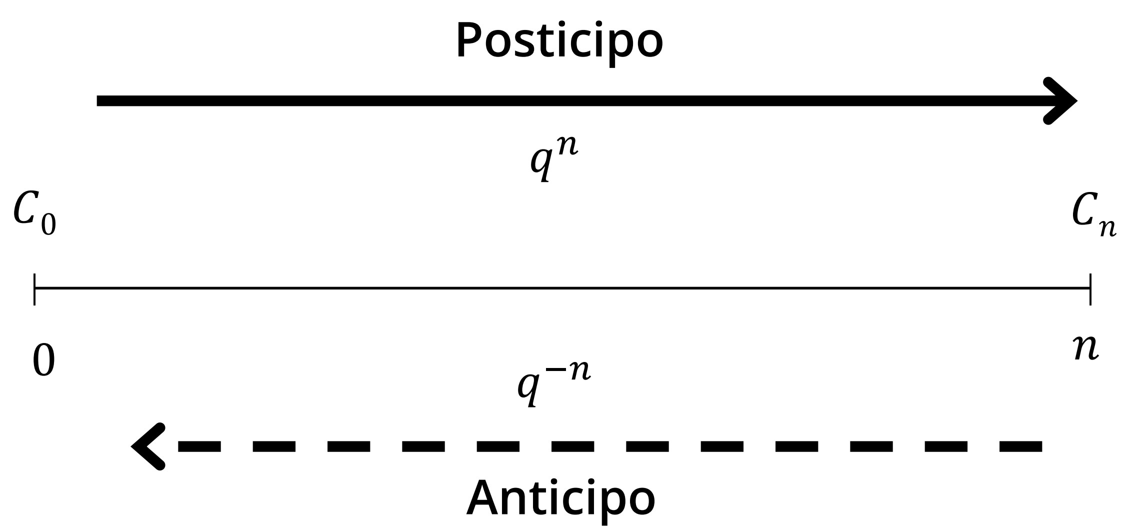
Posticipo $(1 + rn)$



$$6.000 \times (1 + 0.05) + 6.000\,(1 + 0.05 \times 1/2) = 6.000 \times 1.05 + 6.000 \times (1.025)$$
$$= \mathbf{12.450}\ €$$

Periodi superiori all'anno
Regime di interesse composto

- Coefficiente di posticipazione q^n
- Coefficiente di anticipazione q^{-n}

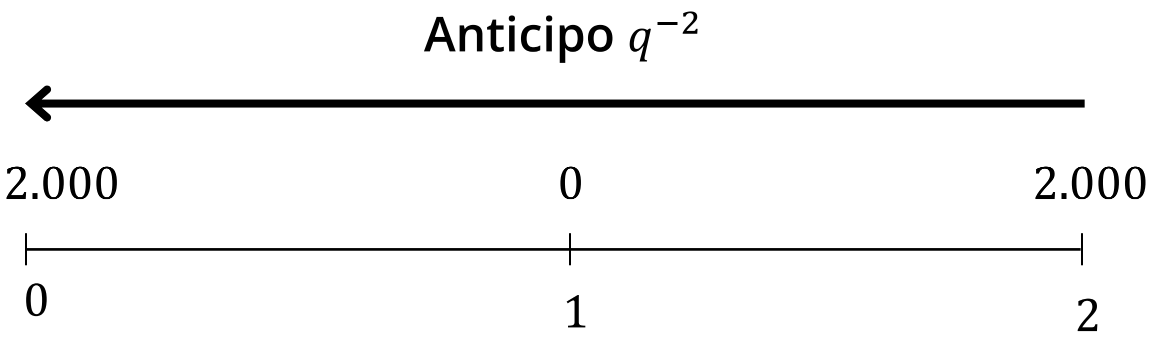


Esercizio

Comperate un nuovo computer che pagate in 2 rate da 2.000 Euro: la prima subito, la seconda fra due anni.

Quanto costa il computer al momento attuale?

Sia $r = 6\%$



$$2.000 + 2.000 \times 1{,}06^{-2} = \mathbf{3.780}\ €$$

Regimi finanziari e scindibilità

Un regime finanziario è scindibile se il montante dipende solo dal tempo n e non da eventuali capitalizzazioni intermedie m.

- Il regime di interesse semplice non è scindibile

$$C_0\,(1 + rn) \neq C_0(1 + rm)[1 + r\,(n - m)]$$

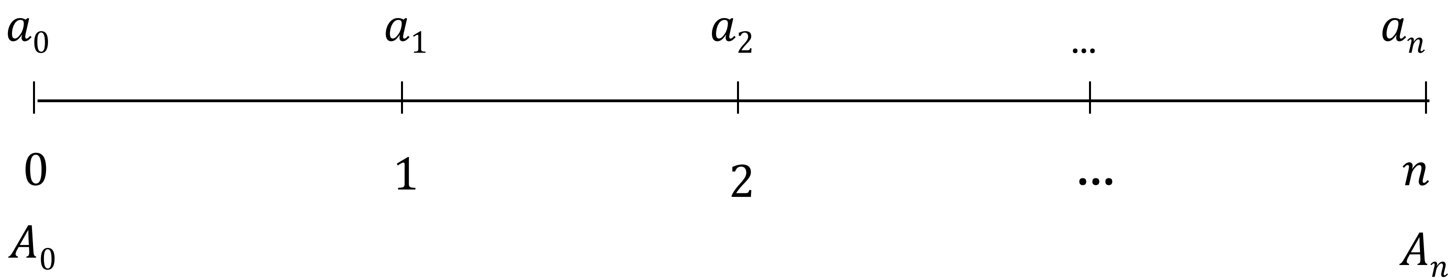
- Il regime di interesse composto è scindibile

$$C_0\;q^n = C_0\;q^m\;q^{n-m}$$

Le annualità

- Le annualità a sono prestazioni finanziarie che si verificano ad intervalli annuali.
- Le annualità sono classificate in:
  - **posticipate o anticipate**, in base alla scadenza di ciascuna annualità, rispettivamente alla fine o all'inizio dell'anno;
  - **costanti o variabili**, in base all'ammontare di ciascuna annualità;
  - **limitate o illimitate**, in base alla durata complessiva della serie di prestazioni.

Annualità variabili e limitate

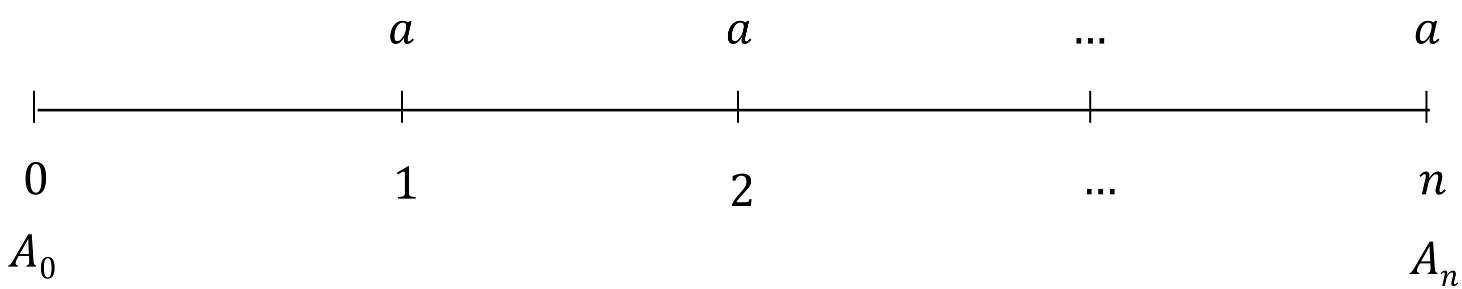


Gli strumenti disponibili: **coefficienti di anticipazione e posticipazione**.

Le accumulazioni iniziale e finale assumono rispettivamente la forma:

- $A_0 = a_0 + a_1/q + a_2/q^2 + \cdots + an/q^n$
- $An = a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + an$
- $A_0 = An/q^n$
- $An = A_0 \cdot q^n$

Annualità costanti, posticipate, limitate



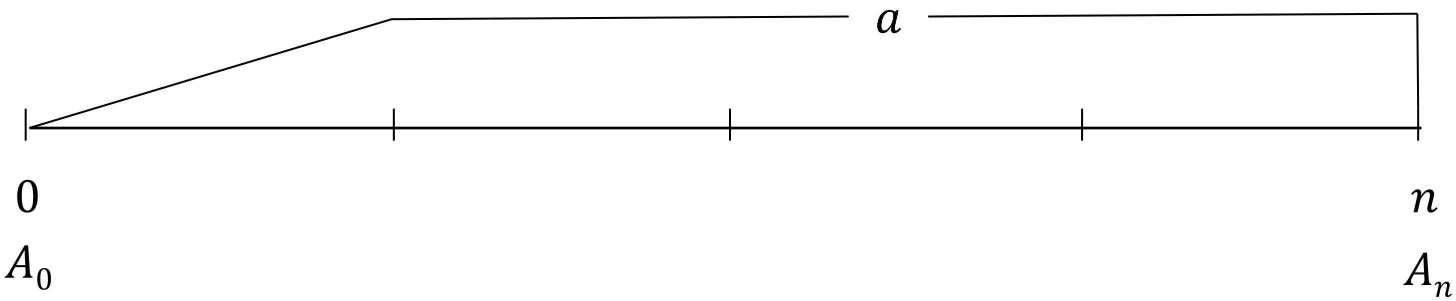
Accumulazione finale

$$A_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Progressione geometrica crescente di ragione q la cui somma è pari al rapporto fra il prodotto dell'ultimo termine per la ragione, meno il primo termine della progressione, e la ragione meno uno:

$$A_n = a\frac{q^{n-1}q-1}{q-1} = a\frac{q^n-1}{r}$$

Annualità costanti, posticipate, limitate



Accumulazione finale

$$A_n = a\frac{q^n - 1}{r}$$

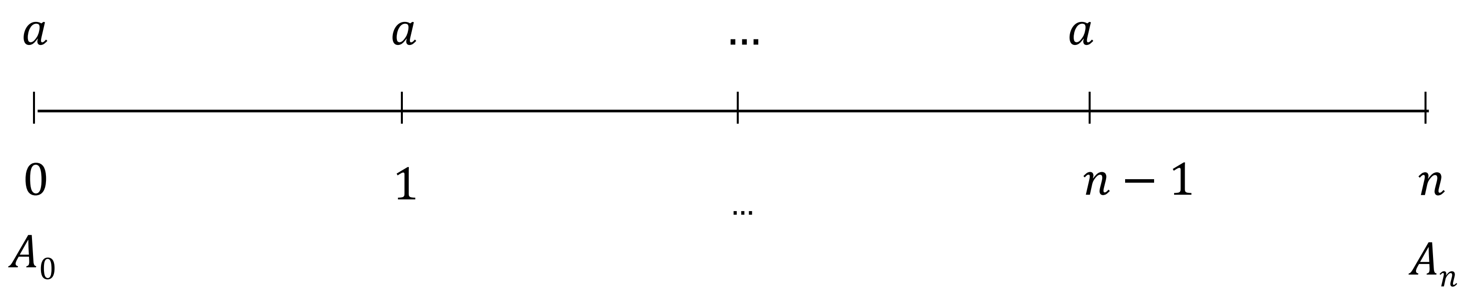
Accumulazione iniziale

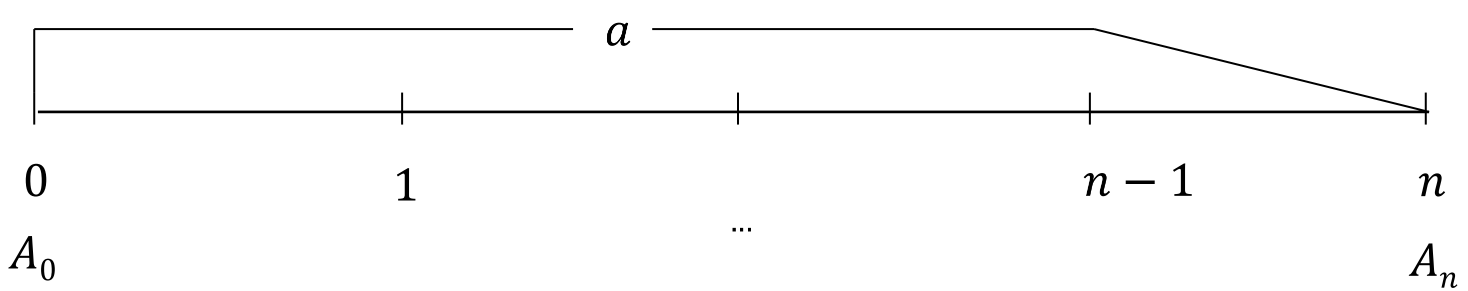
$$A_0 = \frac{A_n}{q^n} = a\frac{q^n - 1}{rq^n}$$

Accumulazione intermedia

$$A_m = A_0 q^m = \frac{A_n}{q^{n-m}}$$

Annualità costanti, anticipate, limitate



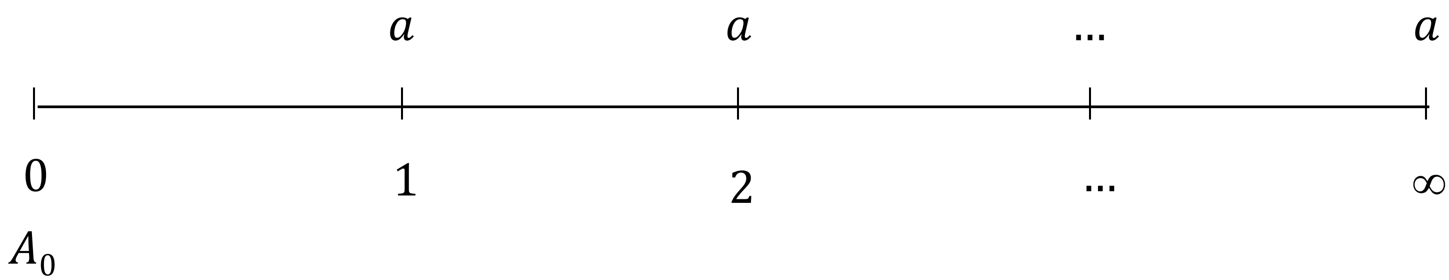


Accumulazione finale $$A_n = aq\frac{q^n - 1}{r}$$

Accumulazione iniziale $$A_0 = aq\frac{q^n - 1}{rq^n}$$

Accumulazione intermedia $$A_m = A_0 q^m = \frac{A_n}{q^{n-m}}$$

Annualità costanti e illimitate



Trattandosi di annualità illimitate $$\lim_{n\to\infty}\frac{q^n-1}{rq^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q^n}{rq^n}-\frac{1}{rq^n}\right)=\frac{1}{r}$$

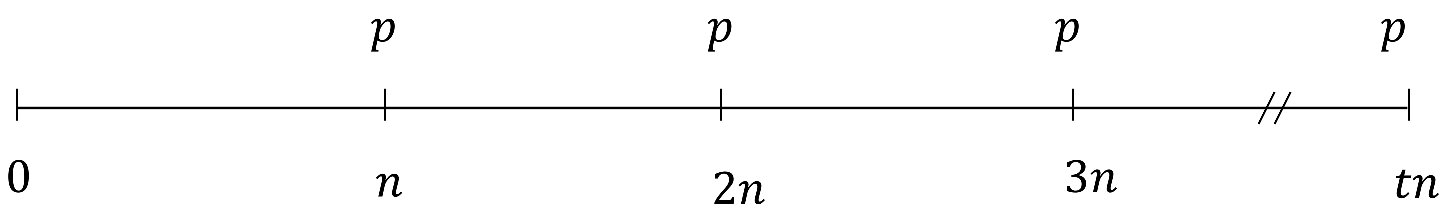
Posticipate $$A_0=\frac{a}{r}$$

Anticipate $$A_0=\frac{aq}{r}$$

Accumulazione intermedia $$A_m= A_0q^m$$

Le periodicità (o poliannualità)

Le periodicità o poliannualità p sono prestazioni finanziarie che si ripetono ad intervalli regolari (turni) n, multipli dell'anno.



Accumulazione finale

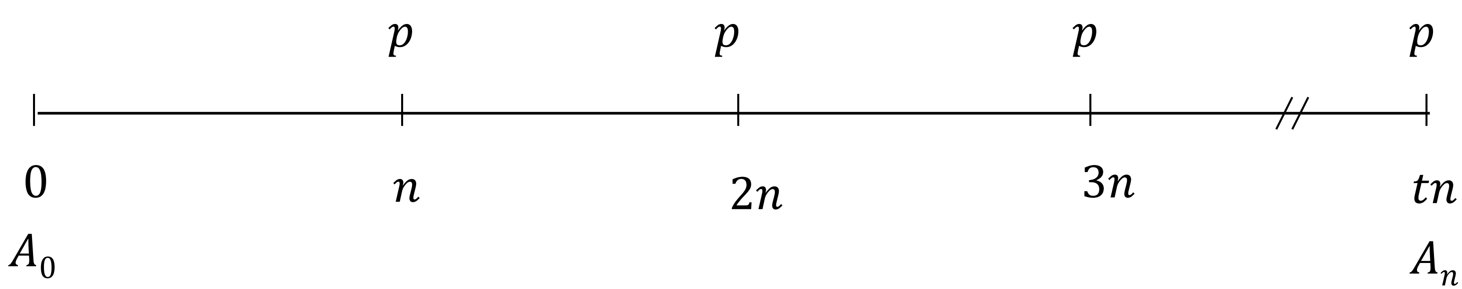
$$A_n = p + pq^n + pq^{2n} + \cdots + pq^{(t-2)n} + pq^{(t-1)n}$$

$$= p(1 + q^n + q^{2n} + \cdots + q^{(t-2)n} + q^{(t-1)n})$$

Progressione geometrica crescente di ragione q^n la cui somma è pari al rapporto fra il prodotto dell'ultimo termine per la ragione, meno il primo termine della progressione, e la ragione meno uno:

$$A_n = p\,\frac{q^{(t-1)n}q^n - 1}{q^n - 1} = p\,\frac{q^{tn} - 1}{q^n - 1}$$

Periodicità costanti, posticipate, limitate

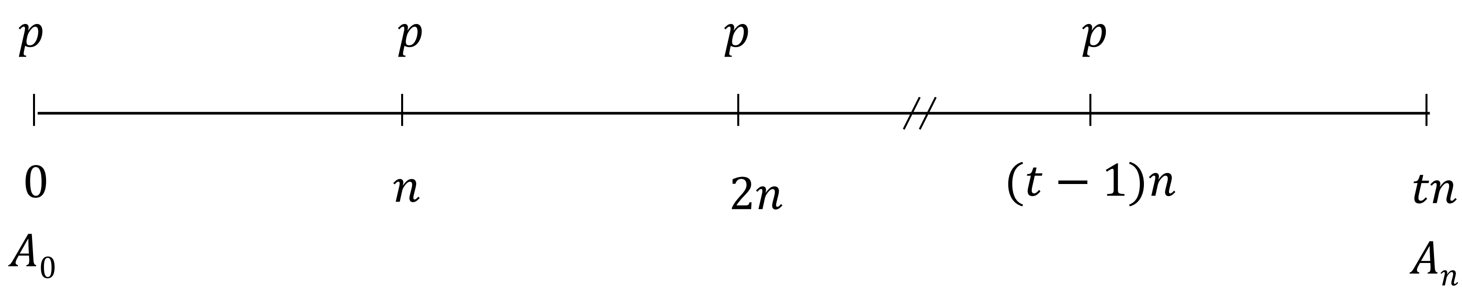


Accumulazione finale $$A_{tn} = p\,\frac{q^{tn}-1}{q^n-1}$$

Accumulazione iniziale $$A_0 = p\,\frac{q^{tn}-1}{(q^n-1)q^{tn}}$$

Accumulazione intermedia $$A_m = A_0 q^m = \frac{A_{tn}}{q^{tn-m}}$$

Periodicità costanti, anticipate, limitate

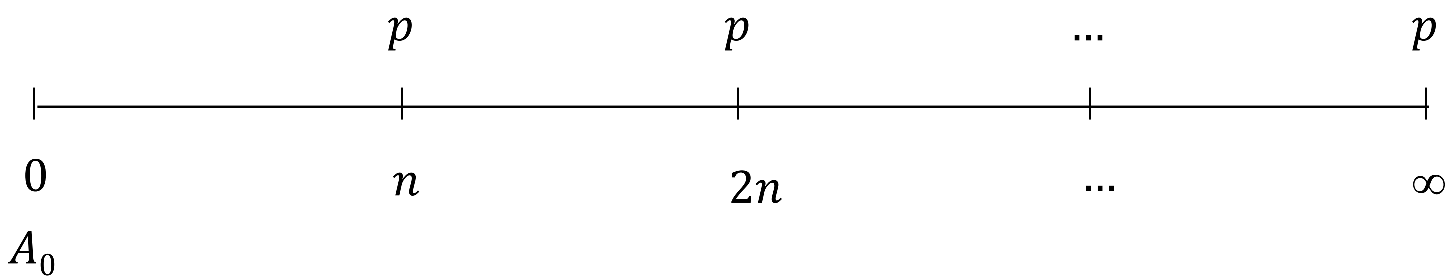


Accumulazione finale $$A_{tn} = pq^n \frac{q^{tn}-1}{q^n-1}$$

Accumulazione iniziale $$A_0 = pq^n \frac{q^{tn}-1}{(q^n-1)q^{tn}}$$

Accumulazione intermedia $$A_m = A_0 q^m = \frac{A_{tn}}{q^{tn-m}}$$

Periodicità costanti, posticipate, illimitate



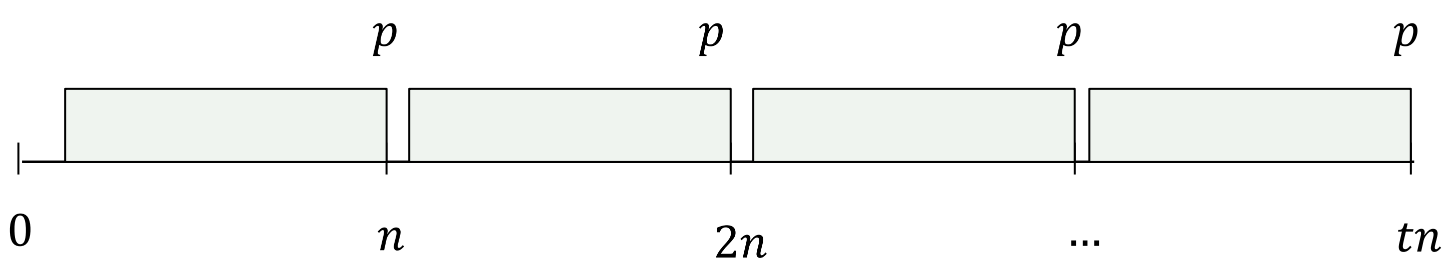
Trattandosi di periodicità illimitate $\lim_{t \to \infty} \frac{q^{tn} - 1}{(q^n - 1)q^{tn}} = \frac{1}{q^n - 1}$

Posticipate $A_0 = \frac{p}{q^n - 1}$

Anticipate $A_0 = \frac{pq^n}{q^n - 1}$

Accumulazione intermedia $A_m = A_0 q^m$

Trasformazione di periodicità p in annualità a



$$a = p \frac{r}{q^n - 1}$$

Trovo una annualità a che si verifica tn volte e corrisponde a una poliennalità p di turno n che si verifica t volte

Reintegrazione

La quota di reintegrazione Q_{re} è quell'**annualità costante e posticipata** che viene accumulata per un certo numero di anni allo scopo di costituire/rinnovare un capitale di valore iniziale V_i e valore finale V_f .

$$Q_{re} = (V_i - V_f)\frac{r}{q^n - 1}$$

Esempio

Dovendo sostituire ogni 10 anni l'automobile del valore di acquisto a nuovo di 30.000 € e di recupero pari a 5.000 €, si vuol conoscere la somma annua posticipata da accantonare al saggio del 5%.

$$Q_{re} = (30.000 - 5.000) \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^{10} - 1} = 25.000 \cdot 0{,}0795 = 1.987{,}61$$

Esercizio

Un immobile di civile abitazione richiede, per poter fornire un reddito costante, le seguenti spese periodiche:

a) spese per tinteggiatura ogni 5 anni (15 €/mq);

b) spese per rinnovo impianti ogni 25 anni (150 €/mq);

c) spese per ristrutturazione interna ogni 50 anni (1.000 €/mq).

Calcolare la quota annua relativa alle suddette spese.

$$Qa = 15 \cdot \frac{r}{q^5 - 1} + 150 \cdot \frac{r}{q^{25} - 1} + 1.000 \cdot \frac{r}{q^{50} - 1}$$

Ammortamento

La quota di ammortamento Q_{am} è quell'annualità costante, posticipata e limitata che deve essere corrisposta per estinguere un debito contratto inizialmente D_i.

$$Q_{am} = D_i \frac{rq^n}{q^n - 1}$$

La Q_{am} può essere disaggregata in due distinte componenti:

- quota capitale Q_c
- quota interessi Q_i

Esercizio

Si costruisca il piano di ammortamento di un debito di 10.000 € da estinguere in tre anni al saggio del 10%, con rate annue, costanti e posticipate.

$$Q_{am} = 10.000 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1,1^3}{1,1^3 - 1} = 10.000 \cdot 0{,}4021 = 4.021$$

Anno	Rata	Quota capitale	Quota interessi	Debito estinto	Debito residuo
0	-	-	-	-	10.000
1	4.021	3.021	1.000	3.021	6.979
2	4.021	3.323	698	6.344	3.656
3	4.021	3.656	365	10.000	0

Esercizio

La situazione finanziaria di un'impresa è la seguente:

- 11.000 € da incassare fra un mese
- 40.000 € da versare fra sei mesi
- 20.000 € da restituire fra due anni.

Assumendo un tasso di interesse pari al 6 % annuo, calcolare:

a) l'indebitamento totale all'attualità

$$A_0 = -\frac{11.000}{1 + 0{,}06\,\frac{1}{12}} + \frac{40.000}{1 + 0{,}06\,\frac{6}{12}} + \frac{20.000}{1{,}06^2} = 45.689{,}61$$

b) la rata semestrale posticipata che estingue il debito in sette anni.

$$Q_{as} = 45.689{,}61 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 1{,}03^{14}}{1{,}03^{14} - 1} = 4.044{,}73$$

Esercizio

La costruzione di un complesso immobiliare richiede i seguenti esborsi:

- 3 mln di € da versare subito
- 5 mln di € all'anno da versare per i prossimi 3 anni
- 4 mln di € da versare fra 4 anni

Assumendo un tasso di interesse pari al 6 %, calcolare la rata annua posticipata del mutuo decennale che finanzia la costruzione.

Fabbisogno finanziario

$$A_0 = 3 + 5 \cdot \frac{1{,}06^3 - 1}{0{,}06 \cdot 1{,}06^3} + \frac{4}{1{,}06^4} = 19{,}53$$

Quota ammortamento

$$Q_a = 19{,}53 \cdot \frac{0{,}06 \cdot 1{,}06^{10}}{1{,}06^{10} - 1} = 2{,}65$$

Esercizio

Compilare il piano di ammortamento di un mutuo di 150.000 € estinguibile con 10 rate annue posticipate al tasso di interesse iniziale del 4%.

Dopo aver pagato la quarta rata il tasso di interesse sale al 5%.

Quota ammortamento (1-4)

$$Q_a = 150.000 \cdot \frac{0,04 \cdot 1,04^{10}}{1,04^{10} - 1} = 18.493,64$$

Anno	Quota amm.to	Quota capitale	Quota interessi	Debito estinto	Debito residuo
0					150.000,00 €
1	18.493,64 €	12.493,64 €	6.000,00 €	12.493,64 €	137.506,36 €
2	18.493,64 €	12.993,39 €	5.500,25 €	25.487,03 €	124.512,97 €
3	18.493,64 €	13.513,12 €	4.980,52 €	39.000,15 €	110.999,85 €
4	18.493,64 €	14.053,65 €	4.439,99 €	53.053,80 €	96.946,20 €

Esercizio (segue)

Quota ammortamento (5-10)

$$Q_a = 96.496 \cdot \frac{0,05 \cdot 1,05^6}{1,05^6 - 1} = 19.100,09$$

Anno	Quota amm.to	Quota capitale	Quota interessi	Debito estinto	Debito residuo
0					150.000,00 €
1	18.493,64 €	12.493,64 €	6.000,00 €	12.493,64 €	137.506,36 €
2	18.493,64 €	12.993,39 €	5.500,25 €	25.487,03 €	124.512,97 €
3	18.493,64 €	13.513,12 €	4.980,52 €	39.000,15 €	110.999,85 €
4	18.493,64 €	14.053,65 €	4.439,99 €	53.053,80 €	96.946,20 €
5	19.100,09 €	14.252,78 €	4.847,31 €	67.306,58 €	82.693,42 €
6	19.100,09 €	14.965,42 €	4.134,67 €	82.272,01 €	67.727,99 €
7	19.100,09 €	15.713,70 €	3.386,40 €	97.985,70 €	52.014,30 €
8	19.100,09 €	16.499,38 €	2.600,71 €	114.485,08 €	35.514,92 €
9	19.100,09 €	17.324,35 €	1.775,75 €	131.809,43 €	18.190,57 €
10	19.100,09 €	18.190,57 €	909,53 €	150.000,00 €	- €

Esercizio

La manutenzione di un fabbricato richiede le seguenti spese:

- 2.000 € ogni 4 anni
- 100 € ogni 6 mesi
- 6.000 € ogni 10 anni

Assumendo un tasso di interesse pari al 10 %, calcolare la quota di manutenzione annua Q_m.

$$Q_m = 2.000 \cdot \frac{0{,}1}{1,1^4 - 1} + 100 + 100 \cdot \left(1 + 0{,}1 \cdot \frac{6}{12}\right) + 6.000 \cdot \frac{0{,}1}{1,1^{10} - 1} = 1.012{,}41$$

Alcuni saggi di uso comune

- **Saggio interesse** r: prezzo d'uso (costo) del capitale (posticipazione)
- **Saggio di sconto** d: costo dell'anticipazione di un capitale
- **Saggio di capitalizzazione**: rapporto fra reddito e valore di un bene
- **Saggio di interesse legale** rl: saggio fissato per norma con cui si regolano i rapporti (debiti/crediti) fra cittadino e pubblica amministrazione
  $sl = Inflazione + Rendimento\ medio\ titoli\ di\ stato\ (BOT)\ a\ 12\ mesi$
- **Tasso ufficiale di riferimento TUR**: tasso al quale la BCE finanzia le banche per le operazioni principali
- **EURIBOR**: European Interbank Offered Rate, è un tasso di interesse di riferimento che indica il tasso medio al quale un gruppo selezionato di banche europee si presta denaro tra loro nel mercato interbancario a breve termine, in euro. Riferimento per i tassi praticati nei **mutui a tasso variabile**
- **IRS (o EURIRS)**: (European) Interest Rate Swap, tasso di riferimento nei **mutui a tasso fisso**.