OPERAZIONI CON LIMITI

Siano $f(x)$, $g(x)$ t.c.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$$

Allora:

① $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot L_1$, $\forall\, c\in\mathbb{R}$

② $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2$

③ $\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = L_1 \cdot L_2$

④ $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L_1}$ se $L_1 \neq 0$

⑤ $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ se $L_2 \neq 0$

NEL CASO L_1 e/o L_2 sono $\pm\infty$

① Se $L_1 = \pm\infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = \pm\infty$ se $c>0$

$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = \mp\infty$ se $c<0$

② Se $L_1 = L_2 = +\infty$, opp. $L_1 = L_2 = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = +\infty$, risp. $-\infty$

se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty$, non si può dire nulla

e se $L_1 = +\infty$, e $L_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$

o viceversa

se $L_1 = -\infty$, e $L_2 \in \mathbb{R}$ (o viceversa) $\Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$

③ $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 = \pm\infty$ (o viceversa)

$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \pm\infty$ se $L_1 > 0$

$\mp\infty$ se $L_1 < 0$

Esempio: Funzioni logistiche

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-k(x-x_0)}} + b \qquad k>0,\ a>0,\ b>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \left(\frac{a}{1+e^{-k(x-x_0)}} + b\right)$$

$x\to+\infty$: $a \to a$; $e^{-k(x-x_0)} \to 0$; $1+0 = 0$; $\to a$

$e^{-k(x-x_0)} = \left(e^{-1}\right)^{k(x-x_0)} = \left(\frac{1}{e}\right)^{k(x-x_0)}$

$e \sim 2{,}71$, $2 < e < 3$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

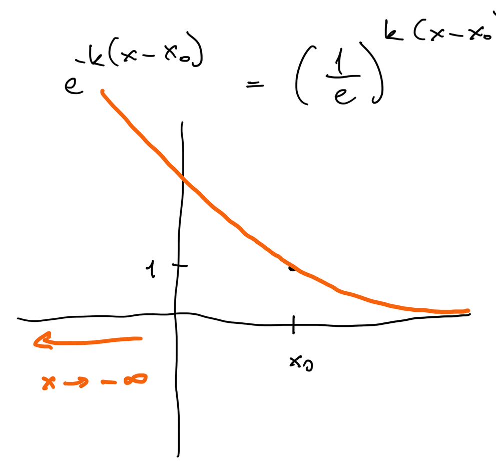
in part. $0 < \frac{1}{e} < 1$

$= a+b$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a}{1+e^{-k(x-x_0)}} + b\right) = b$$

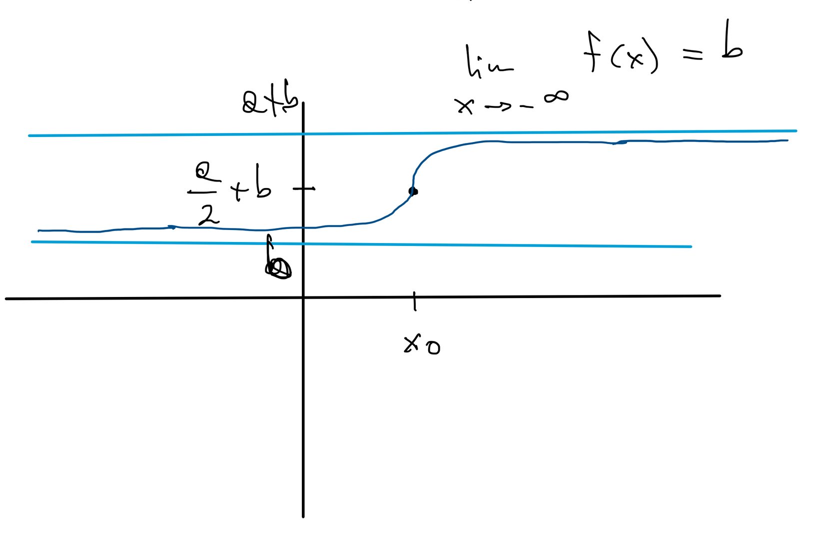
$x\to-\infty$: $e^{-k(x-x_0)} \to +\infty$; $\frac{a}{1+e^{-k(x-x_0)}} \to 0$; $0+b$

$e^{-k(x-x_0)} = \left(\frac{1}{e}\right)^{k(x-x_0)}$



In conclusione: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a+b$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$



CONTINUITÀ DI FUNZ. IN UN PUNTO

Def: Sia $f: I \to \mathbb{R}$

I intervallo, e sia $x_0 \in I$ (punto interno, non un estremo)

diremo che f è continua in x_0 se

① esiste ed è finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (in part. esistono il limite destro e sinistro ed essi coincidono)

② si ha $l = f(x_0)$ (il limite è uguale al valore della f in x_0)

Def.: Dato un intervallo aperto $I = (a,b)$,

f si dice CONTINUA su I se

f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in I$.

Def: f si dice DISCONTINUA in x_0 se NON è continua in x_0.

Prop.: Tutte le funzioni elementari che abbiamo visto (x^n, polin., esp., log., sin, cos, tg) sono continue su tutto l'insieme di definizione (dominio)

Teorema: $+$, $\cdot$, quoziente, composizione di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Esempio: Funzione PARTE INTERA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = [x] = \max\{k\in\mathbb{Z} : k \le x\}$

es: $x = e = 2{,}71\ldots$

$0 \le e$

$k=1$: $1 \le e$ ✓

$\boxed{k=2 \quad 2 \le e \quad ✓}$

$k=3$ $3 \le e$ ✗

è una FUNZ. COST. A TRATTI

ad es. $f(x) = 2$: $2 \le x < 3$

$f(x) = 3$ $3 \le x < 4$

$f(x) = 1$ $1 \le x < 2$

$f(x) = -3$ $-3 \le x < -2$

$f(x) = 0$ $0 \le x < 1$