Lezione 22 ottobre 2024

martedì 22 ottobre 2024 16:49

METODI DIFFERENZ. PER STUDIO CURVE ALG.

Visto: $g(t) \in K[t]$ (oppure $g(t) \in D[t]$)

$$g(t) = a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

$$g'(t) = d\, a_d t^{d-1} + (d-1) a_{d-1} t^{d-2} + \cdots + a_1$$

Cons. $K[t]_{\leq d} = \{ \text{polinomi } g(t) \mid \deg g \leq d \}$

è SSV, di dim. finita $d+1$;
una base è quella standard

$$\{ t^d, t^{d-1}, \ldots, t, 1 \}$$

AFFERMO: $\forall\, b \in K$, un'altra base
di $K[t]_{\leq d}$ è data:

$$\{ (t-b)^d, (t-b)^{d-1}, \ldots, t-b, 1 \}$$

infatti: sono LIN. INDIP. :

cons. comb. lineare

$$c_d \cdot (t-b)^d + c_{d-1} \cdot (t-b)^{d-1} + \cdots + c_1 \cdot (t-b) + c_0 \equiv 0$$

oss. il coeff. di t^d è c_d : $\Downarrow$ $c_d = 0$

$$c_{d-1} \cdot (t-b)^{d-1} + \cdots + c_1 (t-b) + c_0 \equiv 0$$

coeff. di t^{d-1} è c_{d-1} : $c_{d-1} = 0$

$\vdots$

$c_1 = 0$

$c_0 = 0$

Ovvero: dim. per induzione su d

Inoltre: $\{ (t-b)^d, \ldots, t-b, 1 \}$ sono $d+1$

$\Longrightarrow$ formano una base (sono anche generatori)

$\Longrightarrow$ ogni $g(t) \in K[t]_{\leq d}$ può essere
in modo unico come COMB. LIN. della nuova
base

$$g(t) = b_0 + b_1 \cdot (t-b) + b_2 \cdot (t-b)^2 + \cdots + b_d (t-b)^d$$

Voglio determinare i b_i : cons. derivate di g:

$$\boxed{g(b) = b_0}$$

$$g'(t) = b_1 + 2 b_2 (t-b) + \cdots + d\, b_d (t-b)^{d-1}$$

$$\boxed{g'(b) = b_1}$$

$$g''(t) = 2 b_2 + 3 \cdot 2\, b_3 (t-b) + \cdots + d(d-1) b_d (t-b)^{d-2}$$

$$g''(b) = 2 b_2 \Longrightarrow b_2 = \frac{g''(b)}{2}$$

$\vdots$

$$g^{(d)}(t) = d(d-1)(d-2)(d-3)\cdots 2\cdot 1\ b_d$$

$$g^{(d)}(b) = d!\ b_d \implies b_d = \frac{g^{(d)}(b)}{d!}$$

$\implies$

Teorema (Formula di Taylor per polinomi):

$$g(t) = \sum_{i=0}^{d} \frac{g^{(i)}(b)}{i!}(t-b)^i$$

DERIVATE PARZIALI:

$f \in \mathbb{K}[x,y]$ (oppure $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$)

Def.: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \partial_x f$

$\downarrow$ per brevità

derivata di $f \in \mathbb{K}[y][x]$

$$f(x,y) = a_d(y)\cdot x^d + a_{d-1}(y)\,x^{d-1} + \dots + a_1(y)\cdot x + a_0(y)$$

$$\partial_x f = d\,a_d(y)\,x^{d-1} + (d-1)\,a_{d-1}(y)\,x^{d-2} + \dots + a_1(y)$$

Analog. $\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f$

Derivate parz. sup.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \partial_{xy} f \quad ; \quad \partial_{xx} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\partial_{yy} f$$

Teorema (analogo Schwarz): $\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$

e per le derivate parz. succ.: non importa ordine delle indeterminate risp. alle quali deriviamo.

Formula di Taylor:

$\mathbb{K}[x,y]_{\leq d}$ è ssv di dim. finita $= \frac{(d+1)(d+2)}{2}$

base standard:

$$\left\{\begin{array}{ll} x^d,\ x^{d-1}y,\ x^{d-2}y^2,\ \dots,\ xy^{d-1},\ y^d, & :\ d+1 \\ x^{d-1},\ x^{d-2}y,\ x^{d-3}y^2,\ \dots,\ xy^{d-2},\ y^{d-1} & :\ d \\ \vdots & \\ x^2,\ xy,\ y^2 & 3 \\ x,\ y & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right\}$$

Si può dimostrare che $\forall\ (b_1, b_2) \in \mathbb{K}^2$

$\in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$

anche $\left\{ (x-b_1)^d,\ (x-b_1)^{d-1}(y-b_2),\ \dots,\ (y-b_2)^d, \right.$

$\vdots$

$(x-b_1),\ (y-b_2)$

$\left. 1 \right\}$

è base; scrivendo $f(x,y)$ in questa base, si ottiene

FORMULA DI TAYLOR:

$$f(x,y) = f(b_1,b_2) + (\partial_x f)(b_1,b_2)(x-b_1) + (\partial_y f)(b_1,b_2)(y-b_2)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(\partial_{xx} f)(b_1,b_2)\cdot(x-b_1)^2 + 2(\partial_{xy} f)(b_1,b_2)(x-b_1)(y-b_2) + (\partial_{yy} f)(b_1,b_2)\cdot(y-b_2)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[(\partial_{xxx} f)(b_1,b_2)\cdot(x-b_1)^3 + 3(\partial_{xxy} f)(b_1,b_2)(x-b_1)^2\cdot(y-b_2) + \dots\right]$$

$$+ \dots\dots$$

Scritture compatte:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

matrice 2 × 1
con entrate i polinomi
derivate parziali

COLONNA GRADIENTE

$$H_f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix}$$

MATRICE
HESSIANA di f

Possiamo riscrivere Taylor:

prodotto RC

$$f(x,y) = f(b_1,b_2) + \underbrace{{}^t\nabla f(b_1,b_2)}_{\text{colonna di scalari}} \cdot \begin{pmatrix} x-b_1 \\ y-b_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} (x-b_1) & (y-b_2) \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 1\times 2} \cdot \underbrace{H_f(b_1,b_2)}_{\substack{\text{matrice scalare}\\ 2\times 2}} \cdot \begin{pmatrix} x-b_1 \\ y-b_2 \end{pmatrix})$$

$$+ \dots$$

OSS.: $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, analog. def.

$\partial_{x_0} F$, $\partial_{x_1} F$, $\partial_{x_2} F$ e quelle successive

Dalle def. troviamo se F è OMOGENEO, allora $\partial_{x_i} F$ sono OMOGENEI, che sono: o nullo (se x_i non compare in F) oppure ha grado $d-1$.

Analog.: $\partial_{x_i x_j} F$ è $\equiv 0$ opp. omog. di grado $d-2$.

FORMULA DI DERIVAZ.

DI "COMPOSIZ. DI POLINOMI"

(polinomi valutati in altri polinomi)

$f \in \mathbb{K}[x,y]$, ovvero $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$

siano $x(t), y(t) \in K[t]$, $x_0(t), x_1(t), x_2(t) \in K[t]$: $F(x_0(t), x_1(t), x_2(t)) = G(t)$

sia $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\left(\begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto] & (x(t), y(t)) & \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{A}^2 \arrow[r, "f(x,y)"'] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}\right)$$

$$g'(t) = (\partial_x f)(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + (\partial_y f)(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= ({}^t\nabla f)(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RC

$$G'(t) =$$

$$= ({}^t\nabla F)(x_0(t), x_1(t), x_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_0'(t) \\ x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI EULERO :

$F \in \underbrace{K[x_0, x_1, x_2]_d}_{\{\text{polin. di grado } d\} \cup \{0\}}$ omogeneo di grado d

$$\Longrightarrow \quad x_0 \cdot \partial_{x_0} F + x_1 \cdot \partial_{x_1} F + x_2 \cdot \partial_{x_2} F = (\deg F) \cdot F$$

Esempio : $F = x_0 x_2^2 - x_1^3$

$$\partial_{x_0} F = x_2^2$$

$$\partial_{x_1} F = -3x_1^2$$

$$\partial_{x_2} F = 2x_0 x_2$$

$$x_0 \partial_{x_0} F + x_1 \partial_{x_1} F + x_2 \partial_{x_2} F = x_0 \cdot x_2^2 - 3x_1^3 + 2x_0 x_2^2$$

$$= 3x_0 \cdot x_2^2 - 3x_1^3 = 3 \cdot F$$

$$= (\deg F) \cdot F$$

Dim. F omogeneo $\Longleftrightarrow$

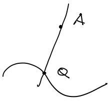
$$F(tx_0, tx_1, tx_2) = t^d \cdot F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2, t]$$

$$\frac{\partial F(tx_0, tx_1, tx_2)}{\partial t} = \begin{cases} (\partial_{x_0} F)(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial (tx_0)}{\partial t} + (\partial_{x_1} F)(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial (tx_1)}{\partial t} + (\partial_{x_2} F)(tx_0, tx_1, tx_2) \cdot \frac{\partial (tx_2)}{\partial t} \\ = (\partial_{x_0} F)(tx_i) \cdot x_0 + (\partial_{x_1} F)(tx_i) \cdot x_1 + (\partial_{x_2} F)(tx_i) \cdot x_2 \\ d \cdot t^{d-1} \cdot F(x_0, x_1, x_2) \end{cases} =$$

Infine: valuto in $t = 1$

APPLIC. alla RICERCA PUNTI SING.:

Caso proiettivo



$Q \in Z_p(F)$

cons. generica retta per $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$

Cons. $A \neq Q$, $A = (a_0 : a_1 : a_2)$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda q_0 + \mu a_0 \\ x_1 = \lambda q_1 + \mu a_1 \\ x_2 = \lambda q_2 + \mu a_2 \end{cases}$$

$F(\lambda q_0 + \mu a_0, \dots) =: G(\lambda, \mu)$

$Q \in Z_p(F)$ corrisponde alla coppia $(\bar\lambda : \bar\mu) = (1:0)$

$Q \in Z_p(F) \Longrightarrow (1:0)$ annulla $G(\lambda,\mu) \Longrightarrow 0\lambda - 1\cdot\mu$ divide G

$\Rightarrow \mu$ divide G

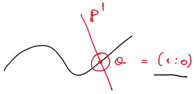
(richiamo $(c_0 : c_1)$ annulla $G(\lambda,\mu) \Longrightarrow (c_1\lambda - c_0\mu)$ divide G

Siccome sono interessata alle molt. di int. in Q $\leftrightarrow (1:0)$, posso cons. coppie $\underbrace{(\lambda:\mu) \text{ con } \lambda \neq 0}$

(cioè escludo $(0:1)$

$\to (1 : \frac{\mu}{\lambda})$

$= \underbrace{(1:t)}$ $\quad t = 0$



$G(\lambda,\mu) \leadsto G(1,t) =: g(t) \quad t$ divide $g(t)$

$$g'(t) = \underbrace{g(0)}_{=0} + \underbrace{g'(0)\cdot t + \frac{g''(0)}{2}\cdot t^2 + \dots}$$

$\downarrow$ Formula di Taylor in $b = 0$

$g(0) = G(1,0) = 0$

il fattore t ha molt. $\geq 2 \Longleftrightarrow g'(0) = 0$

(quindi μ come fattore di $G(\lambda,\mu)$)

$$g(t) = G(1,t) = F(q_0 + t a_0, q_1 + t a_1, q_2 + t a_2)$$

$$g'(t) = ({}^t\nabla F)(q_0 + t a_0, \dots, q_2 + t a_2) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$g'(0) = \boxed{({}^t\nabla F)(Q) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0}$$

$\downarrow$

deve valere $\forall A = (a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\}$

AFFERMO:

$\Updownarrow$

$$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti: se per assurdo non fosse

$$\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se cons. ${}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

è una eq. lineare

$$\partial_{x_0} F(Q) \cdot x_0 + \partial_{x_1} F(Q) \cdot x_1 + \partial_{x_2} F(Q) \cdot x_2 = 0$$

è una retta, il luogo di zeri $\neq \mathbb{P}^2 - Q$