FADDEEV - POPOV QUANTIZATION of NON-ABELIAN GAUGE THEORIES

Vorremmo definire l'integrale sui cammini (P.I.) per la teoria di Y.M. come

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A \, e^{iS_{YM}[A]} \qquad (\star)$$

← spazio di tutte le connessioni sullo spazio-tempo
⇝ è uno SPAZIO AFFINE (infinito-dimensionale)

C'è un PROBLEMA: l'integrando è invariante sotto trasf. di gauge ed è degenere lungo le orbite di gauge (cioè è uguale su tutto un sottoinsieme di $\mathcal{A}$, i cui pti sono legati da trasf. di gauge)

⇒ l'integrale diverge per overcounting.

⟶ vogliamo integrare solo lungo config. inequivalenti

⇒ il P.I. corretto dovrebbe essere

$$\int_{\mathcal{A}/\Omega_*} D\mu(A) \, e^{iS_{YM}[A]}$$

← non-trivial top.; not clear which measure is OK...

Esempio finito-dimensionale

Prendiamo funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che sia INVARIANTE sotto ROTAZIONI sul piano, cioè

$$f(x,y) \equiv g(r) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Ora:

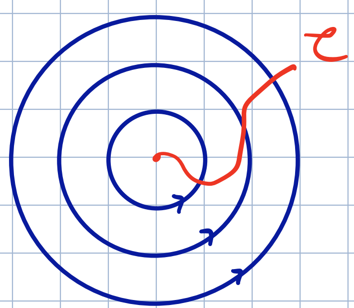
$$\int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\, e^{-f(x,y)} = 2\pi \boxed{\int_0^\infty r\,dr\, e^{-g(r)}} \qquad (*)$$

$= \mathrm{vol}(SO(2))$

in YM otterremmo ∞

Pezzo che vorremmo tenerci come vero P.I.

ma, gli analoghi di r (coord. proprie da usare) e $r\,dr$ (misura sullo sp. quoziente $\mathbb{R}^2/SO(2)$) sono dubbi nel caso infinito dimensionale



Vogliamo ora ritrovare il risultato $(*)$ in un altro modo.

Sia $\mathcal{C}$ una curva in $\mathbb{R}^2$ che parte da origine e interseca ogni ORBITA di $SO(2)$ in un solo pto e definiamola come luogo dei pti

$$\mathcal{C} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid G(\bar{x}) = 0 \}$$

con $G(\bar{x})$ t.c. $\forall \bar{x}\ \exists !\, R \in SO(2)$ t.c. $G(R\bar{x}) = 0$

e $G(\bar{x}) = G(R\bar{x}) \iff R = \mathbb{1}$. ($G(\bar{x}) = 0$ è il gauge fixing)

$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ è un modo di immergere lo spazio delle orbite $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/_{SO(2)} \simeq \mathbb{R}^+$ nel piano.

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\ \delta(G(\bar{x}))\, e^{-f(x,y)}$$

$\downarrow$

La δ-funct. restringe l'integrale su config. inequivalenti, ma l'integrale dipende dalla scelta di gauge fixing $G(\bar{x})$.

Qto accade perché la δ-funct. cambia se noi cambiamo $G(\bar{x})$. Per tenerne conto, definiamo

$$\Delta_G(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial \alpha} G(R_\alpha \bar{x}) \Big|_{\alpha=0}$$

ci basta considerare le trasf. infinitesime per fare qta derivata

Ora, il nuovo integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\ |\Delta_G(\bar{x})|\ \delta(G(\bar{x}))\, e^{-f(x,y)} \qquad (\circ)$$

NON cambia se cambiamo la "gauge slice":

Prendiamo due gauge slices $G_1(\bar{x})=0$ e $G_2(\bar{x})=0$.

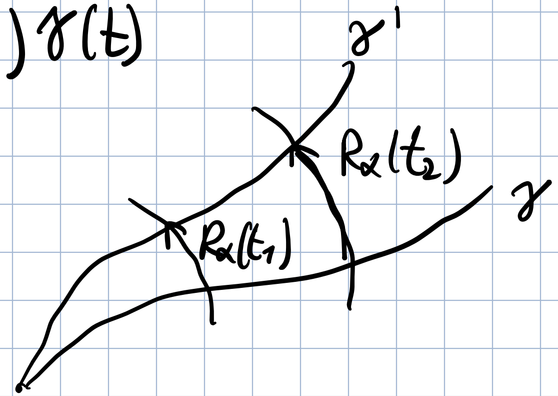
Fissata un'orbita $r=r_0$, possiamo sempre risolvere (*)

$$G_1(\bar{x}) = c \cdot G_2(R_\alpha \bar{x}) \quad \text{per qualche } \alpha \in SO(2)$$

(cambiando orbita, cambia α che realizza qta uguaglianza, quindi α dip. da r)

(*) Detto meglio:

Data una curva γ definita da $G_1(\bar{x})=0$
e data una seconda curva γ' che è
tale che $\quad \bar{\gamma}'(t) = R_\alpha(r(t))\,\bar{\gamma}(t)$



$\downarrow$

allora la $G_2(\bar{x})$ che def. γ'
come luogo degli zeri
può essere definita da

$$G_2(\bar{x}) \equiv \frac{1}{c}\, G_1\left(R_\alpha^{-1}(r)\cdot \bar{x} \right)$$

Infatti se $\bar{x}_0 \in \gamma'$, allora $\quad \bar{x}_0 = R_\alpha(r_{y_0})\,\bar{y}_0$ con $\bar{y}_0 \in \gamma$

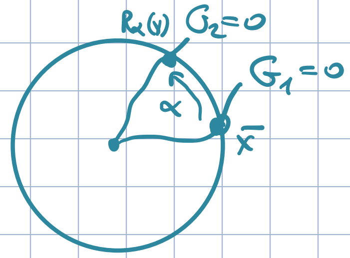
$$\Rightarrow \quad G_2(\bar{x}_0) = \frac{1}{c}\, G_1\left(R_\alpha^{-1} R_\alpha\, \bar{y}_0 \right) = \frac{1}{c}\, G_1(\bar{y}_0) = 0 .$$

Ovviamente $\quad \tilde{G}_2(\bar{x}) \equiv g\left(G_2(\bar{x}) \right)$ con $g(0)=0$

e g monotona (è suff. che 0 sia l'unico zero)

è ancora una funz. che def. γ'.

In ogni caso $\quad \Delta_{G_2}(\bar{x})\, \delta(G_2(\bar{x})) = \Delta_{\tilde{G}_2}(\bar{x})\, \delta(\tilde{G}_2(\bar{x}))$



$R_\alpha(r)$, $c(r)$

Da qui ricaviamo che

1) $\frac{\partial}{\partial\beta} G_1(R_\beta \bar{x})\Big|_{\beta=0} = c \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} G_2(R_{\alpha+\beta}\bar{x})\Big|_{\beta=0} \Longrightarrow \Delta_{G_1}(\bar{x}) = c\cdot \Delta_{G_2}(R_\alpha \bar{x})$

2) $\delta(G_1(\bar{x})) = \delta(c\cdot G_2(R_\alpha \bar{x})) = \frac{1}{c}\,\delta(G_2(R_\alpha\bar{x}))^{(*)}$

$$\Rightarrow \int d^2x\, |\Delta_{G_1}(\bar{x})|\,\delta(G_1(\bar{x}))\,e^{-f(x,y)} =$$

$$= \int d^2x\, |\Delta_{G_2}(R_\alpha\bar{x})|\;\delta(G_2(R_\alpha\bar{x}))\,e^{-\overset{=f(R_\alpha\bar{x})}{f(\bar{x})}}$$

$\uparrow$ inv. sotto trasf. $R_\alpha(r)$

$r' = r$ $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'(r) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\theta' = \theta + \alpha(r)$

$$= \int d^2x\, |\Delta_{G_2}(\bar{x})|\;\delta(G_2(\bar{x}))\,e^{-f(\bar{x})}$$

(*) • Def. $\tilde{G}(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

• Luogo $\tilde{G}(r,\theta) = 0$ seleziona un θ per ogni $r \to \theta = \theta(r)$

$$\delta(\tilde{G}(r,\theta)) = \left|\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\theta}\right|^{-1} \delta(\theta - \theta(r))$$

Se moltiplichiamo $\tilde{G}(r,\theta) \longrightarrow c(r)\,\tilde{G}(r,\theta)$ vediamo subito che $\delta(c(r)\,\tilde{G}(r,\theta)) = \frac{1}{c(r)}\,\delta(\tilde{G}(r,\theta))$

Esempio: C = asse-x, cioè $G(\bar{x}) = y$

$$\rightarrow \quad G(R_\alpha \bar{x}) = -x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

$$\rightarrow \quad \Delta_G(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha\right)\Big|_{\alpha=0} = -x$$

$$\rightarrow (\circ) = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\,|x|\,\delta(y)\,e^{-f(x,y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|x|\,e^{-f(x,0)}$$

dip. da $|x|$ perché inv. sotto rotaz. di π

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|x|\,e^{-g(|x|)} = 2\int_0^{\infty} dr\; r\, e^{-g(r)}$$

$\rightsquigarrow$ Perché fattore 2? Perché C interseca 2 volte ciascuna orbita di $SO(2)$. (Vedi COPIE di GRIBOV.)

$\Downarrow$

Per ogni funz. $G(\bar{x})$ che "fissa la gauge", possiamo scrivere l'integrale sopra $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/SO(2) \cong \mathbb{R}^+$ come

$$\int_{\mathbb{R}^+} dr\; r\, e^{-g(r)} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\,|\Delta_G(\bar{x})|\,\delta(G(\bar{x}))\,e^{-f(x,y)}$$

2 = # pti intersez. con curva

Il vantaggio è che l'integrale di destra è su uno SPAZIO AFFINE con una MISURA standard.

Quando le variabili $\bar{x}$ sono di più e i parametri delle trasformazioni che modd.iamo sono maggiori di uno, allora dobbiamo considerare il fattore

$$|\Delta_G(\bar{x})| \prod_a \delta(G^a(\bar{x}))$$

$$\equiv \det\left(\frac{\partial G^a(\bar{x}^\alpha)}{\partial \alpha^b}\right)$$

$\bar{x}^\alpha$ è il trasformato di $\bar{x}$ sotto trasf. labellata da α^a

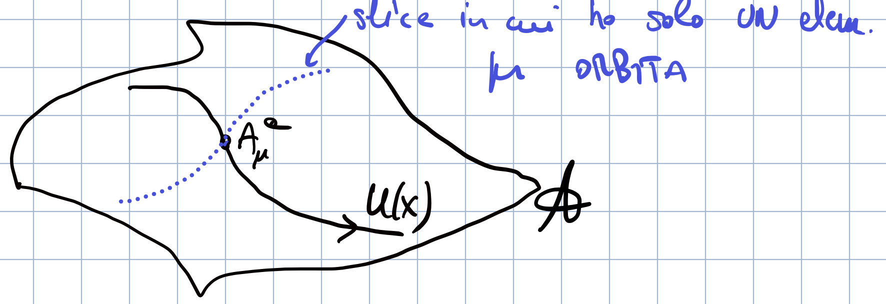
Ancora una volta, questo ci permette di esprimere l'integrale sopra lo spazio quoziente come un'integrale su uno spazio AFFINE con misura standard.

→ Qto molto utile per teorie di Gauge dove qto sp. affine è $\mathcal{A}$.

⇒ Passiamo quindi a trattare le

TEORIE DI GAUGE

In YM, possiamo fissare la gauge pescando una connessione



in ogni ORBITA determinata da $U(x) = e^{i\alpha(x)}$ $\quad \alpha = \alpha^a t^a$

$$[A_\mu] = \{ A^\alpha_\mu \mid U(x) = e^{i\alpha(x)} \in \Omega_* \}$$

→ qto viene fatto scegliendo un embedding

$$\mathcal{A}/\Omega_* \subset \mathcal{A}$$

specificato dal luogo degli zeri di una funzione $G(A)$, che necessariam. sarà NON-gauge inv.:

$$G(A) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad G^a(A) = 0$$

↑ ∈ rep. Adj. (dobbiamo fissare $\# = \dim \mathcal{G}$ vettori A_μ^a)

- Una scelta comune è prendere una funzione LOCALE, per esempio $G(A) = A^0(x)$ ← dip. da (un solo) x.

La funzione $-\delta$ sarà

$$\delta(G(A)) \text{ "}= \prod_{x \in \mathbb{R}^{1,3}} \delta(G(A(x)))\text{"}$$

Il determinante di Faddeev-Popov sarà

$$\Delta_{FP}(A) = \det \left. \frac{\delta G^a(A^\alpha(x))}{\delta \alpha^b(y)} \right|_{\alpha=0}$$

dove $\quad A_\mu^{\alpha a}(x) = A_\mu^a(x) + (D_\mu \alpha(x))^a \quad$ α in rep. Adj

D_μ derivata cov. che agisce su rep. Adj.

Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\mathcal{A}/\Omega_*} \mathcal{D}\mu(A)\, e^{iS[A]} = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{D}A\, |\Delta_{FP}(A)|\, \delta(G(A))\, e^{iS[A]} \qquad (0)$$

assumeremo che det > 0 e toglieremo il modulo

- Nota: questo risultato si può ottenere con procedim. analogo a quello visto nel corso Teoria dei Campi II (vedi appendice).

- $\Delta_{FP}\, \delta(G)$ ci restringe a una gauge slice arbitraria ma non lascia nessuna dip. dalla funz. $G(A)$, cioè dalla gauge slice scelta.

- $$\Delta_{FP}(A) = \det \left.\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

Prenderemo funz. $G(A)$ che siano LINEARI in A

$\Rightarrow \dfrac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}$ non dip. da α e possiamo semplicem. scrivere

$$\Delta_{FP}(A) = \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}$$

Per casi espliciti, prenderemo $G^a(A) = \partial_\mu A^{a\mu}$ "Gauge di Lorentz"

- $\Delta_{FP}(A)$ DIPENDE da A, a differenza della teoria abeliana.

- Il P.I. (o) non è scritto nella forma $\int \mathcal{D}q \, e^{iS(q)}$ e quindi non possiamo applicare in maniera diretta il metodo dei diagrammi di Feynman per calcolare i correlatori.

- Ricordiamo che (o) è INDIPENDENTE dalla scelta della funz. $G(A)$, quindi se cambiamo $G^a(A) \mapsto G^a(A) - \omega^a$, otteniamo lo stesso risultato.

$\downarrow$

Usiamo questo per riscrivere la $\delta(G)$ in forma a noi più utile.

$$(o) = \int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \, \delta(G(A) - \omega) \, e^{iS(A)} =$$

$$= N_\xi \int \mathcal{D}\omega \, e^{-\frac{i}{2\xi}\int \omega^2} \int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \, \delta(G(A) - \omega) \, e^{iS(A)}$$

con $N_\xi^{-1} = \int \mathcal{D}\omega \, e^{-i/2\xi \int \omega^2}$ e $\omega^2 = \omega^a \omega^a$

applico la δ

$$= N_\xi \int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \, e^{iS(A) - \frac{i}{2\xi}\int G^a(A) G^a(A)}$$

termine di gauge fixing in $\mathcal{L}$

a meno di fattore

$$\cong \int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \, e^{iS + iS_{g.f.}}$$

Come vedremo, il termine $\Delta_{FP}(A)$ non contribuisce al propagatore (non genera termini quadratici nella nuova $\mathcal{L}$).

Possiamo quindi fare una pausa e calcolarci il propag. con la scelta $G^a(A) = \partial_\mu A^{a\mu}$

Il termine quadratico in $S + S_{g.f.}$ è: $\left[S_{g.f.} \equiv -\frac{1}{2\xi}\int (\partial^\mu A_\mu)^2 \right]$

$$-\int d^4x \left(\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})(\partial_\nu A^{a\nu}) \right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\; \Omega^{a\mu,b\nu}(x,y) \cdot A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)$$

dove
$$\Omega^{a\mu,b\nu}(x,y) \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^s \partial y_s} \delta^{(4)}(x-y)\,\delta^{ab} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu}\delta^{(4)}(x-y)\,\delta^{ab} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\delta^{ab}\int d^4p \left[\eta^{\mu\nu}(p^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)p^\mu p^\nu \right] e^{ip(x-y)}$$

Prendiamo l'inverso di Ω, e otteniamo il PROPAGATORE di Feynman per il BOSONE DI GAUGE

$$D_{F\,\mu\nu}^{ab}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)\delta^{ab}\, \frac{-i}{p^2 + i\epsilon}\, e^{ip(x-y)}$$

$\xi = 1$: Feynman-'t Hooft

$\xi = 0$: Landau

GRIBOV AMBIGUITY

Per "fissare bene la gauge" (cioè buona scelta di funz. $G(A)$), $G(A)=0$ dovrebbe produrre una superficie che interseca ogni orbita di gauge TRASVERSALMENTE e SOLO in un PUNTO (e tale pto deve esistere).

L'esistenza di tale superficie dipende dalle proprietà globali top. di $\mathcal{A}/\Omega_*$

Quindi, $G(A)$ deve soddisfare due condizioni:

1) dato $\bar{A}_\mu$, troviamo sempre α t.c. $G(\bar{A}_\mu^\alpha)=0$;
2) la soluz. trovata al pto (1) è unica.

Esempio abeliano:

$$A^\alpha = A + d\alpha \quad ; \quad \underset{\uparrow \text{ Lorentz gauge}}{G(A^\alpha)=0} \leftrightarrow \quad 0 = \partial_\mu A^\mu + \Box\alpha$$

→ dobbiamo quindi risolvere $\Box\alpha = u$ dove $u = \partial_\mu A^\mu$.

Qto si dimostra essere sempre possibile (anche nel caso non-abeliano).

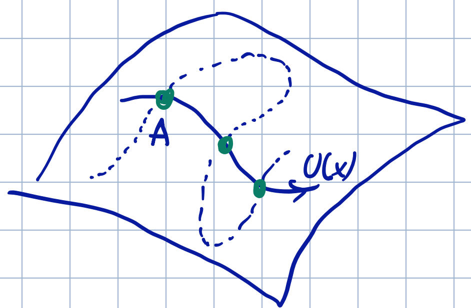
→ c'è un'unica soluzione?

- connessioni che obbediscono $\partial_\mu A^\mu = 0$ sono "ortogonali" alle connessioni che sono pura gauge

⇒ deformare la nostra connessione in un modo che obbedisce alla gauge di Lorentz ci porta in una direzione che è ORTOGONALE all'orbita di gauge (inters. trasv.)

→ Partendo da un pto in $\mathcal{A}$ e integrando lungo una slice, si includono solo config. inequivalenti finché siamo vicini al pto di partenza.

Ci saranno dei problemi quando (come nel caso finito dim) la slice $G(A)=0$ interseca le orbite di gauge più volte.



ci sono config. gauge-equiv. sulla superf. $G(A)=0$

Q.ti pti sono "distanti" in $\mathcal{A}$ e si chiamano COPIE DI GRIBOV.

Singer dimostrò che tale AMBIGUITÀ DI GRIBOV (cioè l'esistenza di più di una sol. per $G(A)=0$) è INEVITABILE (per teorie non-ab.) a causa della topologia di $\mathcal{A}/\Omega_\nu$ ($\mathcal{A}$ ha la struttura di un principal bundle sulla base $\mathcal{A}/\Omega_\nu$. Si dim. che NON esiste una sezione globale di tale fibrato.)

Lavorando perturbativam. non ci accorgiamo di tale ambiguità, perché stiamo sempre vicini a un pto di partenza.

DETERMINANTE DI FADDEEV-POPOV e GHOSTS

P.I. : $\int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \; e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int(\partial^\mu A_\mu)^2}$

$$\Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha} = \det\Big[\underbrace{\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu}_{\text{automorfismo in } V_{Adj}\otimes \mathbb{1}_{Lorentz}\otimes\{\text{function}\}}\Big]$$

$$\frac{\delta(\partial^\mu A^\alpha_\mu)}{\delta\alpha} = \frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\partial^\mu\left(\cancel{A_\mu} + D_\mu\alpha\right)\right)$$

Il determinante di ogni operatore può essere rappresentato da un integrale su oggetti a valori nei numeri di Grassmann:

$$\det M = \int d^n\bar{\xi}\, d^n\xi \; e^{i\,\bar{\xi}^T M \xi}$$

M è matrice che agisce su V_n

Abbiamo integrato su un $\xi \in V_n$

$$\Delta_{FP}(A) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c} \; e^{i\int d^4x\, \bar{c}(x)(-\partial^\mu D_\mu)c(x)}$$

$$c, \bar{c} \in V_{Adj}\otimes \mathbb{1}_{Lorentz}\otimes\{\text{funz.}\}\otimes\{\text{Grassmann numbers}\}$$

$\Rightarrow$ c è un CAMPO SCALARE nella RAPP. AGGIUNTA a valori nei numeri di Grassmann

Questo campo AUSILIARIO ha la relazione sbagliata tra SPIN e STATISTICA $\rightarrow$ non può essere associato a particelle FISICHE $\rightarrow$ GHOSTS di FP

P.I. : $\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int(\partial^\mu A_\mu)^2 + i\int \mathcal{L}_{gh}}$

P.I. scritto nella maniera che ci permette di ottenere regole di Feynman

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c = \bar{c}^a\left(\delta^{ab}(-\partial^2) + g\,\partial^\mu f^{abc} A_\mu^b\right)c^c$$

osservazione:

La Lagrangiana $\mathcal{L}_{gh}$ (e quindi la Lagrangiana totale) è INVARIANTE sotto

$$c \mapsto e^{i\alpha}c \qquad \bar{c} \mapsto e^{-i\alpha}\bar{c} \qquad \alpha \text{ cost}$$

Sapere simm. di $\mathcal{L}$ è importante perché da info su possibili correlatori

↪ la corrispondente carica conservata si chiama GHOST NUMBER Q_{gh}; è t.c. (usando regole comm. canoniche)

$$\{Q_{gh}, c\} = c \qquad \{Q_{gh}, \bar{c}\} = -\bar{c}$$

$$\text{e } \{Q_{gh}, \varphi\} = 0 \qquad \varphi = \{\text{tutti gli altri campi}\}$$

In termini dei campi

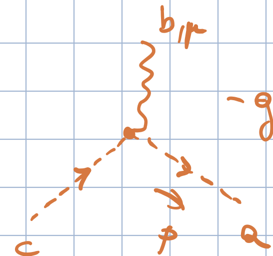
$$Q_{gh} = \int d^3x\left[-\bar{c}^a(D_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a c^a\right]$$

Regole di Feynman per i Ghosts:

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}^a\left(-\partial^2\delta^{ab} + g\,\partial^\mu f^{abc} A_\mu^b\right)c^c$$

$\frac{i}{k^2}$

la freccia mostra il flusso del GHOST N°



$-g f^{abc} p^\mu$

APPENDICE: metodo di FP

Per individuare UN rappresentante per classe di equiv. mediante

$$G(A)=0 \quad \longleftrightarrow \quad G^a(A)=0$$

$\in$ rap. Adj (dobbiamo fissare $\#=\dim G$ vettori A_μ^a)

($G(A)$ non deve essere gauge invariante)

Usiamo il seguente trucco (FP) ← valido se $\exists !$ soluz. all'eq. $G(A)=0$

$$1=\int \mathcal{D}\alpha \;\delta(G(A^\alpha))\;\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right)$$

Generalizzazione di

$$\delta[f(x)]=\sum_i \left|\frac{df}{dx}\right|^{-1}_{x=x_0^i}\delta(x-x_0^i)$$

Se c'è unica soluz.

$$1=\int \delta[f(x)]\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} dx$$

Se molte soluzioni

$$\int dx\;\delta(f(x))\,\frac{df}{dx}=\sum_{i=1}^{N}\int dx\;\delta(x-x_0^i)=N$$

$$\Rightarrow N=\int\mathcal{D}\alpha\;\delta(G(A^\alpha))\det\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}$$

(assumendo $\det>0$)

$$A_\mu^{\alpha a}=A_\mu^a+\frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^a \qquad A_\mu\to gA_\mu$$

Prendiamo $G(A)$ lineare in A

$\Rightarrow \dfrac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}$ NON DIPENDE DA α!

$$\left[\;\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}=\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta A}\,\frac{\delta A^\alpha}{\delta\alpha}\;\right]$$

$$\Rightarrow\quad \Delta_{FP}(A)\equiv\det\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}$$

è INDIP. da α, ma dipende da A (a differenza del caso Abeliano)

$$\int\mathcal{D}A\,e^{iS[A]}=\int\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\alpha\;\delta(G(A^\alpha))\,\Delta_{FP}(A)\,e^{iS[A]}$$

gauge invariante

$$=\int\mathcal{D}A\int\mathcal{D}\alpha\;\delta(G(A^\alpha))\,\Delta_{FP}\left((A^\alpha)^{-\alpha}\right)e^{iS[A^\alpha]}$$

Ora facciamo un cambio di VARIABILI di INTEGRAZIONE: def. la nuova variabile $\underset{\text{nuova variabile}}{B} = \underset{\text{funzione di } A}{A^\alpha}$

Fortunatamente, la misura è invariante sotto questo cambio (cioè lo Jacobiano è $=1$): $\mathcal{D}B = \mathcal{D}A^\alpha = \underset{=1}{J}\,\mathcal{D}A$

$$= \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(G(B))\, \Delta_{FP}(B^{-\alpha})\, e^{iS[B]}$$

$$\Delta_{FP}(B^{-\alpha}) = \det \frac{\delta G((B^{-\alpha})^{\tilde\alpha})}{\delta\tilde\alpha} \underset{\tilde\alpha = \alpha' + \alpha}{=} \det\left(\frac{\delta G(B^{\alpha'})}{\delta\alpha'}\,\frac{\delta\alpha'}{\delta\tilde\alpha}\right) =$$

$$= \Delta_{FP}(B)\, \rho(\alpha) \qquad \rho(\alpha) = \det\left(\frac{\delta\alpha'}{\delta\tilde\alpha}\right)$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{1}$ per trasf. infinitesima

$$= \left(\int \mathcal{D}\alpha\, \rho(\alpha)\right) \int \mathcal{D}A\; \delta(G(A))\, \underbrace{\Delta_{FP}(A)}_{\substack{\text{dipende da } A \\ \text{a diff. della teoria} \\ \text{abeliana}}} e^{iS[A]}$$

qui ho sostituito il simbolo B col simbolo A (è una variabile di integrazione)

Questo P.I. non è della forma $\int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS(\varphi)}$ e quindi non possiamo applicare in maniera diretta il metodo dei diagrammi di Feynman per calcolare i CORRELATORI.

- L'integrale $\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}$ è indip. dalla funzione G (cioè dalla scelta del GAUGE FIXING). Inoltre anche $\int \mathcal{D}\alpha\, \rho(\alpha)$ è indip. da G.

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}A\, \delta(G(A))\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A]} \text{ è INDIP. da } G$$

- Possiamo moltiplicare e dividere il P.I. per

$$\Big(\int \mathcal{D}\omega\; e^{-\frac{i}{2\xi}\int \omega^2} \Big) \qquad \omega^2 \equiv \omega^a \omega^a$$

$\uparrow$ nella rap. Adj

Ci specializziamo al caso delle GAUGE DI LORENTZ:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu - \omega \qquad G^a(A) = \partial^\mu A_\mu^a - \omega^a$$

$$\frac{\int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int\omega^2}}{\int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int\omega^2}} \int \mathcal{D}A\, \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A]}$$

A meno di fattori overall il P.I. diventa

$$\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int \omega^2}\, e^{iS[A]}\, \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)\, \Delta_{FP}(A) =$$

$$= \int \mathcal{D}A\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int (\partial^\mu A_\mu)^2} \leftarrow \text{termine di gauge fixing in } \mathcal{L}$$

$(\partial^\mu A_\mu)^2 = \partial^\mu A_\mu^a\, \partial^\nu A_\nu^a$

come vedremo $\Delta_{FP}(A)$ non contribuisce al propagatore (non genera termini quadratici nella nuova $\mathcal{L}$ regione)