23 ottobre

Teorema (di Weierstrass) Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}$ (compatto significa chiuso e limitato) e sia $f \in C^0(K)$. Allora esistono un punto x_m ed un punto x_M tali che

$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in K$ (questo si esprime dicendo che x_m è un punto di minimo assoluto di f in K)

e $f(x_M) \geq f(x) \quad \forall x \in K$ (. . . . . .
. . x_M è un punto di massimo assoluto di f in K).

Es $f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(1) = 6$ $\{1, 2, 3\}$ è compatto

$f(2) = 2\pi$

$f(3) = 2e$ $e < 3 < \pi$

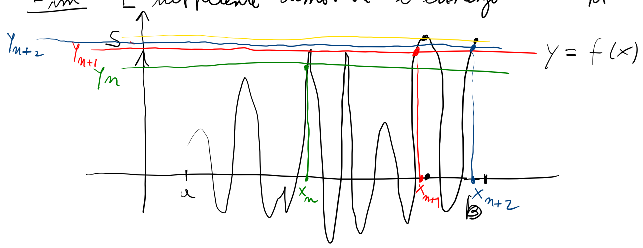
$2e < 6 < 2\pi$

3 è l'~~unico~~ punto di minimo assoluto

2 massimo

Teorema Sia $f \in C^0([a,b])$ $a < b$ due numeri reali. Allora esistono un punto di massimo assoluto x_M ed un punto di minimo assoluto x_m.

Dim È sufficiente dimostrare l'esistenza di x_M.



Si considera $f([a,b]) = \{ f(x) ; x \in [a,b] \} \subseteq \mathbb{R}$

Sia $S = \sup f([a,b])$

Se $S = \max f([a,b])$ allora $\exists\, x_0 \in [a,b]$

t.c. $S = f(x_0)$ e quindi $x_M = x_0$

se $S \neq \max f([a,b])$ allora $\exists \{y_n\}$ in $f([a,b])$

t.c. $\lim_{n\to+\infty} y_n = S$. Infatti se per caso $S \in \mathbb{R}$

so che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists\, y_n \in f([a,b])$ t.c.

$$\underbrace{S - \frac{1}{m}}_{\downarrow n\to+\infty \; S} < y_n \le S \implies \text{per i carab. } \lim_{n\to+\infty} y_n = S.$$

Siccome $y_n \in f([a,b]) = \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ t.c. $f(x_n) = y_n$

Resta definita una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass so che esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed un punto $\bar{x}$ tali che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in [a,b]$. Vogliamo dimostrare che $\bar{x}$ è un punto di massimo assoluto.

Per prima cosa osserviamo che siccome

$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} y_n} = S = \sup f([a,b])$ allora abbiamo

anche che $\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = S$.

$= \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S$

Inoltre, poiché f è continua in $\bar{x}$

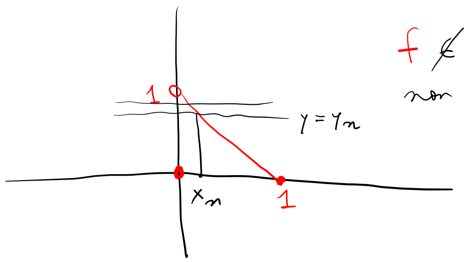
$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x} \implies \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

Allora $f(\bar{x}) = S = \sup f([a,b])$

$x_M = \bar{x}$.

Osservazioni: La continuità è essenziale nel Teorema.

Se ad esempio $f(x) = \begin{cases} 1-x & 0<x\leq 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$



$f \notin C^0([0,1])$

non è continua in 0

$f([0,1]) = [0,1)$. Se $0<y<1$

$y = 1-x \iff x = 1-y \in (0,1)$ perciò

$f(x) = 1-x = y$

$f(0)=f(1)=0$ $\qquad \sup f([0,1]) = \sup [0,1) = 1$

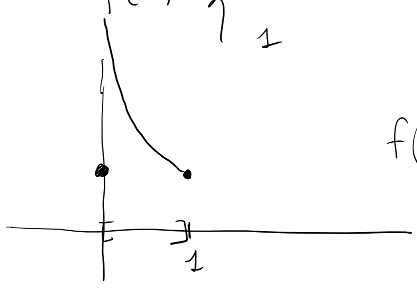
Qui non esiste punto di massimo

$y_n \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \qquad 0 \leq y_n < 1$

$x_n = 1-y_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$

ma qui $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \neq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f(x_n)}_{1} = \underbrace{f(0)}_{0}$

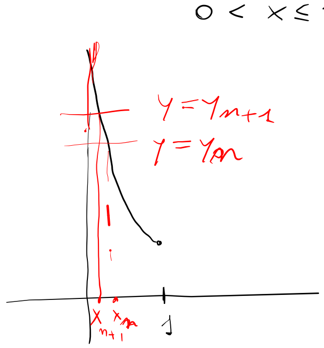
Altro esempio $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{per } 0<x\leq 1 \\ 1 & \text{per } x=0 \end{cases}$



$f([0,1]) = [1,+\infty)$

Es $\qquad f(x) = \frac{1}{x} \qquad 0<x\leq 1$

$f \in C^0((0,1])$



qui $(0,1]$ non è compatto

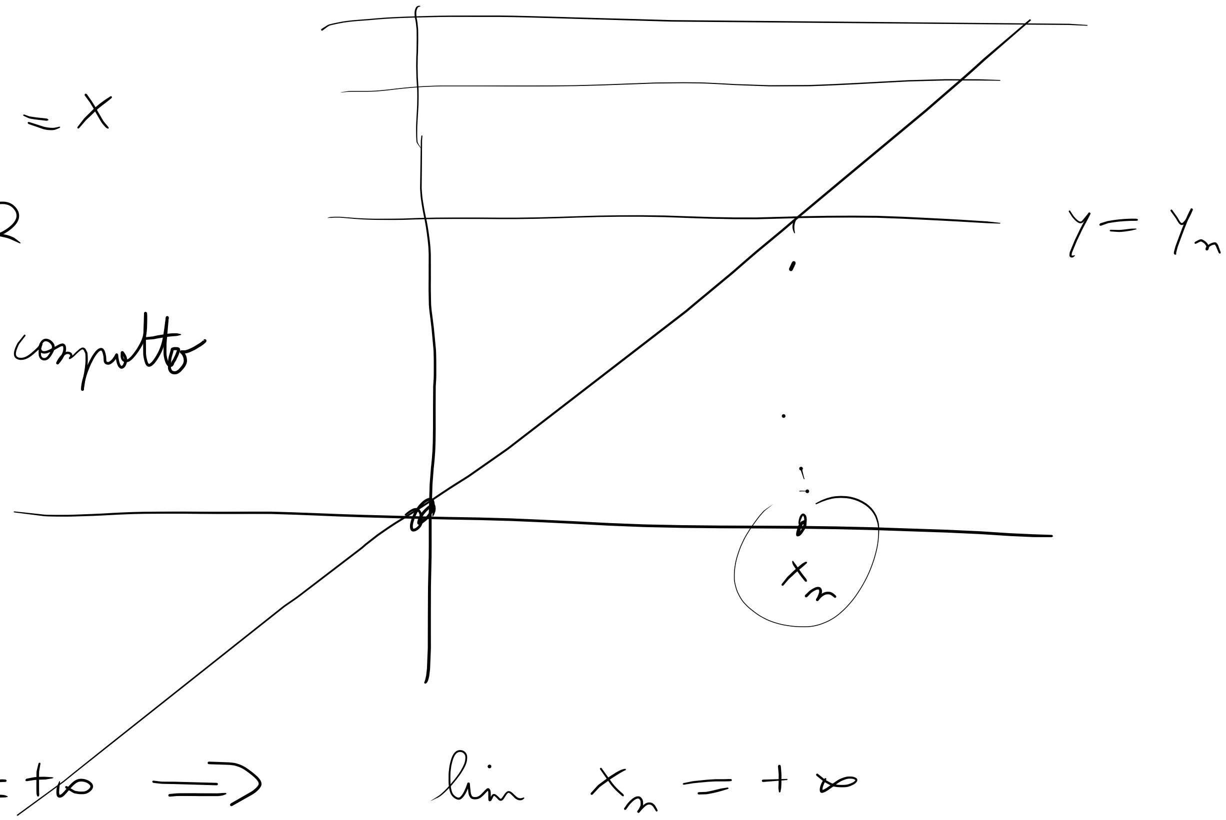
perché non è chiuso

$\{x_n\}$ converge con $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$

$f(x) = x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ non è compatto



$$\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

$$(x_n = y_n \quad \forall n)$$

Esercizi

1) Dimostrare che per ogni successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c. esiste $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k}$

2) Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$, e esistono $x_0 \in \mathbb{R}$ e i limiti $\lim_{x \to +\infty} f(x) = B$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ con $f(x_0) > A$ ed $f(x_0) > B$ allora f ha un punto di massimo assoluto in $\mathbb{R}$.

__Teorema__ ~~Siano~~ $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in C^0(I)$ strettamente monotona. Allora posto $J = f(I)$ e denotato con $g : J \to I$ la funzione inversa della f, risulta $g \in C^0(J)$.

__Es__ $b > 1$, $\mathbb{R} \ni x \to b^x$ è in $C^0(\mathbb{R})$ con immagine $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Il teorema garantisce che $\log_b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è in $C^0(\mathbb{R}_+)$

__Es__ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\tan x \in C^0\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è in $C^0(\mathbb{R})$

Def Siano X, Y e Z tre insiemi

e siano $X \xrightarrow{f} Y$

$Y \xrightarrow{g} Z$

due funzioni

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

Resta definita una funzione $X \longrightarrow Z$

$$x \in X \longrightarrow g(f(x)) \in Z$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad g \circ f(x)$$

Esempi $X, Y, Z = \mathbb{R}$

$f(x) = x+1$ $\qquad$ $g(x) = e^{x^2}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = e^{(f(x))^2} = e^{(x+1)^2} = e^{x^2+2x+1}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = e^{x^2} + 1$$

$$g \circ f(0) = e^{x^2+2x+1}\Big|_{x=0} = e$$

$$f \circ g(0) = e^{x^2} + 1\Big|_{x=0} = 2$$

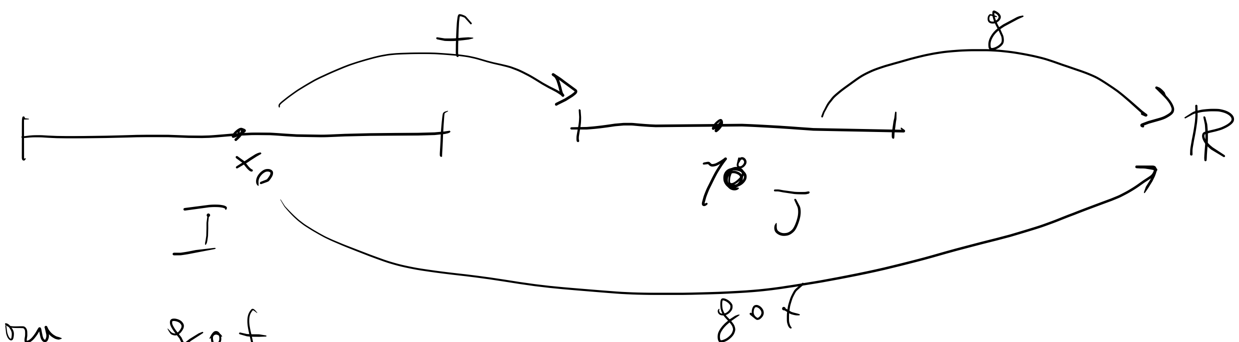
Teorema Siano I, J due intervalli,

$f : I \to J$ e $g : J \to \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e $y_0 = f(x_0)$.

Resta definita $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ e se

f è continua in x_0 e g è continua in y_0



Allora $g \circ f$ è continua in x_0.

Esempio Sia $a \in \mathbb{R}$. Resta definita in $(0, +\infty)$

$$x \longrightarrow x^a = e^{\lg x^a} = e^{a \lg x} \in C^0((0,+\infty))$$

$$e^{a \lg x} = g \circ f(x)$$

dove $g(x) = e^x$, $e^x \in C^0(\mathbb{R})$, $f(x) = a \lg x$, $\lg x \in C^0(\mathbb{R}_+)$

$g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}_+$