



Combinazioni lineari e basi

Consideriamo il vettore v
come somma dei vettori v_1 e v_2 .

Anzi, consideriamo i vettori
 v_1 e v_2 come **VETTORI DI**
RIFERIMENTO e cerchiamo

di esprimere **OGNI ALTRO**
VETTORE del piano in
termini di v_1 e v_2 .

È POSSIBILE?

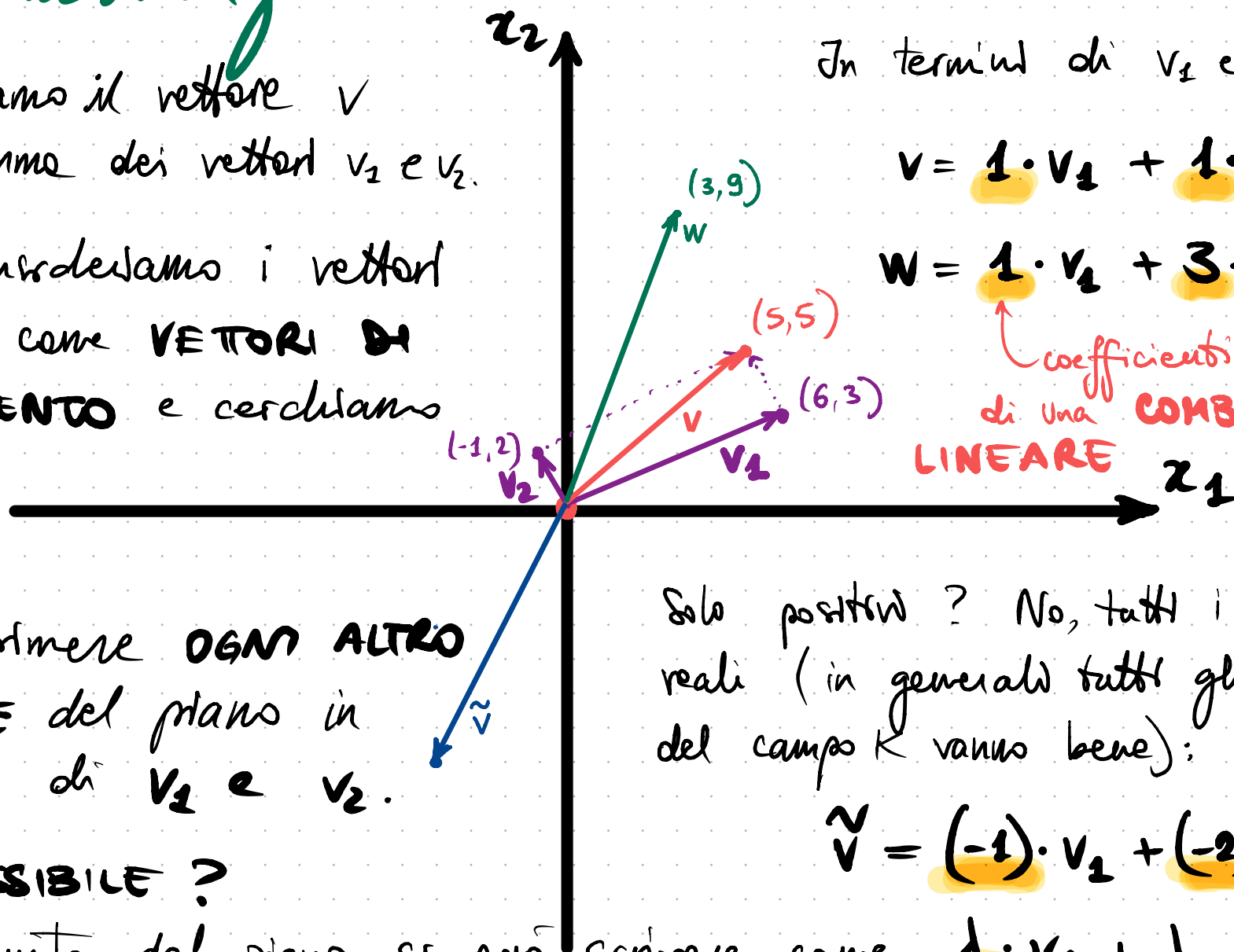
Ogni punto del piano si può scrivere come $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$, si dice
che v_1 e v_2 **INSIEME GENERANO IL PIANO $\mathbb{R}^2$**

In termini di v_1 e di v_2 :

$$v = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$$

$$w = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$$

coefficienti REALI
di una **COMBINAZIONE**
LINEARE

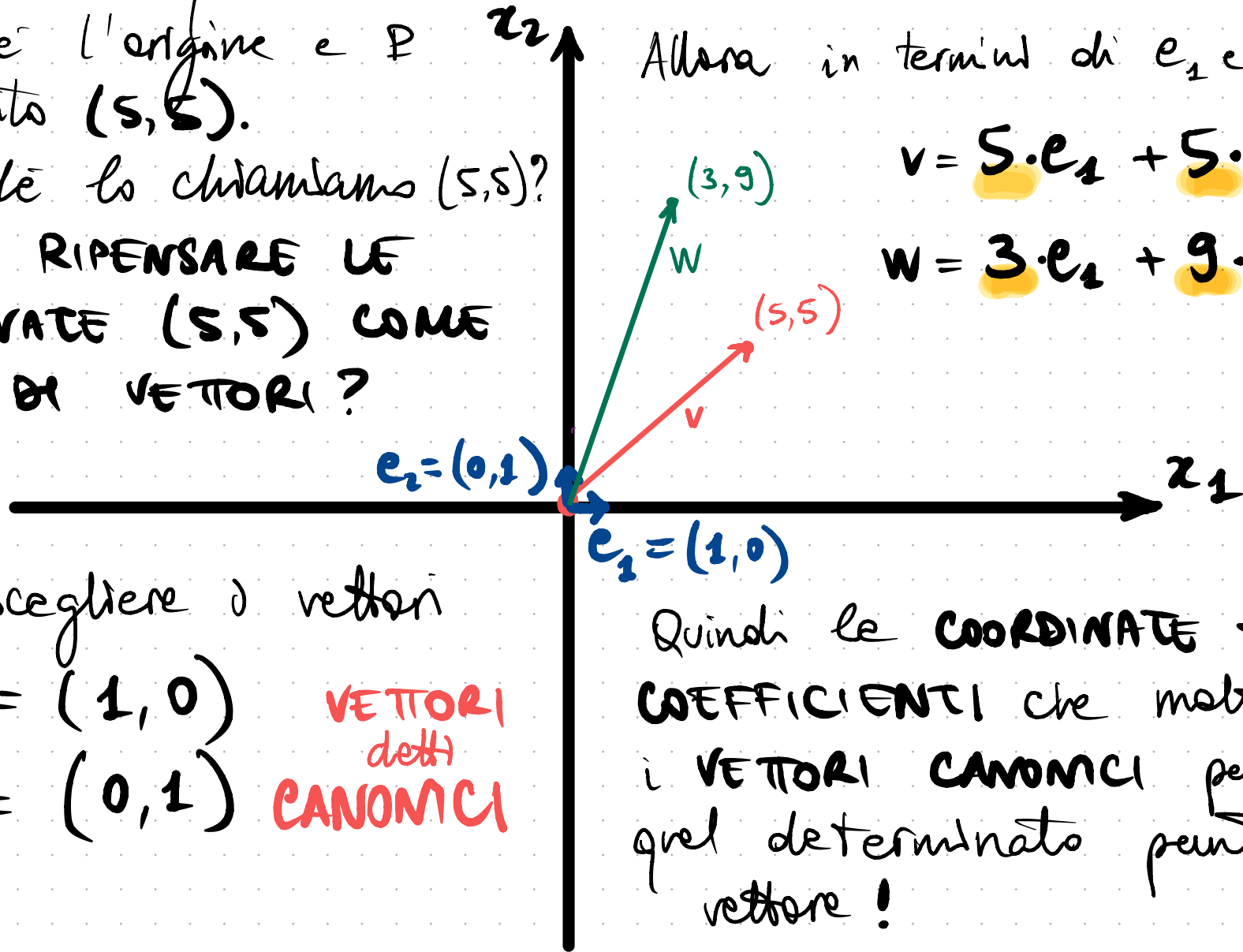


Solo positivi? No, tutti i numeri
reali (in generale tutti gli scalari
del campo K vanno bene):

$$\tilde{v} = (-1) \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2$$

Il vettore v corrisponde a $\overrightarrow{OP}$
dove O è l'origine e P
è il punto $(5,5)$.

Ma perché lo chiamiamo $(5,5)$?
Possiamo RIPENSARE LE
COORDINATE $(5,5)$ COME
SOMMA DI VETTORI?



Allora in termini di e_1 e di e_2 :

$$v = 5 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2$$

$$w = 3 \cdot e_1 + 9 \cdot e_2$$

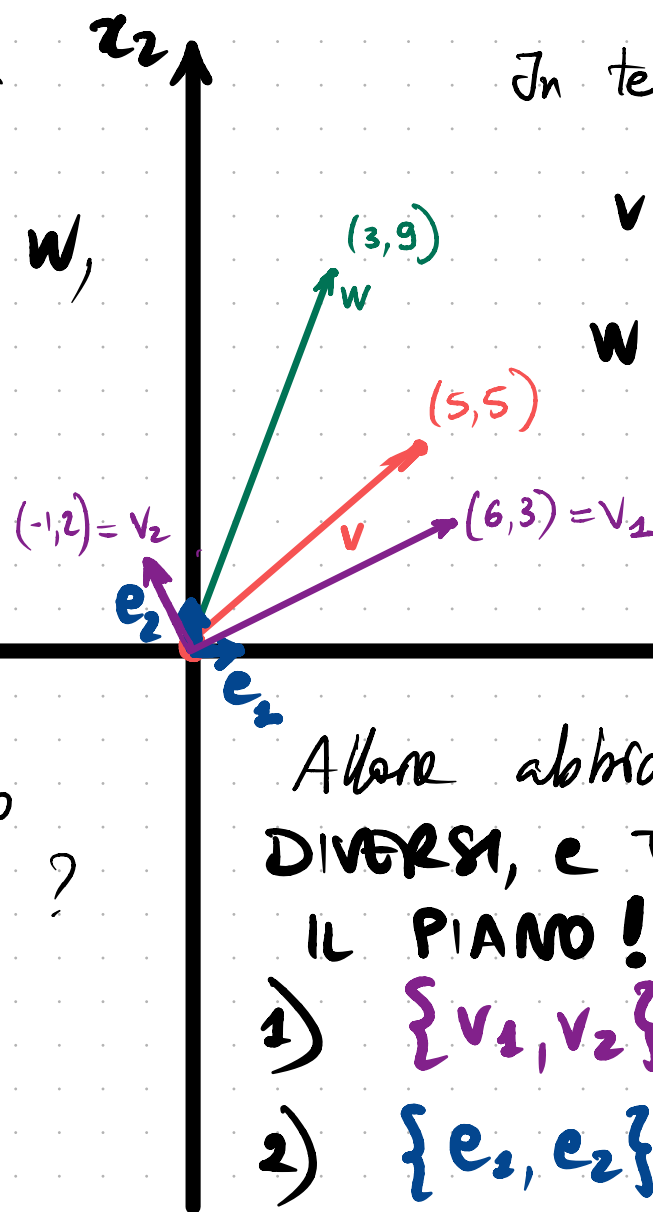
Basta scegliere i vettori

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0) \\ e_2 = (0, 1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{VETTORI} \\ \text{detti} \\ \text{CANONICI} \end{array}$$

Quindi le COORDINATE sono i
COEFFICIENTI che moltiplicano
i VETTORI CANONICI per ottenere
quel determinato punto o
vettore!

Ma visto che vogliamo trovare per quei numeri il nostro sistema di riferimento ci dà v e w , non potremmo forse SCEGLIERE COME RIFERIMENTO v e w STESSI ?!

Ma v e w generano anche loro il piano?
Sì!



In termini di v e di w :

$$v = 1 \cdot v + 0 \cdot w$$

$$w = 0 \cdot v + 1 \cdot w$$

Allora abbiamo almeno 3 RIFERIMENTI DIVERSI, e TUTTI E 3 GENERANO IL PIANO!

1) $\{v_1, v_2\}$

2) $\{e_1, e_2\}$

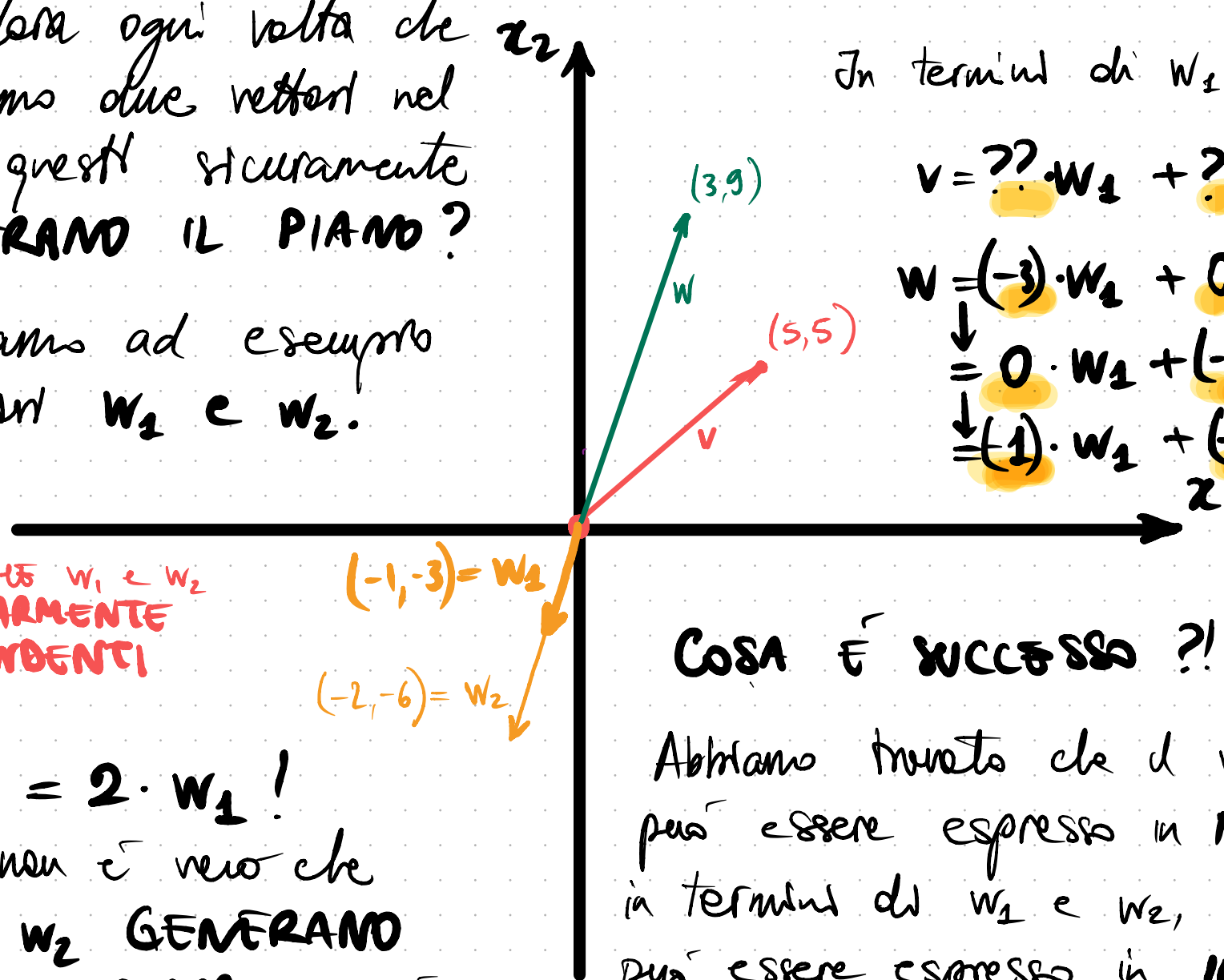
3) $\{v, w\}$

Quanti ce ne saranno?

[Risposta: infiniti
breve]

Ma allora ogni volta che scegliamo due vettori nel piano, questi sicuramente **GENERANO IL PIANO?**

Prendiamo ad esempio i vettori w_1 e w_2 .



In termini di w_1 e di w_2 :

$$v = ?? \cdot w_1 + ?? \cdot w_2$$

$$w = (-3) \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$$

$$\downarrow = 0 \cdot w_1 + (-\frac{3}{2}) \cdot w_2$$

$$\downarrow = (-1) \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 = \dots\dots$$

SI DIRA' CHE w_1 e w_2 SONO **LINEARMENTE DIPENDENTI**

$$w_2 = 2 \cdot w_1!$$

Allora non è vero che

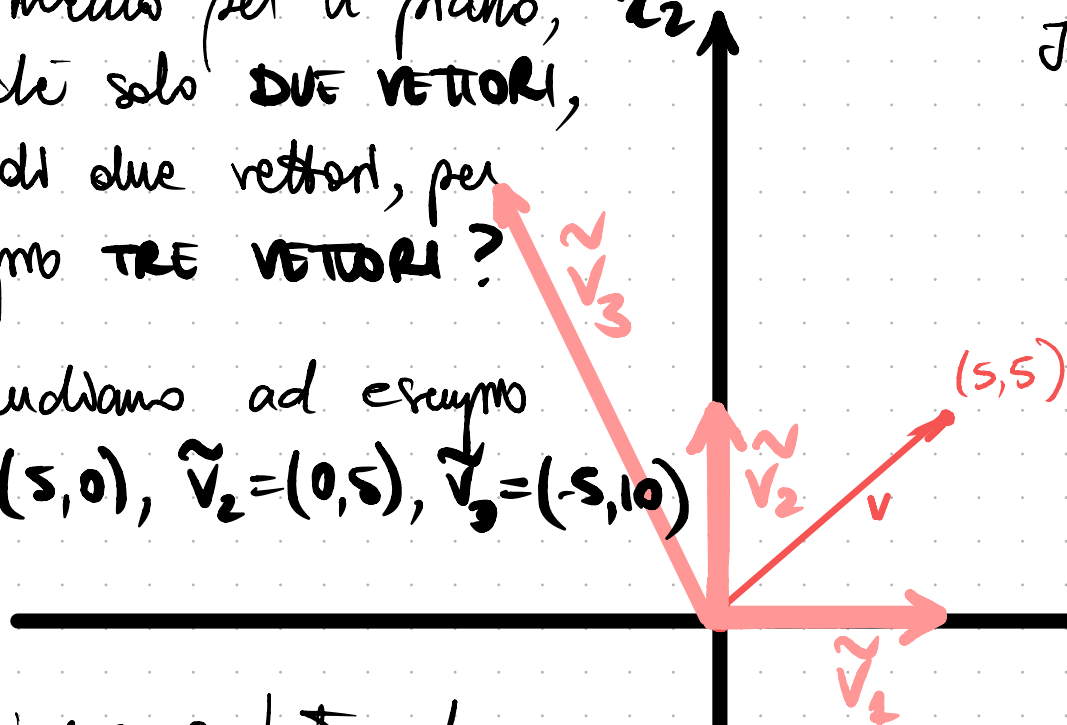
w_1 e w_2 **GENERANO** L'INTERO PIANO, ma è vero che **GENERANO SOLO LA RETTA** $x_2 = 3 \cdot x_1$

COSA È SUCCESSO ?!

Abbiamo trovato che il vettore v non può essere espresso in **NESSUN MODO** in termini di w_1 e w_2 , mentre w può essere espresso in **INFINITI MODI** in termini di w_1 e di w_2 !

Ma cosa succede se prendiamo come riferimento per il piano, anziché solo **DUE VETTORI**, più di due vettori, per esempio **TRE VETTORI**?

Prendiamo ad esempio $\tilde{v}_1 = (5, 0)$, $\tilde{v}_2 = (0, 5)$, $\tilde{v}_3 = (-5, 10)$



Vediamo subito che

$$\tilde{v}_3 = (-1) \cdot \tilde{v}_1 + 2 \cdot \tilde{v}_2$$

si dice che sono **LINEARMENTE DIPENDENTI** e quindi non sono **LINEARMENTE INDIPENDENTI**

In termini di $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$:

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot \tilde{v}_1 + 1 \cdot \tilde{v}_2 + 0 \cdot \tilde{v}_3 \\ &= 0 \cdot \tilde{v}_1 + 3 \cdot \tilde{v}_2 + (-1) \cdot \tilde{v}_3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \tilde{v}_1 + 0 \cdot \tilde{v}_2 + \left(\frac{1}{2}\right) \tilde{v}_3 \\ &= \dots \end{aligned}$$

INFINITI ALTRI MODI DI ESPRIMERE v COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$.

Intuitivamente, **3 VETTORI PER UN PIANO** sono **TROPPI**, sono **SOVRABBONDANTI**, sono **RIDONDANTI***, insomma **NE BASTANO DUE**, **DUE VETTORI COME DUE È LA DIMENSIONE DEL PIANO**

*In matematica si dice appunto **LINEARMENTE DIPENDENTI**