Il teorema fondamentale dell'algebra lineare

PROPOSIZIONE

$$\underset{M_{n\times m}(K)}{A}\cdot x = b \text{ è COMPATIBILE} \iff b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \subseteq K^n$$

[i.e. ammette soluzioni]

Dim.: $\Rightarrow$) Sia $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ una soluzione del sistema, in altre parole si ha che $A \cdot s = b$, espandendo il prodotto riga per colonne si ha che

PERCHÉ s È SOLUZ. DEL SISTEMA LINEARE

$$A \cdot s = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + \dots + a_{1m}s_m \\ \\ a_{n1}s_1 + \dots + a_{nm}s_m \end{pmatrix} = \underbrace{A^{(1)}s_1 + \dots + A^{(m)}s_m}_{\text{COMBINAZIONE LINEARE ESPLICITA CHE DÀ IL VETTORE } b} = b$$

$\Rightarrow b \in \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \Rightarrow b = \lambda_1 \cdot A^{(1)} + \dots + \lambda_m \cdot A^{(m)}$

E quindi per il ragionamento precedente

$$b = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_m a_{1m} \\ \\ \lambda_1 a_{n1} + \dots + \lambda_m a_{nm} \end{pmatrix} = A \cdot \lambda$$

Quindi λ è soluzione e perciò il sistema lineare è **COMPATIBILE**.

$\square$

In altre parole abbiamo fatto vedere che:

"UN SISTEMA LINEARE AMMETTE SOLUZIONI

SE E SOLTANTO SE

IL VETTORE DEI TERMINI NOTI È UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DELLA MATRICE DEL SISTEMA"

$\boxed{\text{COR}}$ In particolare se un sistema è **OMOGENEO** allora è compatibile.

Dim: $\mathbf{b} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A}^{(1)} + \ldots + \mathbf{0} \cdot \mathbf{A}^{(n)}$ $\square$

Lo sapevamo già che il vettore nullo risolve ogni sistema lineare omogeneo, ma lo abbiamo rideriviato in un modo differente come corollario della proposizione precedente (che il matematico Streng chiama "Teorema fondamentale dell'algebra lineare" nel suo libro '93).

PROP $v_1, \dots, v_k \in V$ LIN. DIP. $\Longleftrightarrow$ Almeno un v_j si può scrivere come combinazione lineare degli altri vettori (i.e. $v_j \in \text{Span}(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k)$).

Dim.: $\Rightarrow$ | Sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ con i λ_j non tutti nulli, in particolare assumiamo che $\lambda_j \neq 0$ per un j fissato.

Allora:

$$v_j = -\frac{1}{\lambda_j}\left(v_1\lambda_1 + \dots + \hat{v}_j + \dots v_k\lambda_k\right)$$

abbiamo portato v_j dell'altro lato e diviso

$$= \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right)\cdot v_1 + \dots + \hat{j} + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)\cdot v_j$$

$\Leftarrow$ | $v_j = \mu_1 v_1 + \dots + \hat{j} + \dots + \mu_k v_k$ per ipotesi, quindi portando v_j dell'altro lato abbiamo

PER IPOTESI NON TUTTI I μ_i SONO NULLI

$$\mu_1 v_1 + \dots + (-1)\cdot v_j + \dots + \mu_k v_k = 0$$

E siccome non tutti i μ_i sono nulli, allora i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono LINEARM. DIPENDENTI

$\blacksquare$

PROP $B := \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ È UNA BASE $\iff$ $\forall v \in V \ \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_k : v = \sum \lambda_i v_i$

"ESISTONO E SONO UNICI"

SE QUESTO È VERO ALLORA GLI λ_i SI CHIAMANO COORDINATE DI v RISPETTO ALLA BASE B

Dim.: $\Rightarrow$ $v \in V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$, allora v si deve poter esprimere come combinaz. lineare dei vettori della base B:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$$

"PER QUALCHE"

Se ci fosse anche un'altra combinazione lineare:

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \quad \exists \mu_1, \dots, \mu_k \in K$$

allora potremmo prenderne la differenza ottenendo:

$$(\mu_1 - \lambda_1) \cdot v_1 + \dots + (\mu_k - \lambda_k) \cdot v_k = 0$$

ma per ipotesi i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti perciò l'unica combinazione lineare che dà zero è quella banale perciò: $\mu_1 - \lambda_1 = 0, \ \mu_2 - \lambda_2 = 0, \dots, \mu_k - \lambda_k = 0$ e quindi $\mu_i = \lambda_i \ \forall i = 1, \dots, k$, ne segue che v si scrive **IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE** degli elementi della base.

$\Leftarrow$ | Basta scrivere il vettore nullo $\mathbf{0}$ come combinaz lineare degli elementi di $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k$$

siccome $\mathbf{0}$ per ipotesi si può scrivere in un unico modo rispetto a $\mathcal{B}$, si ha che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$ che altro non è se non la definizione di **INDIPENDENZA LINEARE** per i vettori $v_1, \dots, v_k$.

$\boxed{\textbf{LEMMA}}$ $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v)$

Dim.: $\subseteq$ | banale perché aggiungendo un vettore non possiamo generare meno vettori.

$\supseteq$ | Se $u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v) \Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda \cdot v$ $(\exists \lambda_i, v \in K)$ usando che $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ cioè che $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ $(\exists \mu_i)$

Allora

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) \cdot v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$\square$

$\boxed{\text{LEMMA}}$ $\left.\begin{array}{l} v_1,\dots,v_k \in V \text{ LIN. INDIP.} \\ v \notin \text{Span}(v_1,\dots,v_k) \end{array}\right\} \Rightarrow v_1,\dots,v_k,v$ LIN. INDIP.

Si legge: aggiungendo a vettori linearm. indip un nuovo vettore che non sia combinazione lineare dei precedenti, si ottengono ancora vettori linearmente indipendenti.

Dim.: sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda v = 0$. Se $\lambda = 0$ non c'è niente da dimostrare perché $v_1,\dots,v_k$ sono LIN. INDIP. per ipotesi. Se $\lambda \neq 0$ allora $v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ e quindi $v \in \text{Span}(v_1,\dots,v_k)$ contraddicendo l'ipotesi, allora $\lambda = 0$ e $\lambda_i = 0$ $\forall i$. $\square$

$\boxed{\text{PROP}}$ [ESTRAZIONE della BASE]: $V = \text{Span}(v_1,\dots,v_k)$

$\Rightarrow \exists B$ BASE di V : $B \subset \{v_1,\dots,v_k\}$.