ESERCIZI SU MATRICI E SOTTOSPAZI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2024/25

Esercizio 1

Date le seguenti coppie di matrici A e B, **verifica** che B è l'inversa di A.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 14 & -6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 2 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 2 & -13 & -4 \\ -4 & 22 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Un conto esplicito mostra che vale sempre

$$AB = BA = 1_3$$

dove 1_3 è la matrice unità 3×3.

Esercizio 2

Dimostra che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

non è invertibile. **Dimostra** poi che nessuna matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2\,a & 2\,b \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ può essere invertibile.

Risoluzione. Se la matrice A fosse invertibile, allora esisterebbe una matrice

$$C = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

tale per cui $AC = CA = 1_2$, dove 1_2 è la matrice unità 2×2. In particolare, questo significa che

$$\begin{cases} c + 2e &= 1 \\ 2c + 4e &= 0 \end{cases}$$

il che è impossibile, dunque A non è invertibile.

Analogamente, se per qualche $a, b \in \mathbb{R}$ una matrice A del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2\,a & 2\,b \end{pmatrix}$$

fosse invertibile, allora esisterebbe una matrice C come sopra tale per cui $AC = CA = 1_2$. Questo in particolare implicherebbe che

$$\begin{cases} ac + be &= 1 \\ 2ac + 2be &= 0 \end{cases}$$

il che è impossibile, quindi A non è invertibile.

Esercizio 3

Siano $A, B, C \in M_n(K)$, dove K un campo, e supponiamo che A sia invertibile. **Dimostra** che anche ${}^tA$ è invertibile e che $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. **Dimostra** inoltre che vale la *legge di cancellazione*, ovvero che

$$\text{se } AB = AC \quad \text{allora } B = C\,.$$

Risoluzione. Supponiamo che A sia invertibile, allora esiste $B \in M_n(K)$ tale che $AB = BA = 1_n$ dove 1_n è la matrice unità $n \times n$. Dal momento che ${}^t(1_n) = 1_n$, per le proprietà della trasposta vale che

$${}^tB{}^tA = {}^tA{}^tB = 1_n$$

e quindi anche ${}^tA$ + invertibile e la sua inversa è la trasposta dell'inversa di A.

Ora supponiamo che A sia invertibile e che valga $AB = AC$. Moltiplicando a sinistra entrambi i membri di questa uguaglianza per A^{-1} otteniamo che

$$\begin{gathered} A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ (A{-}1A)B = (A^{-1}A)C \\ 1_nB = 1_nC \\ B = C \end{gathered}$$

pertanto $B = C$, come volevamo dimostrare.

Esercizio 4

Considera una matrice diagonale $D \in M_n(K)$, dove K è un campo:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Dimostra che D è invertibile se e solo se $d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn} \neq 0$ e che in tal caso vale

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Risoluzione. Notiamo che

$$d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn} \neq 0 \quad \text{se e solo se} \quad d_{ii} \neq 0 \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

Pertanto, dobbiamo mostrare che

$$D \text{ è invertibile} \quad \text{se e solo se} \quad d_{ii} \neq 0 \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}\,.$$

Supponiamo dunque che D sia invertibile e mostriamo che $d_{ii} \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Dato che D è invertibile, esiste una matrice E tale che $DE = ED = 1_n$ dove 1_n è la matrice unità $n \times n$. Se denotiamo con e_{ij} l'elemento di posto i, j di E, allora dall'uguaglianza precedente otteniamo che

$$\text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \text{ vale che } d_{ii}e_{ii} = 1$$

dove 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione del campo K. Segue quindi che ciascun d_{ii} è non nullo (perché altrimenti avremmo $d_{ii}e_{ii} = 0$).

Supponiamo ora che valga che $d_{ii} \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Dato che K è un campo, ciascun d_{ii} è quindi invertibile, dunque per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste d_{ii}^{-1}. Formiamo ora la matrice

$$E = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

Un conto esplicito mostra che $DE = ED = 1_n$, pertanto D è invertibile.

Il ragionamento precedente mostra anche che quando D è invertibile la sua inversa è la matrice diagonale con elementi diagonali gli inversi degli elementi diagonali di D.

Esercizio 5

Usando i risultato dell'Esercizio 1, **dimostra** che ciascuno dei seguenti sistemi lineari ammette un'unica soluzione e **calcolala**:

$$\begin{cases} -6x + 2y + z &= 2 \\ -3x + 2y &= -1 \\ 4x - y - z &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 8y + 2z &= 1 \\ 2x - 5y - 2z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y - 6z &= 3 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \\ -4y - 10z &= -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y - 8z &= -2 \\ -2x - y + 2z &= 1 \\ -2x - z &= 2 \end{cases}$$

Risoluzione. Notiamo come tutti i sistemi siano della forma

$$MX = b$$

dove $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ e b è un vettore colonna 3×1 ed M è una delle matrici che compare nell'Esercizio 1, o una sua trasposta, o un suo multiplo. In particolare, la matrice M è sempre invertibile e dunque per il teorema di Cramer il sistema ha un'unica soluzione, che è data da $M^{-1}b$. L'Esercizio 1 assieme all'Esercizio 3 permettono di calcolare M^{-1}.