ESERCIZI DI ANALISI 2
Anno accademico 2024/2025 – Ingegneria
Prof.ssa Rodica Toader

Calcolo differenziale

1. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:
- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2.

2. Si dimostri che la funzione

$$h(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$$

non è differenziabile in $(0,0)$.

3. Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin((x^2+y^2)^\alpha) & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Dire per quali valori di α la funzione è:
- continua
- differenziabile
- di classe C^1
- differenziabile due volte
- di classe C^2.

4. Calcolare $H_f(x,y)$, la matrice hessiana in (x,y) della funzione

$$f(x,y) = \arctan(x^2+y)\,.$$

5. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0,0)$ associato alla funzione

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{x+y^2}\,.$$

6. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(0,0)$ associato alla funzione

$$f(x,y) = (x+2y+3)e^{x^2+y^2}\,.$$

7. Sia A il dominio della funzione $a(x,y) = \sqrt{4-x-y}$ e sia B il dominio della funzione $b(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Determinare tutti i punti dove si annulla il gradiente della funzione $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$. Calcolare massimo e minimo, se esistono, della funzione f nell'insieme $A \cap B$.

8. Per le seguenti funzioni disegnare l'insieme di livello

$$\Sigma_0 = \{(x,y) : f(x,y) = 0\},$$

individuare l'insieme

$$\Sigma_+ = \{(x,y) : f(x,y) \geq 0\},$$

determinare i punti stazionari e stabilire se sono punti di massimo o punti di minimo locale.

a. $f(x,y) = (x-y)(y-x^2+4)$

b. $f(x,y) = x(y-3)^2$

c. $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x^2-2y^2)$

d. $f(x,y) = (x^2-4)(y^2-25)$.