PROP $B=\{v_1,\dots,v_k\}$ BASE PER V $\Rightarrow$ OGNI INSIEME DI V CON PIÙ DI k ELEMENTI È FATTO DI VETTORI **LINEARM. DIPENDENTI**

Dim.: Partiamo da un qualunque insieme di più di k elementi:
$$\{w_1,\dots,w_m\}\subset V \quad \text{con} \quad m>k$$

Per definizione di base, ogni w_j si può scrivere (in modo unico per di più) come combinazione lineare degli v_i:
$$w_j=\sum_{i=1}^{k} a_{ij}v_i \quad \exists a_{ij}\in K,\ \forall j=1,\dots,m$$

Il nostro scopo è mostrare che i vettori w_j sono linearm. dipendenti, in particolare è sufficiente mostrare che esiste una loro combinazione lineare **NON BANALE** che sia uguale a zero. Quindi consideriamo l'equazione
$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j w_j=0$$
e vediamo se riusciamo a trovare λ_j non tutti uguali a zero.

Osserviamo che:

SOSTITUIAMO ESPRESSIONE SOPRA

SCAMBIAMO LE SOMMA

$$0=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j w_j = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^{k}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\lambda_j\right)}_{\text{NUOVI COEFFICIENTI CHE CHIAMIAMO } \mu_i} v_i$$

ovvero che:

$$\sum_{i=1}^{k}\mu_i v_i = 0$$

Ma essendo $\{v_i\}_i$ una base, in particolare sono LIN. INDIP. e perciò possiamo concludere che:

$$0=\mu_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\lambda_j \qquad \forall i=1,\dots,n$$

Questo è un sistema lineare con **m incognite** $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ e **n equazioni** di tipo **OMOGENEO** dove abbiamo supposto per ipotesi che:

$$m \underset{\neq}{>} n$$

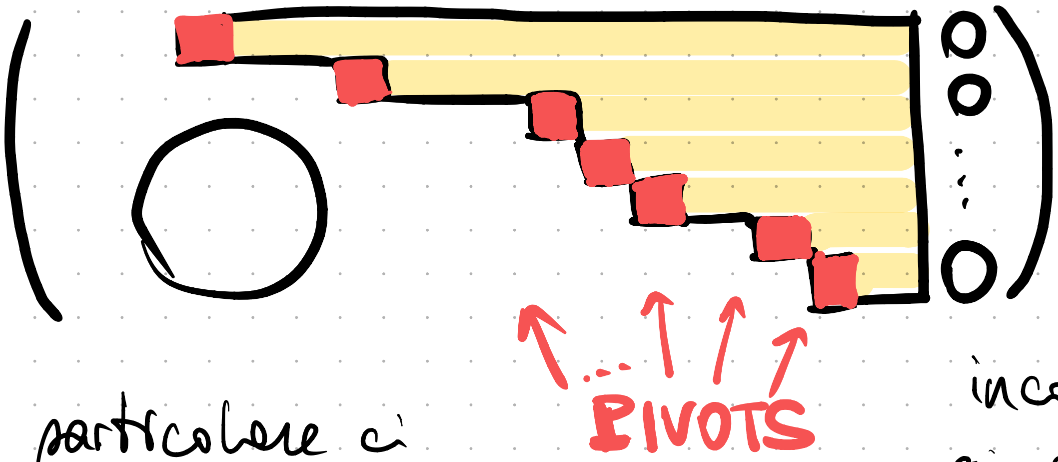
VUOL DIRE MAGGIORE STRETTAM.

Allora questo sistema lineare **OMOGENEO** ha una matrice **COMPLETA** associata

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 \end{array}\right)$$

(A|0) È PIÙ LARGA CHE ALTA! ($m>n$)

Riducendo la matrice **IN FORMA SCALA** si trova una matrice della forma



Durante la **SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO**, essendoci più incognite che equazioni ci saranno alcuni **PARAMETRI LIBERI NELLA SOLUZIONE**

In particolare ci sono **INFINITE SOLUZIONI** ?

Se ci sono infinite soluzioni del sistema, vuol dire che ci sono infiniti vettori $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tali che $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j = 0$

In particolare, esiste almeno un vettore $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ **DIVERSO DAL VETTORE NULLO TALE CHE** $\sum_{j=1} \lambda_j w_j = 0$

Quindi per definizione questo significa che:

$w_1, \dots, w_m$ **SONO LINEARM. DIPENDENTI.**

$\square$

TEOREMA [Delle BASE].

Sia V FINITAM. GENERATO $\Rightarrow$ TUTTE LE BASI di V HANNO LA STESSA CARDINALITÀ

Dim.: Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ due basi di V.
Per la proposizione precedente applicata alla prima base si ha che $n \geq m$. Rovesciando i ruoli delle due basi si trova che $n \leq m$, da cui $n = m$.

$\square$

Quindi ha senso **ASSOCIARE** ad ogni spazio vettoriale finitamente generato un **NUMERO NATURALE** definito come **LA CARDINALITÀ DI OGNI SUA BASE!**
In pratica il teorema della base ci dice che questo numero è **BEN DEFINITO** e perciò **SIAMO AUTORIZZATI A CONSIDERARLO**.

Questo ci porta ad una importante definizione.

DEF Sia V FINITAM. GENERATO. LA **DIMENSIONE di V**, che si indica con $\dim(V)$, è DEFINITA come la cardinalità [i.e. il numero di elementi] di una sua QUALSIASI BASE.

ESEMPI:

SIMBOLO DELLA CARDINALITA'

1. $V=\{0\} \Rightarrow B=\emptyset \Rightarrow |B|=0 \Rightarrow \dim(\{0\})=0$
2. $V=K^n \Rightarrow B:=\{e_1,\dots,e_n\} \Rightarrow |B|=n=\dim(K^n)$
   (PER ESEMPIO QUELLA CANONICA)
3. $V=M_{n\times m}(K) \Rightarrow B:=\{E_{i,j}\}_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \Rightarrow |B|=n\cdot m=\dim(M_{n\times m}(K))$
   (BASE CANONICA PER SPAZI DI MATRICI VISTA LA SCORSA VOLTA)
4. $V=K[x]_d \Rightarrow B:=\{1,x^1,x^2,\dots,x^d\} \Rightarrow \dim(K[x]_d)=d+1$

$\boxed{\text{PROP}}$ $\left.\begin{array}{l} \dim(V) = n \\ v_1, \dots, v_n \text{ LIN. INDIP.} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è BASE per V

Si legge: "in uno spazio vettoriale di dimensione **n**, **QUALSIASI n VETTORI** che siano **LIN. INDIP.** **FORMANO una BASE** per V"

Dim.: $\dim(V) = n \Rightarrow V$ è $\left.\begin{array}{l}\text{FINITAM. GENERATO} \\ v_1, \dots, v_n \text{ LIN. INDIP.}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists B \supseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ BASE per V

ma se B avesse qualche altro elemento oltre a $\{v_1, \dots, v_n\}$ allora $\dim(V) > n \Rightarrow B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V

$\square$

PROP $W \subseteq V$ (W: SOTTOSPAZIO; V: FINITAM. GENERATO) $\Longrightarrow \begin{cases} i.) \ W \text{ FIN. GEN e } \dim W \leq \dim V \\ ii.) \ W = V \Leftrightarrow \dim W = \dim V \end{cases}$

Dim.: i) Se W fosse infinitamente generato, potremmo scegliere $\dim(V)+1$ VETTORI LIN. IND. dentro a V, il che sarebbe assurdo. Con lo stesso ragionamento: sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base per $W \subseteq V$, ma allora m non può essere più grande di $\dim(V)$.

ii) $\Rightarrow$ banale

$\Leftarrow$ Se V fosse strettamente più grande di W possiamo utilizzare il COMPLETAMENTO della base: prendiamo una base $\{w_1, \dots, w_m\}$ di $W \subsetneq V$, siccome $W \neq V$ allora non può essere una base anche di V, e allora necessita di un completamento per essere resa una base di V. Ma allora una base di V conterrà almeno $\{w_1, \dots, w_m, v\}$, dove v è il primo nuovo vettore del completamento $\Rightarrow \dim V > \dim W$
$\Rightarrow$ assurdo $\square$

TEOREMA [FORMULA di GRASSMANN]

LA FORMULA CI SARÁ UTILE!

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

↳ Corollario: $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

(**Dim.:** Saltiamo. Sul libro di Sernesi per chi vuole vedere all'orale)

PROP [Esistenza del Supplemento]

$$U \subseteq V \;(\text{FIN.GEN.}) \Rightarrow \exists W \subseteq V \text{ tale che } V = U \oplus W$$

Dim.: V FIN. GEN. $\Rightarrow$ U FIN. GEN. $\Rightarrow$ $\exists \{u_1, \dots, u_m\}$ BASE per U che possiamo completare ad una base $\{u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_t\}$ di V. Allora basta porre $W := \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_t)$

$\square$