

25 ottobre

Def Sia I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ ed
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora, se il seguente limite,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è un numero reale, allora denotiamo il
limite con

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

e chiamiamo il limite la derivata (prima) di
 $f(x)$ nel punto x_0 . Si dice anche che f
è derivabile o anche differenziabile nel punto x_0 .

Se f è derivabile in tutti i punti di I
diciamo che la funzione f è derivabile in I .

In quest'ultimo caso resto definito una nuova
funzione $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$, $f': I \rightarrow \mathbb{R}$.

In particolare se $f' \in C^0(I)$ scriviamo $f \in C^1(I)$.

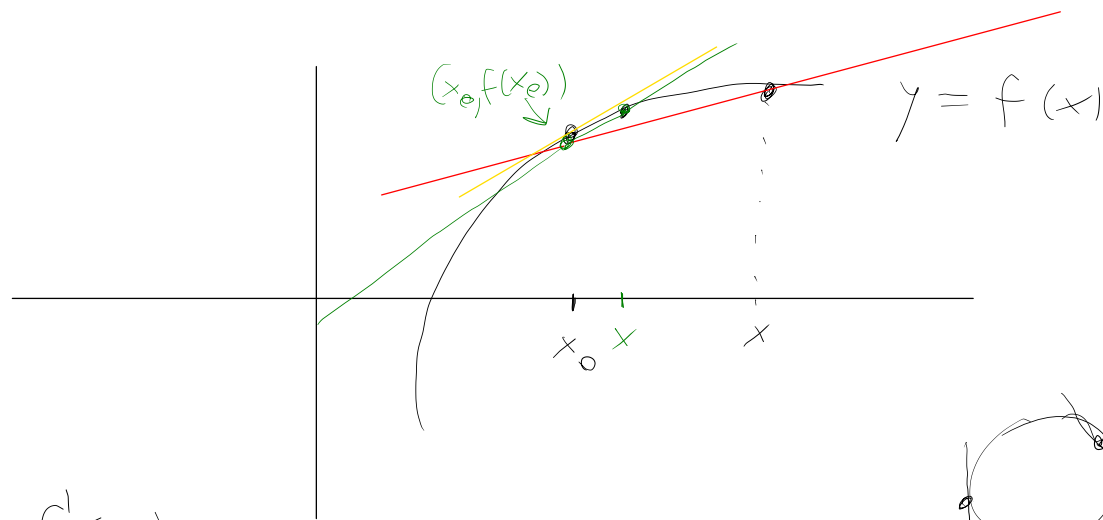
Osservazione

Se pongo $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

Significato geometrico



Supponiamo $f'(x_0)$ esista. Ricordiamo che

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è il coeff. angolare della retta rossa nel disegno.

Nel disegno osserviamo che per $x \rightarrow x_0$ la retta individuata dai punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ converge alla retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

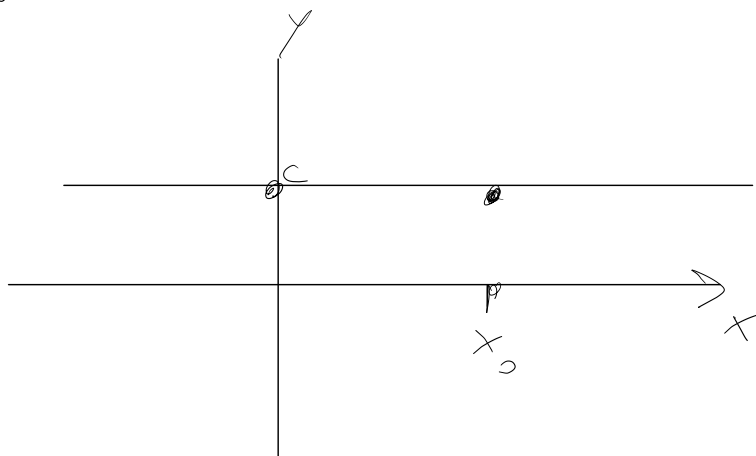
Questo è un primo significato della derivata.

Nella Definizione retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$

la retta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Calcolo di qualche derivata

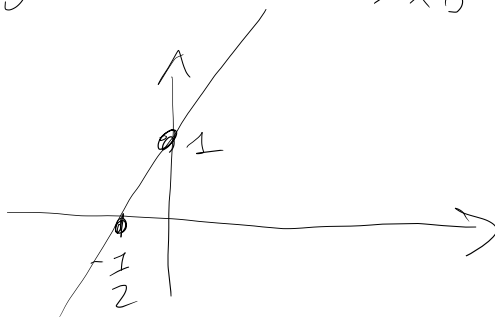
$$1) f(x) \equiv c \quad c(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

$$2) f(x) = 2x + 1$$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x + 1 - (2x_0 + 1)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2$$

$$3) \quad f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h+x_0} - e^{x_0}}{h} =$$

$$h = x - x_0 \quad x = h + x_0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h e^{x_0} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

$$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad (\lg x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

$$\left((\lg |x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lg x - \lg x_0}{x - x_0}$$

$$x_0 > 0$$

$$h = x - x_0$$

$$\frac{\lg(x) - \lg(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lg(h + x_0) - \lg(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\lg\left(x_0 \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right) - \lg(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\lg(x_0)} + \lg\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) - \cancel{\lg(x_0)}}{h}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\lg(x) - \lg(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{x_0 \frac{h}{x_0}} =$$

Ricordiamoci $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lg\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \quad y = \frac{h}{x_0}$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0}$$

$$(\lg x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

f)

$$x^a \quad a \in \mathbb{R} \quad x > 0$$

$$(x^a)' = a x^{a-1} \quad \forall x > 0$$

$$(x^{100})' = 100 x^{99} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = h + x_0$$

$$h = x - x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^a - x_0^a}{x - x_0} =$$

$$x_0 > 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + x_0)^a - x_0^a}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(x_0 \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right)^a - x_0^a}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^a \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a - x_0^a}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} x_0^a \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a - 1}{h}$$

$$= x_0^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a - 1}{x_0 \frac{h}{x_0}} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^a - 1}{y} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$= x_0^{a-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a - 1}{\frac{h}{x_0}} \quad y = \frac{h}{x_0}$$

$$= x_0^{a-1} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^a - 1}{y}$$

Theorem Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in I$, esista $f'(x_0)$.

Allora f è continuo in x_0

Dim Continuità significa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \frac{x - x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

$\downarrow x \rightarrow x_0$ $\downarrow x \rightarrow x_0$

$f'(x_0)$ 0

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Teorema Sono $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in I$, esistono
 $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$. Allora abbiamo

$$1) (f(x) + g(x))'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2) c \in \mathbb{R}$$

$$(cf)'(x_0) = c f'(x_0)$$

$$3) (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(Attenzione ~~$(fg)' = f'g'$~~)

$$4) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Osservazione Le prime due regole si possono esprimere
 con

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{d}{dx} f + \mu \frac{d}{dx} g$$

$\frac{d}{dx}$ è simile ad una matrice

Dim di 3

$$(f g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$$\frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{(f(x) g(x) - f(x_0) g(x)) + (f(x_0) g(x) - f(x_0) g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$x \rightarrow x_0$

$x \rightarrow x_0$

$x \rightarrow x_0$

$$= f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= \frac{(f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)) + (f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x))}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} - \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{g^2(x_0)} [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)]$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$