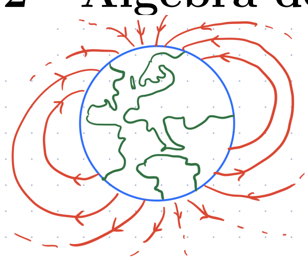
Lezione 2: Cinematica, moto uniforme e moto uniformemente accelerato

1 Concetti discussi

Algebra dei vettori. Cinematica: spostamento, velocità ed accelerazione. Velocità media e velocità istantanea. Legge oraria del moto. Moto rettilineo uniforme. Moto uniformemente accelerato. Accelerazione di gravità e caduta libera.

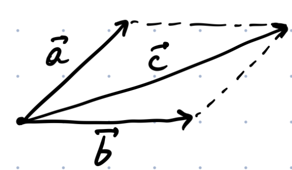
2 Algebra dei vettori

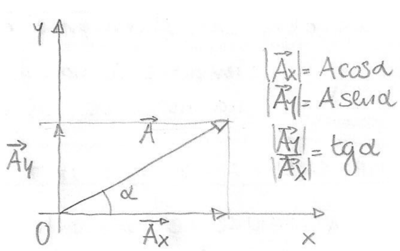


Al termine della scorsa lezione abbiamo visto che esistono grnadezze fisiche scalari ed altre che sono vettoriali. In particolare abbiamo detto che le grandezze vettoriali sono caratterizzate da un modulo, una direzione e un verso. Abbiamo inoltre visto che lo spostamento è una grandezza vettoriale. Un altro esempio di grandezza vettoriale è il campo magnetico $\vec{B}$ la cui direzione si misura con la bussola.

Vediamo ora le principali operazioni con i vettori

Somma di vettori Immaginiamo due vettori generici $\vec{a}$ e $\vec{b}$ come in figura. La somma di due vettori è anch'esso un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Un metodo generico della somma è il metodo del parallelogrammo che è mostrato in figura. In questo caso si sovrappone il punto di applicazione dei due vettori (per capirci, il punto da cui parte la freccia) mantenendo invariati la direzione, verso e modulo dei due vettori. Il vettore $\vec{c}$ risultante dalla somma sarà il vettore descritto dalla diagonale del parallelogramma.

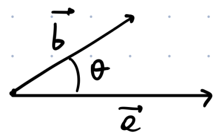




Un'altro metodo è la somma per componenti. In questo caso dobbiamo definire un sistema di coordinate (si veda la lezione precedente) e scomporre i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nelle due componenti. In particolare possiamo scrivere il vettore $\vec{a}$ come la somma di due vettori $\vec{a_x}$ e $\vec{a_y}$ che sono i vettori che definiscono la proiezione del vettore $\vec{a}$ sull'asse x e y. Allo stesso modo possiamo quindi scrivere che il vettore sarà $\vec{b} = \vec{b_x} + \vec{b_y}$. Pertanto potremo scrivere che il vettore $\vec{c} = \vec{c_x} + \vec{c_y}$. Il metodo della somma per componenti ci dice che $\vec{c_x} = \vec{a_x} + \vec{b_x}$ e $\vec{c_y} = \vec{a_y} + \vec{b_y}$. Dato che $\vec{a_x}, \vec{b_x} + \vec{c_x}$

hanno tutti la stessa direzione allora il modulo di $|\vec{c_x}| = c_x = a_x + b_x$, allo stesso modo $|\vec{c_y}| = c_y = a_y + b_y$.

La somma di vettori ci servirà ad esempio quando dovremo addizionare diverse forze che agiscono su un corpo.



Prodotto scalare Il prodotto scalare tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si indica con $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Il risultato è uno scalare, un numero, che vale $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta$. Si noti che se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono perpendicolari tra di loro il prodotto scalare tra i due vale 0.

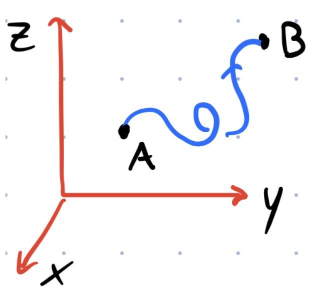
3 Cinematica

La cinematica si occupa dello studio dei moti. Nella sua forma più semplice si occupa del moto di un punto. Il punto che descrive un corpo di solito è detto **punto materiale** ed è un punto geometrico dotato di massa. Descrivere un corpo come un punto è una buona approssimazione se il moto è lo stesso per tutti i punti di un corpo oppure se le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto al percorso.

Quali sono le grandezze essenziali per descrivere il moto?

- **Spostamento**: variazione di posizione
- **Velocità**: rapidità di spostamento
- **Accelerazione**: rapidità di cambio di velocità

In altri termini, la velocità ci indica quanto in fretta cambia la posizione e l'accelerazione quanto in fretta cambia la velocità. Quindi potremmo dire che la posizione sta alla velocità come la velocità sta all'accelerazione.

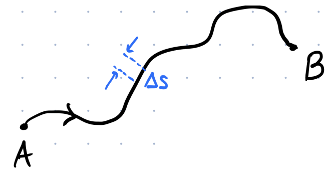


Il moto di un punto materiale è sempre relativo e dipende dall'osservatore. Pertanto va sempre definito il sistema di riferimento! Nella figura a fianco, l'osservatore si trova nell'origine degli assi cartesiani e osserva il moto descritto da un punto materiale nel muoversi dal punto A al punto B. Durante il suo moto, il punto materiale descrive una **traiettoria** ovvero l'insieme di tutte le posizioni assunte dal punto durante il moto. Per poter descrivere completamente il moto di un punto non basta avere la traiettoria ma è necessario sapere la posizione ad ogni istante di tempo. L'informazione temporale mi permette quindi di calcolare la velocità e l'accelerazione durante il moto.

Definito lo spostamento e la traiettoria possiamo ora descrivere la **velocità media** lungo una traiettoria di lunghezza s. La velocità media si può scrivere come

$$v = \frac{s}{\Delta t}$$

dove s è la lunghezza della traiettoria percorsa dal punto materiale e Δt il tempo impiegato a percorrerla. Si noti che la velocità media è uno scalare, a differenza della velocità che è una grandezza vettoriale. Se Δt è molto piccolo allora v prende il nome di **velocità istantanea** e possiamo scriverla come



$$v_{ist} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \ .$$

Per chi conosce le derivate la velocità istantanea si puö scrivere come

$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \ .$$

L'unità di misura della velocità media e della velocità istantanea è quindi **m/s**.

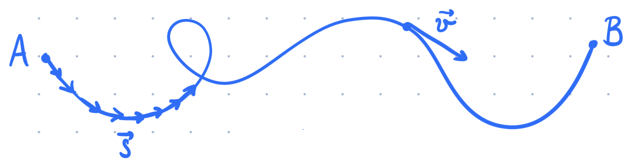


Figura 1: La traiettoria è definita da tanti infinitesimali spostamenti lineari (vettori) $\vec{s}$ e la velocità è la tangente alla traiettoria.

Fino a qui abbiamo calcolato il **modulo** della velocità. La velocità è una grandezza vettoriale. Sappiamo calcolare il modulo, ma quali sono il verso e la direzione? Per calcolare la velocità istantanea in ogni punto della traiettoria abbiamo calcolato la derivata, o la pendenza della variazione di posizione nelle immediate vicinanze del punto che ci interessa. Quindi possiamo dire che **la velocità è il vettore tangente alla traiettoria** il cui modulo vale v_{ist}.

Facciamo ora un esempio di calcolo della velocità media. Supponiamo che un treno impieghi 1:52 h per percorrere i 112 km di distanza tra Trieste e Venezia. La velocità media sarà

$$\bar{v} = \frac{112 \text{ km}}{(1 + 52/60) \text{ h}} = 60 \text{ km/h} = 16.6 \text{ m/s} \ .$$

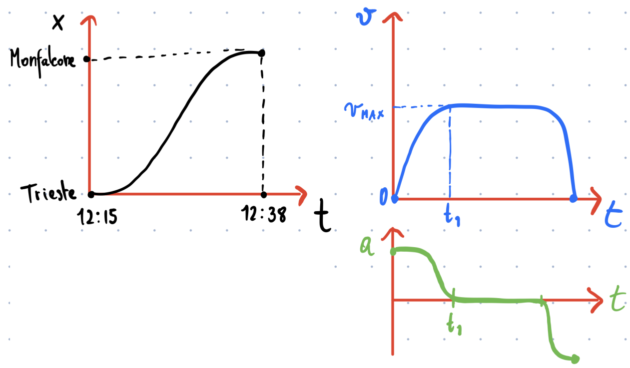
Questa è la velocità media. Durante il percorso il treno farà diverse fermate e in quei punti la sua velocità istantanea sarà di 0 m/s. In altri punti tra due fermate invece la sua velocità istantanea sarà maggiore della velocità media $v_{ist} > \bar{v}$.

Questo esempio ci porta quindi al concetto di **accelerazione**, che è definita come la rapidità di cambio di velocità. Se al tempo t_1 il modulo della velocità vale v_1 e al tempo t_2 il modulo della velocità vale v_2, allora l'accelerazione è si scrive come

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ .$$

L'unità di misura dell'accelerazione è quindi **m/s^2**. L'accelerazione ci indica la rapidità del cambio di velocità. Quindi un automobile che fa 0-100 km/h in 5 secondi, ha un'accelerazione maggiore di una che ne impiega 10. Questo però non significa necessariamente che l'auto con una maggiore accelerazione vada anche più velocemente!

Ora che abbiamo i concetti di base per capire il moto di un punto materiale possiamo introdurre il concetto di **legge oraria**. La legge oraria è semplicemente un'equazione che descrive la posizione nel tempo di un punto materiale.



Qui sopra un piccolo esempio che mostra le varie relazioni tra spostamento, velocità e accelerazione. Si noti in particolare che l'accelerazione è positiva quando la pendenza della velocità nel tempo v(t) è positiva, mentre è negativa quando la pendenza di v(t) è negativa. Allo stesso modo v(t) è positiva quando la posizione del tempo x(t) è positiva

4 Moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato

Il **moto rettilineo uniforme** descrive il moto di un punto materiale in assenza di accelerazione e dunque a velocità costante (sia in modulo che in direzione). Il moto è dunque lungo una retta, che per semplicità definiamo come asse x. La legge oraria del moto assumendo che al momento $t = 0$ il punto si trovasse in posizione x_0

$$x(t) = x_0 + vt$$

Il **moto uniformente accelerato** descrive invece il moto di un oggetto con accelerazione costante. In questo la velocità varia linearmente nel tempo e possiamo quindi scrivere che

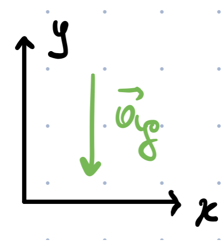
$$v(t) = v_0 + at$$

dove v_0 è la velocità iniziale e a l'accelerazione. Si noti che la velocità aumenta se $a > 0$ mentre diminuisce se $a < 0$. Come calcoliamo $x(t)$? dato che la velocità è la derivata nel tempo della posizione, allora $x(t)$ si può trovare integrando la velocità nel tempo.

$$x(t) = \int dt\, v(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

4.1 Accelerazione di gravità

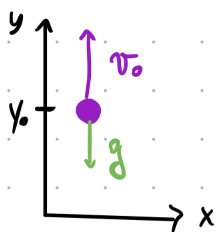
Come ci insegna Galileo, in assenza di attrito tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione. Quest'accelerazione si chiama accelerazione di gravità e il suo modulo viene indicato con $g = 9.81$ m/s^2. Il verso dell'accelerazione è verso la superficie terrestre quindi $\vec{a} = -g\,\hat{y}$ se $\hat{y}$ va dal basso verso l'alto come nella figura accanto. Si noti la notazione $\hat{y}$! questo significa un vettore unitario (cioè di modulo 1) che punta lungo l'asse y. Questa notazione è utile per definire la direzione di vettori e scomporli nelle sue proiezioni spaziali.



La caduta libera è quindi un moto accelerato uniforme verso il basso (cioè verso la superficie terrestre) Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} . \tag{1}$$

Facciamo ora un esempio. Supponiamo che una persona alta 1.80 ($y_0 = 1.8$ m) m tiri una pallina verso l'alto e che il lancio avvenga con velocità iniziale $v_0 = 35$ km/h. Senza considerare la resistenza dell'aria, quanto impiega ad arrivare al punto più alto? quando invece a toccare terra?



soluzione Partiamo definendo il sistema di coordinate e la direzione e il verso delle quantità vettoriali che ci interessano (figura a fianco). Scriviamo poi le equazioni del moto:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} . \tag{2}$$

Nel punto più alto la pallina si ferma per poi cominciare a scendere. Quindi la sua velocità sarà $v = 0$. Pertanto $0 = v\_gt_{top}$ e quindi $t_{top} = v_0/g = 0.99$ s. L'altezza a cui arriva la pallina possiamo quindi calcolarla usando la seconda equazione e sostituendo t con t_{top}. Quindi

$$h_{top} = y(t_{top}) = y_0 + v_0 t_{top} - \frac{1}{2} g t_{top}^2 = 6.62\,\mathrm{m}$$

Per sapere invece quanto ci mette per toccare terra invece fissiamo $y(t_{terra}) = 0$ e quindi:

$$0 = y_0 + v_0 t_{terra} - \frac{1}{2} g t_{terra}^2$$

e quindi

$$t_{terra} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 g y_0}}{-g} = 2.15\,\mathrm{s}$$