Napier e la storia dei logaritmi

Il logaritmo (dal greco *logos* = "ragione", "rapporto" e *arithmos* = "numero") di un numero (detto argomento del logaritmo), data una certa base, è l'esponente a cui bisogna elevare la base per ottenere il numero considerato:

$$a^x = b$$

risulta equivalente a:

$$\lg_a b = x.$$

Proprietà elementari:

$$\lg_a (bc) = \lg_a b + \lg_a c$$

$$\lg_a \frac{b}{c} = \lg_a b - \lg_a c$$

$$\lg_a b^n = n \lg_a b.$$

I logaritmi sono il frutto della mente e degli studi del matematico scozzese **John Napier** (1550 - 1617), italianizzato in Giovanni Nepero.

Ritratto di John Napier (1550 - 1617)

John nacque nel 1550 all'interno del Merchiston Castle ad Edinburgo, in Scozia.

Merchiston Tower, Edinburgh

Suo padre, Sir Archibald Napier, era un ricco proprietario terriero, mentre sua madre, Janet Bothwell, era la figlia di un importante politico e giudice, Francis Bothwell. Archibald Napier aveva solamente 16 anni quando nacque il genio matematico di famiglia, suo figlio.

John nacque dunque in una famiglia benestante, vivendo una vita agiata, tanto da non frequentare la scuola sino ai 13 anni di età. Appunto nel 1563 cominciò a frequentare la St Andrews University; poco tempo dopo la sua immatricolazione, avvenne la morte della madre.

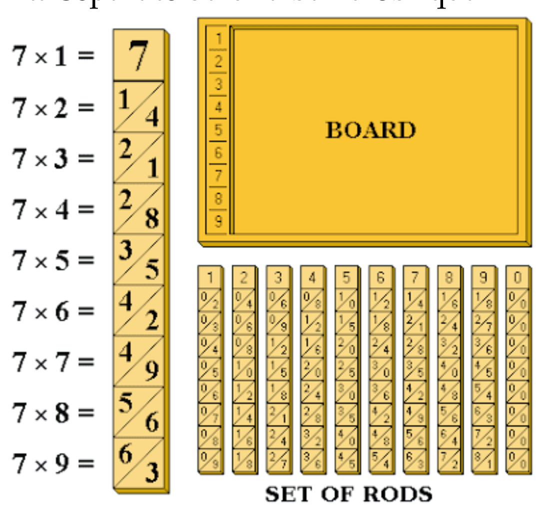
Sappiamo che John trascorse le sue giornate all'università e, diversi anni dopo, egli scrisse che nella stessa incominciò ad appassionarsi alla teologia. Tuttavia, il nome di Napier non appare nel registro di coloro che si sono laureati alla St Andrews University. Di conseguenza, è molto probabile che abbia abbandonato questa università. E' certo comunque che Napier non acquisì le sue conoscenze di matematica avanzata alla St Andrews University e neppure la sua ampia cultura in campo di letteratura classica.

Tali conoscenze devono essere state acquisite durante i suoi studi in Europa, ma non sussistono documenti ufficiali attestanti dove abbia effettivamente proseguito i suoi studi, anche se è molto probabile che abbia frequentato l'Università di Parigi e abbia avuto esperienze in Italia e Olanda.

Nel 1571 Napier fece il suo ritorno in Scozia per essere presente alle seconde nozze del padre. Nel medesimo anno incominciò i preparativi per il suo matrimonio, che però si concretizzò solamente 2 anni dopo. Nel 1574 John e sua moglie si sistemarono nel castello a Gartness, luogo da cui egli decise di amministrare e far fruttare i propri vasti possedimenti, dedicandosi persino all'agricoltura in modo scientifico.

Napier prese parte alle controversie religiose del tempo. Era un fervente protestante e pubblicò, nel 1593, quella che lui stesso riteneva la sua opera più importante, ossia *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John*. Paradossalmente, la matematica era solo un hobby e, nelle sue opere matematiche, egli scrisse che trovava difficilmente del tempo da dedicare alla matematica, in quanto maggiormente dedito alla teologia.

Tra gli aspetti che più gli interessavano ritroviamo sicuramente il computo e la trigonometria. Infatti nel 1617 fu pubblicato postumo, nell'opera *Rabdologiæ seu Numerationis per Virgulas libri duo*, il suo metodo basato sui cosiddetti "bastoncini di Nepero", detti anche "ossi di Nepero" o *virgulae numeratrices*, cioè un insieme di asticelle (spesso d'avorio) sulle quali erano incisi dei numeri che potevano essere usati per eseguire velocemente e correttamente le moltiplicazioni, simulando così il metodo con carta e penna. Nello specifico, su ciascuna delle asticelle erano incisi i primi multipli di un numero, con le decine e le unità separate da una barra obliqua.



Probabilmente attorno al 1594, Napier cominciò invece a lavorare a un metodo maggiormente teorico, pubblicato solamente 20 anni dopo. Potrebbe essere partito dalle progressioni geometriche, ovvero successioni di numeri dove il rapporto tra un numero e il suo precedente è sempre il medesimo, una costante detta *ragione*. Un semplice esempio di progressione geometrica è dato da quella costituita dalle potenze di 2:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32\ldots$$

Un altro esempio è dato da quella formata dalle potenze di 10:

$$1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 10.000 \quad 100.000\ldots$$

Si sapeva già da tempo che sommare gli esponenti era equivalente a moltiplicare le potenze (posto che la base fosse la medesima), nozione che era stata diverse volte oggetto di pubblicazioni, come l'*Arithmetica integra* (1544) di **Michael Stifel** (1487-1567), e, addirittura, compare nelle opere di Archimede. Questo funzionava se si volevano moltiplicare due potenze intere, per esempio di 2 oppure di 10. Sussistevano tuttavia ampi intervalli (spaziature) fra questi numeri, e le potenze di 2 o di 10 non sembravano di grande aiuto quando ci si trovava di fronte ad operazioni quali $63,389 \times 31,443$.

Mentre il barone Napier stava rimuginando sulla spinosa questione, John Craig, medico personale di Giacomo VI di Scozia, gli fece visita e gli riferì relativamente a un'importante scoperta matematica in Danimarca, nota con la denominazione di "prostaferesi":

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Probabilmente Craig era stato membro della delegazione che nel 1590 aveva accompagnato Giacomo VI nel suo viaggio in Danimarca per incontrare la futura moglie, Anna di Danimarca. Una tempesta aveva poi costretto la delegazione a sbarcare in un punto della costa danese non lontano dall'osservatorio di **Tycho Brahe** e, mentre aspettavano che le condizioni meteorologiche migliorassero, furono intrattenuti dal celebre astronomo. Sembra che costui accennò alla straordinaria tecnica matematica della prostaferesi, spesso utilizzata in quell'osservatorio per compiere calcoli. Questo nuovo metodo della prostaferesi si basava principalmente su una formula scoperta già da Viète:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}.$$

Il termine *prostaferesi* deriva da una giustapposizione di 2 parole di origine greca, *prosthesis* e *aphairesis*, che significano rispettivamente "somma" e "sottrazione". D'altronde, le formule di prostaferesi, studiate ancor oggi nei licei, consentono di trasformare la somma o la differenza di seni, coseni, tangenti e cotangenti in prodotti.

Ebbene, proprio partendo dall'idea alla base del suddetto metodo (la conversione del prodotto in somma) e sviluppandola ulteriormente, Napier formulò il concetto di logaritmo.

L'introduzione dei logaritmi si ebbe nell'opera, risalente al 1614, intitolata *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrizione della regola meravigliosa dei logaritmi).

Napier costruì una serie geometrica di ragione molto vicina a 1, e precisamente, al posto di 2 o di 10, utilizzò potenze di numeri simili ad esempio a $1,0000000001$.

Le potenze successive di un numero del genere risultano estremamente ravvicinate, e ciò è sufficiente per eliminare quelle fastidiose spaziature a cui facevamo riferimento in precedenza. Napier scelse alla fine un rapporto leggermente inferiore a 1, ossia $0,9999999$. In questo modo la sua successione geometrica "si spostava all'indietro" da un numero grande a numeri sempre più piccoli.

Egli partì da $10.000.000$ e poi moltiplicò il suddetto numero per potenze successive di $0,9999999$.

In altre parole, considerò come base del logaritmo $0,9999999$, cioè

$$1 - \frac{1}{10^7}$$

In questo modo, però, i termini della progressione delle potenze sono troppo vicini fra loro. Per ottenere un maggior equilibrio e per evitare fastidiose cifre decimali, Napier moltiplicò ciascuna potenza per $10.000.000$ (ovvero 10^7). Se

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

allora L è il "logaritmo neperiano" del numero N. Da ciò si può concludere che il logaritmo neperiano di 10^7 è 0. Infatti, ponendo $N = 10^7$ abbiamo:

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 10^7 \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 1 \quad \Rightarrow \quad L = 0.$$

Ecco giustificata l'espressione:

$$\mathrm{Neplog}\, 10.000.000 = 0.$$

Analogamente si ha l'espressione

$$\mathrm{Neplog}\, 9.999.999 = 1,$$

infatti:

$$10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \quad \Rightarrow \quad L = 1.$$

Il logaritmo di Napier soddisfa inoltre la seguente equazione:

$$\text{Neplog}\,(10^7 xy) = \text{Neplog}\,(x) + \text{Neplog}\,(y).$$

Se Napier avesse diviso per 10^7 i numeri e i logaritmi, si sarebbe virtualmente ottenuto un sistema di logaritmi aventi come base $1/e$, ove e (circa $2,718...$) designa proprio la costante nota con il nome di *"numero di Nepero"*. Infatti

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \cong \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Ricordiamo che il limite della successione che conduce proprio al numero di Nepero è invece:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

In realtà, la costante e viene chiamata, a volte, anche "numero di Eulero", in quanto Eulero fu il primo a far uso della lettera "e" per indicare tale numero, come si può riscontrare nell'opera *Mechanica* (1736) dello stesso matematico.

Il logaritmo in base e di un numero x viene chiamato "logaritmo naturale" e indicato con $\ln x$. Assieme alla base 10, la base e rappresenta sicuramente la più utilizzata in assoluto.

A proposito di base 10, colui che la introdusse (e che, allo stesso tempo, semplificò notevolmente il concetto di logaritmo) fu **Henry Brigss** (1561-1630), il primo professore saviliano di geometria all'Università di Oxford.

Briggs, nel 1615, fece visita proprio a Napier in Scozia, con cui discusse in merito a modifiche da introdurre nel metodo dei logaritmi. Napier, confessando di averci già pensato, dichiarò di essere d'accordo con le idee del collega. Purtroppo, però, prima che tali idee potessero essere diffuse, Napier morì. La morte dell'inventore dei logaritmi avvenne il 4 aprile 1617, anno in cui uscì la sua già citata opera *Rabdologiæ*.

Briggs si prese la briga di calcolare una tavola di logaritmi "briggsiani" (cioè in base 10), partendo da $\lg 10 = 1$ e considerando radici quadrate successive.

Nel 1617 pubblicò *Logarithmorum chilias prima*, i logaritmi degli interi da 1 a 1000, calcolati sino a 14 cifre decimali. Il suo lavoro del 1624 *Arithmetica logarithmica* conteneva i logaritmi in base 10 dei numeri da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000, sempre con 14 cifre decimali.

L'idea si diffuse molto rapidamente per l'Europa. **John Speidell** determinò i logaritmi delle funzioni trigonometriche (come $\lg \sin x$), pubblicandone le tavole nei suoi *New Logarithmes* nel 1619.

L'orologiaio svizzero **Jobst Bürgi** pubblicò i suoi risultati sui logaritmi nel 1620 e, tra l'altro, sembra che egli ne avesse scoperto l'idea di base nel 1588, persino prima di Napier.

Tuttavia, nella storia della matematica, ciò che ha un'importanza cruciale è quello che è stato effettivamente pubblicato e non ciò che è rimasto confinato all'interno della vita privata di una singola persona. Dunque, da questo punto di vista, è lecito attribuire l'invenzione dei logaritmi a Napier, seppur tenendo sempre in mente che, probabilmente, il sopracitato orologiaio svizzero è pervenuto alla fantastica idea ben prima di lui.

In conclusione, i logaritmi hanno segnato una vera e propria rivoluzione all'interno della matematica del XVII secolo.

Terminiamo sottolineando l'importanza dei logaritmi nel mondo odierno. Strumenti e nozioni importantissime come la scala del pH in Chimica, il decibel usato nell'ambito dell'acustica, la scala Richter atta a misurare la magnitudo dei terremoti, si poggiano letteralmente sui logaritmi.