Prop: sia $AX = b$ un sistema lineare dove $A \in M_{m,n}(K)$ è a scala e supponiamo che il numero di righe non nulle di A sia r; allora

$$AX = b \text{ ammette soluzione } \iff b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_m = 0$$

(ovvero, è compatibile)

Dim. "$\Rightarrow$" supponiamo che $AX = b$ ammetta una soluzione $s \in K^n$; dato che le righe dalla $(r+1)$-esima alla m-esima sono nulle nella matrice A, abbiamo che le seguenti uguaglianze sono soddisfatte:

$$\begin{cases} 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \dots + 0 \cdot s_n = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \dots + 0 \cdot s_n = b_m \end{cases}$$

pertanto $b_{r+1} = 0, \dots, b_m = 0$.

"$\Leftarrow$" supponiamo che valga $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$ e dimostriamo che $AX = b$ ammette una soluzione; costruiremo una soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$; per ipotesi le ultime righe di A sono tutte nulle e anche le entrate $b_{r+1}, \dots, b_m$ sono tutte nulle quindi le ultime equazioni del sistema sono del tipo $0 = 0$, pertanto esse sono soddisfatte qualsiasi siano i valori $s_1, \dots, s_n$; l'ultima equazione non identicamente nulla del sistema è quella data dalla riga r-esima

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{rj_r} & \dots \\ 0 & \dots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ricordiamo che $j_r = \min\{j : a_{rj} \neq 0\}$ pertanto $a_{rj_r} \neq 0$

tale equazione è

$$a_{rj_r} \cdot x_{j_r} + a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} + \dots + a_{rn} x_n = b_r$$

$\neq 0$

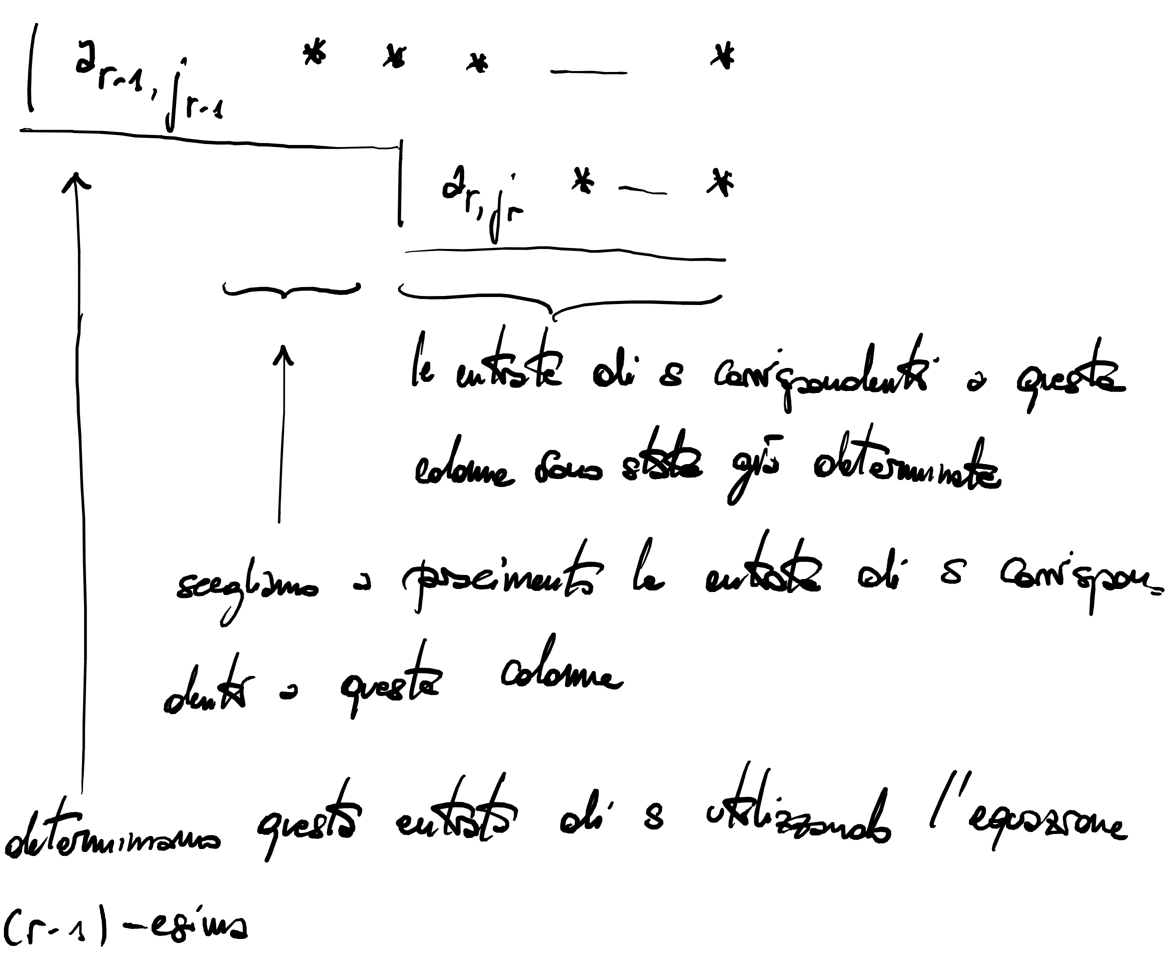
ora scegliamo dei valori $s_{j_r+1}, \dots, s_n \in K^n$ a piacimento e poi scegliamo s_{j_r} nel modo seguente:

$$s_{j_r} := \frac{b_r - \left(a_{r,j_r+1} s_{j_r+1} + \dots + a_{rn} s_n \right)}{a_{rj_r}}$$

con questa scelta di $s_{j_r}, \dots, s_n$, l'r-esima equazione è soddisfatta; consideriamo ora l'$(r-1)$-esima equazione:

$$a_{r-1,j_{r-1}} \cdot x_{j_{r-1}} + a_{r-1,j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n} x_n = b_{r-1}$$

per ipotesi, dato che A è a scala, vale che $j_{r-1} < j_r$



pertanto fissiamo a piacimento i valori $s_{j_{r-1}+1}, \dots, s_{j_r-1} \in K$ e definiamo

$$s_{j_{r-1}} := \frac{b_{r-1} - \left(a_{r-1,j_{r-1}+1} s_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1,n} \cdot s_n \right)}{a_{r-1,j_{r-1}}}$$

con queste scelte di $s_{j_{r-1}}, \dots, s_n$ otteniamo che le ultime due equazioni non identicamente nulle sono soddisfatte; a questo punto si procede a ritroso determinando le entrate di $s \in K^n$ in modo che tutte le equazioni siano soddisfatte.

<u>**Esempio**</u>: consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,6}(\mathbb{R})$$

la matrice A è a scala; il risultato precedente ci dice che il sistema $AX = b$ è compatibile se e solo se

$$b_4 = 0$$

(infatti in questo caso $r = 3$); possiamo scegliere

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questa scelta di b dà luogo al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \quad -x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

le soluzioni s del sistema sono elementi di $\mathbb{R}^6$.