Esempio:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \quad - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ \qquad\qquad x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

cerchiamo le soluzioni $s \in \mathbb{R}^6$ di questo sistema; per farlo, partiamo dall'ultima equazione non identicamente nulla; essa dà
$$x_4 = 1 - 2x_5 - x_6$$
scegliamo quindi $s_5 = 1$ ed $s_6 = 0$ e otteniamo
$$s_4 = 1 - 2 - 0 = -1$$
dalla penultima equazione non nulla otteniamo
$$x_2 = -1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6$$
scegliamo quindi $s_3 = -1$ e otteniamo
$$s_2 = -1 - 3 - 2 + 1 - 0 = -5$$
infine:
$$x_1 = 1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 - x_6$$
che restituisce
$$s_1 = 1 - 5 + 1 + 1 - 2 - 0 = -4$$
in questo modo abbiamo determinato la soluzione
$$s = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ del sistema lineare considerato

cerchiamo ora di descrivere tutte le soluzioni del sistema: assegniamo valori $u, v \in \mathbb{R}$ ad s_5 ed s_6, e otteniamo
$$s_4 = 1 - 2u - v$$
se ora assegniamo un valore $w \in \mathbb{R}$ ad s_3, otteniamo
$$\begin{aligned} s_2 &= -1 + 3w + 2(1 - 2u - v) + u - v \\ &= -1 + 3w + 2 - 4u - 2v + u - v \\ &= 1 + 3w - 3u - 3v \end{aligned}$$
infine
$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + (1 + 3w - 3u - 3v) - w - (1 - 2u - v) - 2u - v \\ &= 1 + 2w - 3u - 3v \end{aligned}$$
pertanto la soluzione generale si può scrivere come
$$\begin{pmatrix} 1 + 2w - 3u - 3v \\ 1 + 3w - 3u - 3v \\ w \\ 1 - 2u - v \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{dove } u, v, w \in \mathbb{R}$$
$$\| $$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
in questo caso abbiamo che la generica soluzione di questo sistema lineare dipende da 3 parametri liberi (u, v, w)

A questo punto sappiamo come risolvere sistemi lineari con matrice dei coefficienti a scala. Perché è utile? Perché ora vedremo che possiamo ricondurre ogni sistema lineare a uno a scala. Ricordiamo che due sistemi lineari
$$AX = b \quad e \quad A'X = b' \quad \text{con} \quad A \in M_{m,n}(K),\ b \in K^m$$
$$A' \in M_{m',n}(K),\ b' \in K^{m'}$$
si dicono <u>equivalenti</u> se i loro due insiemi delle soluzioni:
$$\{s \in K^n : As = b\} \quad e \quad \{s' \in K^n : A's' = b'\}$$
sono uguali.

Esempio: il sistema dato dalla matrice
$$A = (0 \ 1 \ 1) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$$
e dal vettore $b = (2)$ dà l'equazione
$$y + z = 2$$
e le sue soluzioni sono tutti gli elementi $s \in \mathbb{R}^3$ del tipo:
$$\begin{pmatrix} u \\ 2 - v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{R}$$
questo sistema è equivalente a
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Def.: sia $AX = b$ un sistema lineare, allora la matrice ottenuta aggiungendo ad A la colonna data da b, ovvero la matrice $(A|b)$ è detta la <u>matrice</u> <u>completa</u> del sistema $AX = b$.

Esempio: se consideriamo
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 5 \end{cases}$$ allora abbiamo
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora tre operazioni, che chiamiamo <u>operazioni elementari</u>, che trasformano un sistema in un sistema equivalente.

OE1: Scambio due equazioni del sistema. Più precisamente dati $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$, scambio di posto l'equazione i_1-esima con l'equazione i_2-esima; questo corrisponde a scambiare di posto le righe i_1 ed i_2 della matrice completa.

OE2: Moltiplico un'equazione per uno scalare non nullo. Più precisamente, dati $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in K \setminus \{0\}$, moltiplico l'equazione i-esima per λ; questo corrisponde a moltiplicare la i-esima riga della matrice completa per lo scalare λ.

OE3: Sommo a una equazione un multiplo di un'altra equazione. Più precisamente dati $i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$ e $\lambda \in K$, sommo alla i_1-esima equazione la i_2-esima equazione moltiplicata per λ; questo corrisponde a sommare alla i_1-esima riga la i_2-esima riga moltiplicata per λ.

Prop.: se applichiamo a un sistema lineare $AX = b$ una delle tre operazioni elementari, otteniamo un sistema equivalente a quello di partenza.

Se ora mostriamo che applicando le tre operazioni elementari precedenti riusciamo sempre a trasformare un sistema lineare in uno con matrice dei coefficienti a scala, allora sappiamo risolvere un sistema lineare qualsiasi.
La procedura che trasforma un sistema arbitrario in uno a scala è detta <u>algoritmo</u> <u>di gradinizzazione</u> <u>di</u> <u>Gauss</u>.

<u>Algoritmo</u> Gradinizzazione di Gauss
<u>Input</u>: matrice completa $(A|b)$ di un sistema lineare
<u>Output</u>: matrice completa $(\tilde{A}|\tilde{b})$ di un sistema lineare equivalente a quello di partenza e tale che $\tilde{A}$ è a scala.

1. Determino $\bar{j}$, l'indice di colonna minimo per cui abbiamo una colonna non nulla di A, ovvero $\bar{j} := \min\{j : A^{(j)} \neq 0\}$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
$$\uparrow \bar{j}$$

2. Determinare un indice di riga $\bar{\imath}$ tale che $a_{\bar{\imath}\bar{j}} \neq 0$ (l'esistenza di un tale $\bar{\imath}$ deriva dalla scelta di $\bar{j}$)

3. Scambio le righe 1 e $\bar{\imath}$; in questo modo l'elemento $a_{1\bar{j}}$ è non nullo
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1\bar{j}} \neq 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

4. Moltiplico la prima riga per $\dfrac{1}{a_{1\bar{j}}}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

5. Per ogni $i \in \{2, \dots, m\}$ sommo alla i-esima riga un opportuno multiplo della prima riga al fine di rendere nulla l'entrata $a_{i\bar{j}}$; più precisamente, sostituisco la riga i-esima con
$$A_{(i)} - a_{i\bar{j}} A_{(1)}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

6. Ripeto il procedimento precedente sulla sottomatrice determinata dalle righe $\{2, \dots, m\}$ e dalle colonne $\{\bar{j}+1, \dots, n\}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
ripeto la procedura su questa sottomatrice.

Questo algoritmo termina in un tempo finito e restituisce una matrice che rispetta le prescrizioni della specificazione.

Esempio: consideriamo il sistema lineare dato dalla matrice completa
$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$$
effettuiamo la gradinizzazione
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{OE1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{OE2\,(\cdot\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -11 & -17 \end{pmatrix}$$