Sistemi di generatori e indipendenza lineare

Prop.: sia V uno spazio vettoriale su K (campo); siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi vettoriali; allora $U \cap W$ è sottospazio vettoriale di V.

Dim: verifichiamo che $U \cap W$ soddisfa le 3 proprietà di sottospazio vettoriale; notiamo preliminarmente che

$$U \cap W = \{ v \in V , \ v \in U \text{ e } v \in W \}$$

1. dimostriamo che $0 \in U \cap W$; dato che U è sottospazio vettoriale, allora $0 \in U$; similmente dato che W è sottospazio vettoriale, $0 \in W$; quindi $0 \in U$ e $0 \in W$, ovvero $0 \in U \cap W$.
2. mostriamo che se $v_1, v_2 \in U \cap W$, allora $v_1 + v_2 \in U \cap W$; dato che $v_1, v_2 \in U \cap W$, in particolare $v_1, v_2 \in U$; ma U è sottospazio vettoriale, quindi $v_1 + v_2 \in U$; similmente dal fatto che $v_1, v_2 \in U \cap W$ segue che $v_1, v_2 \in W$, pertanto, dato che W è sottospazio vettoriale, abbiamo $v_1 + v_2 \in W$; in definitiva $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$ ovvero $v_1 + v_2 \in U \cap W$.
3. mostriamo che se $\lambda \in K$ e $v \in U \cap W$, allora $\lambda \cdot v \in U \cap W$; dato che $v \in U \cap W$, segue che $v \in U$, ed essendo U un sottospazio vettoriale, allora $\lambda \cdot v \in U$; similmente, dato che $v \in U \cap W$, allora $v \in W$, ed essendo W un sottospazio vettoriale, $\lambda \cdot v \in W$; in definitiva, $\lambda \cdot v \in U$ e $\lambda \cdot v \in W$, ovvero $\lambda \cdot v \in U \cap W$.

Oss: non è vero che se V è uno spazio vettoriale su K e $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali, allora $U \cup W$ è sottospazio vettoriale.
(esercizio: mostrare che le proprietà 1 e 3. valgono in generale)
Consideriamo $U, W \subseteq \mathbb{R}^2$

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ 2x - y = 0 \right\}$$

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x - 2y = 0 \right\}$$

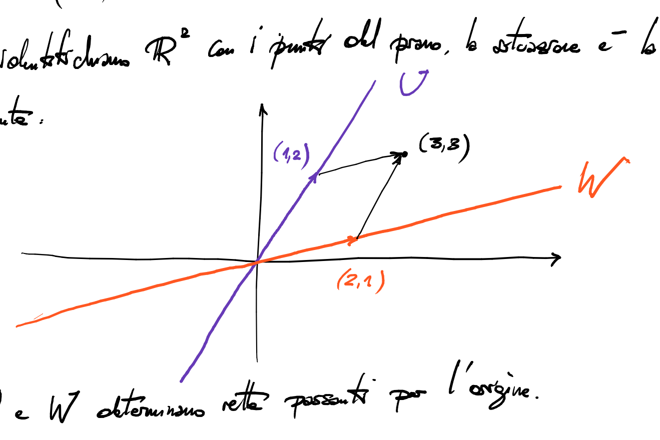
notiamo che U e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$; consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_1 \in U \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 \in W$$

quindi $v_1, v_2 \in U \cup W$; però:

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e vale che $v_1 + v_2 \notin U \cup W$ perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin U$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \notin W$ (perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ non soddisfa nessuna delle equazioni definenti U o W); se identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con i punti del piano, la situazione è la seguente:



U e W determinano rette passanti per l'origine.

Def: sia V uno spazio vettoriale su K, siano U e W due sottospazi vettoriali di V; definiamo

$$U + W := \{ u + w : \ u \in U, \ w \in W \}$$

e chiamiamo questo sottoinsieme di V il <u>sottospazio vettoriale somma</u> di U e W.

Prop.: con le notazioni precedenti, $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim: per esercizio.

Prop.: con la notazione precedente, $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$

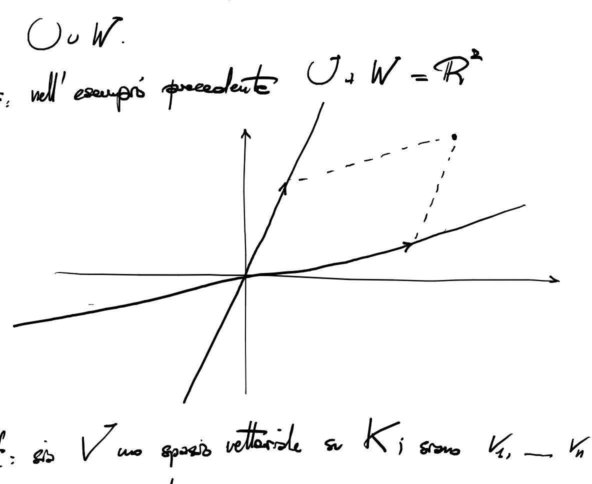
Dim: mostrare che $U \subseteq U + W$ significa mostrare che se $u \in U$, allora vale anche che $u \in U + W$; mostrare che $u \in U + W$ significa mostrare che u può essere scritto come somma di un vettore di U e di un vettore di W; dato che $0 \in W$, vale che

$$u = \underset{\substack{\cap \\ U}}{u} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{0}$$

quindi $u \in U + W$; l'inclusione $W \subseteq U + W$ si dimostra in maniera analoga.

Cor.: con la notazione precedente $U \cup W \subseteq U + W$; si può dimostrare che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$.

Oss.: nell'esempio precedente $U + W = \mathbb{R}^2$



Def: sia V uno spazio vettoriale su K; siano $v_1, \ldots, v_n \in V$; allora una <u>combinazione lineare</u> di $v_1, \ldots, v_n$ è un qualsiasi vettore della forma

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$.

Esempio: in $\mathbb{Q}^2$, consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

allora una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 è ad esempio

$$\frac{5}{2} \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 + \frac{7}{8} \cdot v_3$$

Def: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$; definiamo

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) := \{ \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \}$$
$$= \{ \text{combinazioni lineari di } v_1, \ldots, v_n \}$$

Prop.: con le notazioni precedenti, $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V

Dim:
1. $0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n$, dunque $0 \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$
2. siano $u, w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$, mostriamo che $u + w \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$; per definizione $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ per certi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$; allora
$$u + w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i$$
pertanto $u + w$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$
3. siano $u \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ e $\lambda \in K$; mostriamo che $\lambda \cdot v \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$; per definizione $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ per certi $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, pertanto
$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \cdot \mu_i) v_i$$
pertanto $\lambda \cdot v$ è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; diciamo che un sottoinsieme di elementi $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ è un <u>sistema di generatori</u> per U se ogni vettore di U si può scrivere come combinazione lineare di $u_1, \ldots, u_n$; equivalentemente, se $U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n)$.

Esempio: consideriamo in $V = \mathbb{R}^2$ il sottospazio vettoriale $U = \mathbb{R}^2$; i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori per U, infatti se $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$ allora vale che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= a \cdot u_1 + b \cdot u_2$$

notiamo che, se definiamo

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora anche $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un sistema di generatori per U

Oss.: se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori per U, allora per ogni $u \in U$, anche $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ è un sistema di generatori per U (ogni sovrainsieme di un sistema di generatori è un sistema di generatori.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$; i vettori $v_1, \ldots, v_n$ si dicono <u>linearmente dipendenti</u> se possiamo scrivere $0 \in V$ come una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ in cui non tutti i coefficienti in K sono nulli, ovvero se vale che

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

dove non tutti i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono nulli; i vettori $v_1, \ldots, v_n$ si dicono <u>linearmente indipendenti</u> se non sono linearmente dipendenti, ovvero se l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$ è quello di prendere tutti i coefficienti nulli; in altre parole $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se dal fatto che

$$0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

segue che $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Esempio: in $V = \mathbb{R}^2$, consideriamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono linearmente dipendenti, infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vale che $\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indipendenti, infatti se

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

il che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale; una <u>base</u> di U è un insieme $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq U$ tale che
1. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori di U
2. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sono linearmente indipendenti

Prop.: sia V uno spazio vettoriale su K e siano $v_1, \ldots, v_n \in V$; allora $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi può essere scritto come combinazione lineare degli altri; equivalentemente se esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che v_j è combinazione lineare di $\underbrace{\{v_1, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_n\}}_{v_j \text{ è escluso}}$; equivalentemente se esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $v_j \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_n)$