Esercitazioni di "Geometria"
Foglio 3

Titolare del corso: Prof. Danilo Lewanski

Esercitatore: Dott. Armando Capasso

25 ottobre 2024

"La pratica è la verifica della teoria

Esercizio 1. Rappresentare in forma polare ed esponenziale le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x^3 + 1 = 0,\ x^3 - i = 0.$$

Esercizi 2. Si fissi $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dimostrare che i seguenti insiemi sono spazi vettoriali.

a) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali $(\mathbb{R}[x], +; \mathbb{R}, \cdot)$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero reale;

b) $\mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq d\}$;

c) $A = \left\{a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 + a_1 + \ldots + a_d = 0\right\}$;

d) $B = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid a_0 - a_1 + \ldots + (-1)^d a_d = 0\right\}$;

e) $\forall k \in \{0, \ldots, d{-}1\}$, $C_{d,k} = \left\{a_0 + \ldots + a_dx^d \in \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mid da_0 + (d-1)a_1 + \ldots + (d-k)a_k = 0\right\}$.

Esercizi 3. Dimostrare che i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n_m$.

a) $T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right)$ l'insieme delle matrici triangolari superiori di tipo $[m, n]$; ovvero:

$$T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

b) $T_i\left(\mathbb{R}^n_m\right)$ l'insieme delle matrici triangolari inferiori di tipo $[m, n]$; ovvero:

$$T^s\left(\mathbb{R}^n_m\right) = \left\{A = \left(a^j_i\right) \in \mathbb{R}^n_m \mid \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}, i > j \Rightarrow a^j_i = 0\right\}.$$

E posto $m = n$ continuare coi seguenti insiemi.

c) $diag(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici diagonali di ordine n; ovvero:

$$diag(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid \forall i \neq j \in \{1,\ldots,n\},\, a_i^j = 0 \right\}.$$

d) $S(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine n; ovvero:

$$S(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid A = A^T \right\}.$$

e) $AS(n,\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici anti-simmetriche di ordine n; ovvero:

$$AS(n,\mathbb{R}) = \left\{ A = \left(a_i^j\right) \in \mathbb{R}_n^n \mid -A = A^T \right\}.$$

Domanda: le precedenti risposte dipendono dal campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali?

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari omogenei, esplicitandone l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} 3t - 2z + 5x = 0 \\ 2x + 4y - 7t = 0 \\ 3y - 2t + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x + 4y = 0 \\ 2z + 3y - t = 0 \\ 3x - y + 2t + z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x = 0 \\ 2x + 4y - 7t = 0 \\ 3y - 2t + z = 0 \\ 3x - 2y + 6z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3t - 2z + 5x + 4y = 0 \\ 2z + 3y - t = 0 \\ 3x - y + 2t + z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2t = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 5. Ripetere il precedente esercizio, ragionando sul campo $\mathbb{F}_p$, con $p \in \{2,3,5,7\}$.

Esercizio 6. Discutere la compatibilità dei seguenti sistemi di equazioni lineari in funzione del parametro\dei parametri che ivi compare\compaiono.

$$\begin{cases} 3y - kx = 1 - 2z \\ 2z + 3x - 1 = 2y \\ kz - 2y = -1 + 3x \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y = k \\ 3kx + 2y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} kx + 2y = 3 \\ y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2y + kz = k \\ kx + y + z = 0 \\ -4x + 2y - kz = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3kx - z + y = 1 \\ -3ky + z - 2x = -1 \\ z - 2y + kx = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + ky + z = 4 \\ x + y - 2z = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6kx - y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 2kx + z = -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2x + ky - 3 = 0 \\ 2y + z = -1 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ 3y + kt = k \\ x - y + kz = 0 \\ 4x - 4y + 4z - kt = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} kx + hy + t = 1 \\ x + kz + t = 2 \\ -x + 2z - t = -2 \\ x + ky + hz = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + ky + z = 4 \\ x + y - 2z = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

con $h, k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Ripetere il precedente esercizio, assumendo che $h = k = i \in \mathbb{C}$.